S.1310. c.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LIII. BAND.

MÜNCHEN 1886.

VERLAG DER K. AKADEMIE

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB.

Inhalt des XV. Bandes.

I. Abtheilung. Seite

Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. Von *Carl Max von Bauernfeind*. Zweite Mittheilung, enthaltend weitere Thatsachen und ihre Erklärung. Mit zwei Steindrucktafeln 1

Ueber neue Exemplare von jurassischen Medusen. Von *Ludwig von Ammon*. Mit fünf Tafeln 103

Ueber zündende Blitze im Königreich Bayern während des Zeitraumes 1833 bis 1882. Von *Wilhelm von Bezold*. Mit einer Karte 169

II. Abtheilung.

Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung und eines kreisrunden Schirmchens theoretisch und experimentell bearbeitet von *E. Lommel*. Mit 9 lithographirten Tafeln 229

Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale. Von *J. Lüroth* in Freiburg in Baden 329

Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit. Von *Karl Strecker*. 367

Beiträge zur Kenntniss der Nervenfasern. Von *Theodor Boveri*. Mit 2 Tafeln. 421

Ueber Homoeosaurus Maximiliani. Von *Dr. Ludwig von Ammon*. Mit 2 Tafeln. 497

III. Abtheilung.

Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Von *E. Lommel*. Mit lithographirten Tafeln 529

Ueber den Einfluss dioptrischer Fehler des Auges auf das Resultat astronomischer Messungen. Von *H. Seeliger* 665

Der primäre und sekundäre longitudinale Elastizitätsmodul und die thermische Konstante des Letzteren. Von *Andreas Miller*. Mit 2 Tafeln 705

10 AUG 1887

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

FÜNFZEHNTEN BANDES

ERSTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LIII. BAND.

MÜNCHEN 1884.

VERLAG DER K. AKADEMIE

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Ergebnisse

aus

Beobachtungen der terrestrischen Refraktion

von

Carl Max von Bauernfeind.

Zweite Mitteilung,

enthaltend weitere Thatsachen und ihre Erklärung.

Mit zwei Steindrucktafeln.

Ergebnisse
aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion

von

Carl Max von Bauernfeind.

Einleitung.

Im Anschlusse an die im September 1880 bei Gelegenheit der siebenten Generalversammlung der Kommissäre der Europäischen Gradmessung ausgegebene „Erste Mitteilung“ über die von mir veranstalteten und geleiteten Beobachtungen der terrestrischen Refraktion, erscheint hier eine „Zweite Mitteilung“ über den gleichen Gegenstand, welche auf Grund der zwischen dem Döbra- und Kapellenberg im Fichtelgebirge gesammelten Erfahrungen gleichzeitige und gegenseitige Beobachtungen zwischen drei in ihrer Höhenlage sehr verschiedenen Punkten des Bayerischen Hochgebirgs umfassen.

Bei der Zusammenstellung unserer Arbeiten von 1877 bis 1880 zu der vorhin genannten „Ersten Mitteilung“ hatte sich nämlich herausgestellt, dass der geringe Höhenunterschied von nur 30 Meter der 57 Kilometer von einander entfernten Endstationen Döbra- und Kapellenberg zwar für die Beobachtungen von Seitenrefraktionen, nicht aber von Höhenrefraktionen günstig war, und dass es die Ausgleichung der Beobachtungsfehler wesentlich fördern würde, wenn auf drei zusammenhängenden und verschieden hoch gelegenen Punkten gleichzeitige und gegenseitige Höhenmessungen gemacht werden könnten. Diese Erfahrungen und eine topographische Untersuchung des nordwestlichen Abhangs

der Bayerischen Alpenkette zwischen Schliersee und Chiemsee liessen bald erkennen, dass folgende drei Punkte die zu stellenden Anforderungen relativ am besten zu erfüllen im Stande sind, nämlich erstens ein freigelegener Punkt auf der rechtseitigen ziemlich hohen Terrasse des Innstroms nächst dem Weiler Höhensteig, etwa drei Kilometer von Rosenheim entfernt; zweitens der Scheitel des südlich vom Dorfe Irschenberg gelegenen gleichnamigen Bergs, den man am besten von Aibling aus erreicht; drittens der höchste zugängliche Punkt der bei Hohenaschau gelegenen Kampenwand (die sogenannte Kampenhöhe). Von jedem dieser drei Punkte aus konnten die beiden anderen ohne jede Schwierigkeit, bei gutem Wetter sogar mit freiem Auge gesehen werden.

Noch im Herbste des Jahres 1880 wurden die geometrischen Vorarbeiten zu den im darauffolgenden Sommer anzustellenden Refraktionsbeobachtungen begonnen, indem zunächst zu jedem der drei Punkte welche wir von nun an abgekürzt auch bloss mit den Buchstaben H, I, K bezeichnen werden, möglichst genaue geometrische Nivellemente geführt wurden, um ihre Höhenunterschiede bis auf einen oder zwei Centimeter richtig zu erhalten.

Es ist demnach zunächst von Prien auf der Bahnlinie bis zum Bahnhofe Aschau und von da auf der Fahrstrasse bis zu dem in Hohenaschau gelegenen Nullpunkt der Kilometerzählung des vom Reichsrate Freiherrn von Cramer-Klett mit grossem Kostenaufwande hergestellten und dem Publikum zur Benützung überlassenen „Kampenwegs“ ein Präcisionsnivellement hergestellt und von diesem Punkte aus auf dem eben genannten und nirgends mehr als zehn Prozent steigenden Reitweg ein Doppelnivellement bis zur Kampenhöhe (K) hergestellt worden. In gleicher Weise wurde durch genaues geometrisches Doppelnivellement die Höhenlage der Station Irschenberg (I) bestimmt, und zwar von der Höhenmarke am Bahnhofe in Aibling aus auf der nach Irschenberg führenden Vizinalstrasse; nicht minder die Höhenlage der Station Höhensteig (H) von dem auf der Innbrücke bei Rosenheim gelegenen Fixpunkt Nr 817 des Bayerischen Präcisionsnivellements aus. Wir haben die näheren Bestimmungen dieser Nivellemente in der bereits gedruckten „Sechsten Mitteilung“ über das Bayerische Präcisionsnivellement veröffentlicht und begnügen uns hier mit der Anführung der Meeres-Höhen (h), welche den Instrumenten-

Standpunkten, d. h. den Pfeileroberflächen auf den drei Beobachtungs-Stationen entsprechen und folgende sind:

auf der Station Höhensteig: 483,640 m
„ „ „ Irschenberg: 753,296
„ „ „ Kampenwand: 1564,031

Wenn man die Instrumentenhöhen bis zu deren Axen dazu rechnet, so wird die Meereshöhe (h_1) der Station

Höhensteig (H) $= h + 0{,}36 =$ 484,000 m
Irschenberg (I) $= h + 0{,}33 =$ 753,626
Kampenwand (K) $= h + 0{,}30 =$ 1564,331

und es sind die Höhenunterschiede zwischen

H und I $= x_1 =$ 269,626 m; log. $x_1 = 2{,}4307618$
H und K $= x_2 =$ 1080,331 ; log. $x_2 = 3{,}0335569$
I und K $= x_3 =$ 810,705 ; log. $x_3 = 2{,}9088629$

Ebenso wie mit den Detailbestimmungen der Nivellemente werden wir es mit den Triangulierungsarbeiten halten, welche auf den drei Punkten H, I, K vorzunehmen waren, um ihre Horizontalprojektion gegen eine Reihe von Punkten zweiter Ordnung, namentlich durch Rückwärts-Einschneiden auf drei und mehr Punkte zu bestimmen. Die speziellen Messungen und Berechnungen liegen in ausgearbeiteten Heften vor und können von Sachverständigen, wenn es gewünscht wird, auf dem Bureau der K. Bayerischen Kommission für die Europäische Gradmessung eingesehen werden. Nur die vom K. Katasterbureau in München erhaltenen Koordinaten der anvisierten Punkte und die von unseren Assistenten, den Herren Privatdozenten Dr Decher und Dr Haid, dann dem Herrn Ingenieur K. Oertel mit Theodolithen von Ertel & Sohn in München und Lingke & Co zu Freiberg in Sachsen gemessenen Richtungswinkel, auf denen die Berechnung der Koordinaten der Punkte H, I, K beruht, wollen wir nachstehend zur Kenntnis unserer Leser bringen und dabei bemerken, dass diese Koordinaten in Bayerischen Ruten, à 10 Fuss, gegeben sind.

I. Station Höhensteig (H)

Nr	Anvisierter Punkt des Bayer. Dreiecknetzes	Richtungswinkel gegen Aibling			Koordinatenwerte Abscisse	Ordinate
1	Aibling	0⁰	0′	0,00″	— 10345,62⁰	— 11248,42⁰
2	Westerndorf	26	30	15,32	— 9927,41	— 13819,73
3	Riedering	213	40	22,76	— 11386,71	— 16258,94
4	Höhenmoos	229	32	28,78	— 12643,35	— 16639,13

II. Station Irschenberg (I)

Nr	Anvisierter Punkt des Bayer. Dreiecknetzes	Richtungswinkel gegen Wildboding			Koordinatenwerte Abscisse	Ordinate
1	Wildbading	0⁰	0′	0,00″	— 12040,98⁰	— 8889,64⁰
2	Frauenried	45	1	56,74	— 12905,00	— 7783,02
3	Grosshöhenrain	173	7	0,76	— 8024,79	— 8339,94
4	Irschenberg	177	21	35,98	— 11586,07	— 8870,87
5	Weihenlinden	205	6	28,00	— 9558,58	— 9845,62
6	Au	313	3	19,24	— 12998,70	— 10284,24

III. Station Kampenwand (K)

Nr	Anvisierter Punkt des Bayer. Dreiecknetzes	Richtungswinkel gegen Niederaschau			Koordinatenwerte Abscisse	Ordinate
1	Niederaschau	0⁰	0′	0,00″	— 13588,47⁰	— 19253,54⁰
2	Umrathshausen	18	53	2,15	— 12517,68	— 19194,93
3	Hüttenkirchen	37	4	59,25	— 11906,80	— 19810,69
4	Prien	39	2	54,52	— 10677,04	— 19756,36
5	Schleching	190	24	11,98	— 15831,94	— 21144,36
6	Klobenstein	196	47	40,03	— 16565,85	— 21346,49
7	Frassdorf	359	53	50,83	— 12694,75	— 12327,62

Für die Koordinaten der drei Stationspunkte H, I, K ergaben sich mit Bezug auf das aus dem Werke „Die Bayerische Landesvermessung“ bekannte Axensystem unserer Landestriangulation folgende Werte in Bayerischen Ruten und Metern, nämlich für

Höhensteig (H):

$x_0 = -\ 10312{,}204^0 \pm 0{,}2274^0 = -\ 30097{,}111\ \text{m} \pm 0{,}663\ \text{m}$
$y_0 = +\ 14610{,}901 \pm 0{,}4091 = +\ 42643{,}238 \pm 1{,}194$

Irschenberg (I):

$x_0 = -\ 11751{,}747^0 \pm 0{,}045^0 = -\ 34298{,}574\ \text{m} \pm 0{,}131\ \text{m}$
$y_0 = +\ 8882{,}571 \pm 0{,}005 = +\ 25924{,}601 \pm 0{,}015$

Kampenwand (K):

$x_0 = -\ 14520{,}045^0 \pm 0{,}075^0 = -\ 42378{,}069\ \text{m} \pm 0{,}219\ \text{m}$
$y_0 = +\ 20211{,}833 \pm 0{,}056 = +\ 58990{,}054 \pm 0{,}163$

Die ziemlich grosse Unsicherheit in den Koordinaten von Höhensteig rührt davon her, dass der grösste Teil der Richtungsbeobachtungen verworfen werden musste, weil sich nachträglich eine Verschiebung der Signale herausgestellt hat, welche nur noch vier brauchbare Richtungen und damit bloss eine überschüssige Beobachtung übrig liess.

Aus den gefundenen Koordinaten der drei Punkte H, I, K wurden die Längen und Richtungswinkel der Seiten des Dreiecks H, I, K bestimmt, und zwar nach den von Soldner entwickelten und in dem oben genannten Werke über die wissenschaftliche Grundlage der Bayerischen Landesvermessung enthaltenen und für sphärische Berechnung eingerichteten Formeln, auf die wir hiemit verweisen. Hienach ist für die Seite

Höhensteig—Irschenberg (HI):

Die Länge $s = 17238{,}46$ m
der Richtungswinkel in H $= \alpha = 75^0\ 53'\ 37{,}48''$
der Richtungswinkel in I $= \alpha' = 255^0\ 53'\ 36{,}75''$

Höhensteig—Kampenwand (HK):

Die Länge $s = 20445{,}80$ m
der Richtungswinkel in H $= \alpha = 126^0\ 54'\ 58{,}36''$
der Richtungswinkel in K $= \alpha' = 306^0\ 54'\ 55{,}18''$

Irschenberg—Kampenwand (IK):

Die Länge s = 34038,22 m
der Richtungswinkel in I = α = 103^0 43' 51,77''
der Richtungswinkel in K = α' = 283^0 43' 50,03''

Zur Berechnung gewisser Refraktionskonstanten ist die Kenntnis der geographischen Breiten der drei Beobachtungsorte H, I, K notwendig. Diese liessen sich nach den Soldner'schen Formeln aus der bekannten geographischen Breite des Normalpunktes der Bayerischen Landesvermessung und den eben vorgeführten Koordinaten der Stationen leicht berechnen. Das Ergebnis war folgendes:

Geographische Breite φ

der Station Höhensteig = 47^0 52' 0,27''
„ „ Irschenberg = 47 49 47,41
„ „ Kampenwand = 47 45 17,95

Weiter erforderte die Berechnung der Refraktionskonstanten auch die Kenntnis der Krümmungshalbmesser der Erde in den drei Eckpunkten des Dreiecks H, I, K, und zwar sowohl die Meridianhalbmesser in den drei Ecken als die Querkrümmungshalbmesser der drei Seiten des bezeichneten Dreiecks. Nach den vorstehend gegebenen Daten und den von Encke in dem Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1852 entwickelten Formeln finden sich folgende Werte:

Der Meridian-Krümmungshalbmesser r_0

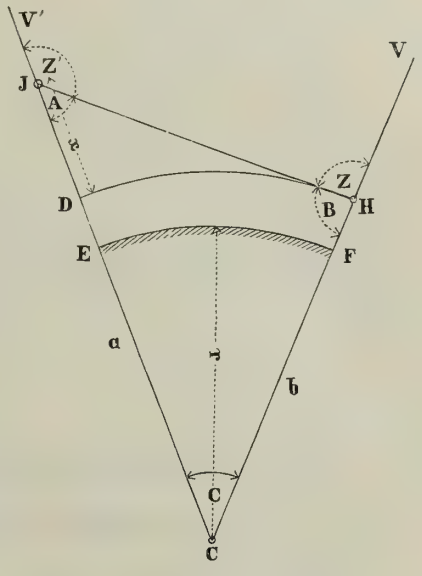
auf Höhensteig ist in Metern gegeben durch log r_0 = 6,8041306
„ Irschenberg „ „ „ „ „ log r_0 = 6,8041278
„ Kampenwand „ „ „ „ „ log r_0 = 6,8041221

Der Querkrümmungshalbmesser r

der Seite HI ist gegeben durch log r = 6,8053635
„ „ HK „ „ „ log r = 6,8049659
„ „ KI „ „ „ log r = 6,8053659

Der Zweck der sämmtlichen geometrischen Vorarbeiten liegt in unserem Falle in der Berechnung der wahren Zenithdistanzen zwischen den drei Stationen, um aus ihrer Vergleichung mit den beobachteten scheinbaren auf die Grösse der terrestrischen Refraktion schliessen zu können, welche stets gleich ist dem Unterschiede zwischen wahrer und scheinbarer Zenithdistanz.

Fig. 1.



Bezeichnet man nun für zwei Beobachtungsorte H und I der beigedruckten Figur, welche die Meereshöhen $FH = h$ und $EF = h'$ haben, die wahren Zenithdistanzen mit Z und Z', so ist

$$Z = 180^0 - B \text{ und } Z' = 180^0 - A \quad (1)$$

ferner, wenn der dem Bogen zwischen H und I entsprechende bekannte Centriwinkel C heisst und $CI = a$, $CH = b$ gesetzt wird:

$$A + B = 180^0 - C \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{tg} \frac{A + B}{2} \quad (3)$$

Da nach der Figur $a - b = x =$ dem Höhenunterschiede der Stationen H und I, und $b = r_1' = r + h$, gleich der Normalen für HI, also $a = r_1' + x$ und $a + b = 2r_1' + x = 2r + h' + h$ ist, so geht mit diesen Werten Gleichung (3) in folgende über:

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{x}{2r_1' + x} \cdot \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \frac{x}{2r + h' + h} \cdot \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \quad (4)$$

(Wegen der bedeutenden Werte, die h und h' in dem vorliegenden Falle haben, nämlich 484 m, 754 m, 1564 m, dürfen dieselben gegen den Wert von 2r nicht vernachlässigt werden.)

Um A — B aus (4) berechnen zu können, ist zuerst C aus der Dreiecksseite HI zu bestimmen. Mit den auf Seite 5 und 6 gegebenen Seitenlängen aber und den vorstehenden Werten von log r findet man auf bekannte Weise, wenn der im Bogenmass ausgedrückte Centriwinkel C mit ψ bezeichnet wird.

Für die Seite HI: $\psi_1 = 0{,}0026986$, $\log \psi_1 = 7{,}4311351 - 10$
$C_1 = 556{,}62'' = 9' 16{,}62''$

Für die Seite HK: $\psi_2 = 0{,}0032036$, $\log \psi_2 = 7{,}5056383 - 10$
$C_2 = 660{,}79'' = 11' 0{,}79''$

Für die Seite IK: $\psi_3 = 0{,}0053284$, $\log \psi_3 = 7{,}7266008 - 10$
$C_3 = 1099{,}07 = 18' 19{,}07''$

Mit diesen Werten von C und den gegebenen Meereshöhen erhält man auf Grund der Gleichungen (2) und (4)

die wahren Zenithdistanzen

für HI	in H = Z	= 89°	10′	52,69″
	in I = Z′	= 90	58	23,93
für HK	in H = Z	= 87	4	3,65
	in K = Z′	= 93	6	57,15
für IK	in I = Z	= 88	47	18,69
	in K = Z′	= 91	31	0,39

A. Ausführung der Refraktions-Beobachtungen.

I. Einrichtung der Beobachtungsstationen.

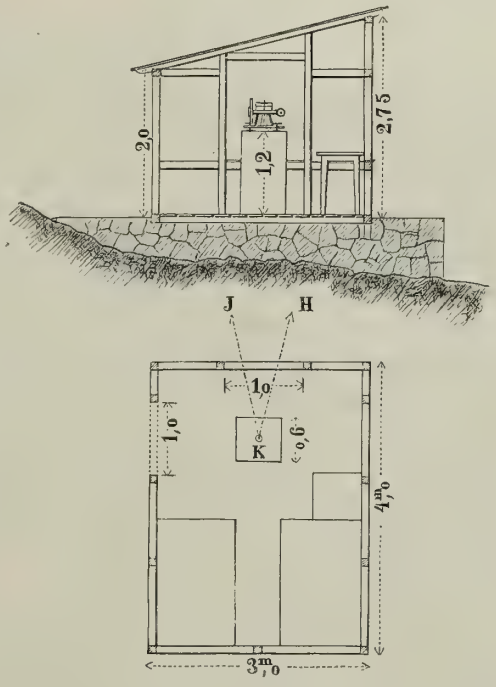
Geraume Zeit vor Beginn der Beobachtungen waren auf den drei Stationen gemauerte Beobachtungspfeiler errichtet worden, um diesen Zeit zum Setzen und Erhärten des Mörtels zu lassen. In Höhensteig und Irschenberg wurden dieselben etwa 1,2 m hoch aus Backsteinen hergestellt, auf genügende Tiefe in Gussmörtel versetzt und nach der Verputzung mit einer in Zement ruhenden Granitplatte abgedeckt, auf der ein Messingbolzen mit centrischer Bohrung den Stationspunkt bezeichnet. Der Pfeiler auf der Kampenwand besteht aus einem in der Nähe gebrochenen Kalksteinmonolith von quadratischem Querschnitt mit 0,5 m Seite und einer Höhe von 1,5 m; an Ort und Stelle wurde derselbe auf dem anstehenden und abgearbeiteten Felsen versetzt und mit einer 0,6 m hohen, oben sorgfältig geebneten Bruchsteinmauerung umgeben, um darauf das Podium der Beobachtungshütte zu legen. Die Abdeckung dieses Pfeilers ist jener der

beiden anderen gleich. Alle drei Pfeiler tragen die eingemeisselte Inschrift K. B. G. (K. B. Gradmessung) 1881 und den Namen der Station, letztere ausgedrückt durch einen der drei Buchstaben H, I, K.

Nachdem im Juni 1881 die Triangulierungsarbeiten vollendet waren, stand der Errichtung von Beobachtungshütten kein Hindernis mehr im Wege.

Die Form, Grösse und Einrichtung derselben, die für sämtliche Stationen gleich war, geht zur Genüge aus den nebenstehenden Zeichnungen, welche den Grund- und Aufriss für die Hütte auf der Kampenwand darstellen, hervor. In Höhensteig und Irschenberg ruhen dieselben auf starken Pfählen, welche in genügender Länge und Anzahl in den Boden geschlagen und mit denen die Schwellen hinreichend fest verbunden wurden, auf der Kampenwand dagegen sind die Pfosten direkt auf die Schwellen gestellt, welche die Bekrönung der Bruchsteinummauerung bilden.

Fig. 2.



Die Wandungen wurden überall möglichst dicht verschalt, der Boden in Schwellenhöhe durch Bretter verdeckt und das Dach, um nötigenfalls die Polhöhe messen und Oberlicht benützen zu können, in der Meridian-Richtung zum Oeffnen eingerichtet.

Am 13. und 14. August wurden die einzelnen Stationen von dem Beobachtungspersonal bezogen und die beiden Feiertage noch dazu benützt, an und vor der Beobachtungshütte geeignete Vorrichtungen zur Aufstellung der Heliotrope und Lampen, sowie der Baro- und Psychrometer anzubringen, und zwar wurden die Höhen für diese Vorrichtungen vorher so bestimmt, dass sämtliche Beobachtungen auf die Höhen der Instrumentendrehaxen bezogen werden konnten.

Die Lampen, Aneroide und Psychrometer wurden auf einfache Konsolen gestellt, die an den Aussenwänden der Hütte befestigt waren, die Heliotrope und die bei bedecktem Himmel in Anwendung gekommenen Magnesiumlampen standen dagegen auf einem in unmittelbarer Nähe der Hütte aufgestellten Tischchen, dessen Hauptbestandteile ein viereckiges Brett und ein genügend befestigter und in der verlangten Höhe abgeschnittener Pfahl waren.

2. Die Instrumente und ihre Konstanten.

Ausser dem in der Ersten Mitteilung schon vollständig beschriebenen verbesserten Ertel'schen Höhenkreis dienten zur Messung der Zenithdistanzen zwei inzwischen neu angeschaffte Universal-Instrumente von Lingke & Co in Freiberg. Dieselben besitzen excentrische durchschlagbare Fernrohre mit Okularmikrometern und (doppelter) mikroskopischer Ablesung am Höhenkreis, dessen Durchmesser bei dem Instrument Nr I (in Irschenberg verwendet) 275 mm, bei dem Instrument Nr II (auf der Kampenwand verwendet) dagegen nur 210 mm beträgt.

Bei beiden Instrumenten ist dieser Vertikalkreis nur lose auf der Drehaxe aufgesetzt, kann jedoch geklemmt werden. Die direkte Teilung gibt ferner bei beiden Instrumenten am Höhenkreis $^1/_{12}$ Grade, die ganzen Gradstriche sind sämtlich und zwar immer nur von 0 bis 9 beziffert, die eigentlichen Grade müssen daher an einem zweiten kleineren Höhenkreis (mit Nonius) abgelesen werden.

Die Mikroskoptrommeln sind bei Instr. Nr I in 60 Teile geteilt, wobei eine volle Umdrehung der Trommel = 2 Minuten Winkelwert, also ein Trommelteil = 2 Sekunden und $2^1/_2$ Trommelumdrehungen einem Limbusteil ($^1/_{12}{}^0 = 5'$) gleich sind. Bei Instr. Nr II zeigen die Mikroskoptrommeln 75 Teile, hier entsprechen aber 2 Trommelumdrehungen einem Limbusteil = 5 Min., also beträgt auch der Wert eines Trommelteils 2 Sekunden. Hier ist die Bezifferung so eingerichtet, dass an den Mikroskopen sofort Minuten und Sekunden abgelesen werden können, was bei Instrument I nicht der Fall ist.

Die Brennweite des Objektivs beträgt bei beiden Instrumenten 43 cm. Zu jedem Intrument sind ausser einem prismatischen noch zwei gewöhnliche Okulare vorhanden, die zweierlei Vergrösserung gewähren, nämlich

(bei beiden Instrumenten) eine 32 malige und eine 48 malige. Um möglichst deutliche Bilder zu bekommen, wurde sowohl in Irschenberg, als auf der Kampenwand mit 32 maliger Vergrösserung beobachtet.

Ferner ist noch zu erwähnen, dass der Zapfen der vertikalen (Alhidaden-) Axe in seinen Schalen vertikal bewegt werden kann, wodurch ein Schwanken desselben vermieden ist, da sich nach etwa erfolgter Abnützung der Lagerringe der Zapfen etwas senken lässt. Der richtige Stand kann an einer, am obern Ende des Zapfens angebrachten Trommel mit Index durch Schrauben hergestellt werden. Ausserdem bewegt sich die horizontale Axe auf Friktionsrollen, um eine möglichst ruhige Bewegung des Fernrohrs zu erhalten.

Das Okularmikrometer besitzt bei beiden Instrumenten ausser einer Reihe fester Fäden einen beweglichen Doppelfaden und ist mit Hilfe einer einfachen Teilung zwischen 0^0 und 90^0 um ganze Grade verstellbar. Die Trommel ist in 100 Teile geteilt, die ganzen Umdrehungen werden durch die überschrittene Anzahl der Rechenzähne gezählt.

Der Schraubenwert für die beiden Okularmikrometer wurde in mehreren sternhellen Nächten des Monats November 1881 auf astronomischem Wege erhalten. Es wurde zu diesem Zweck das zu untersuchende Instrument auf dem nördlichen Beobachtungspfeiler im Hofe des Münchener Polytechnikums aufgestellt, dessen Polhöhe, geographische Länge und Meridianrichtung bekannt waren. Die mittleren Oerter der zur Beobachtung brauchbaren Sterne konnten aus der Beilage zum Berliner Astron. Jahrbuch „Mittlere und scheinbare Oerter für das Jahr 1881 von 539 Sternen etc.“, Berlin 1881 für den genannten Pfeiler bestimmt werden.

Nach dem Anhang zur Abhandlung über die „Bestimmung des geographischen Längenunterschiedes zwischen Leipzig und München“ von Bauernfeind und Bruhns wurden für den benützten Beobachtungspfeiler P_4 am K. Polytechnikum im Jahre 1873 folgende geographische Positionen ermittelt: die Polhöhe $\varphi_4 = 48^0\ 9'\ 0{,}30''$ und die geographische Länge $\lambda_4 = 29^0\ 13'\ 57{,}53''$; der Längenunterschied zwischen P_4 und der Kuppel der Sternwarte in Bogenhausen wurde trigonometrisch bestimmt.

Nachdem der der geodätischen Sammlung der K. Technischen Hochschule zu München angehörige Boxchronometer mit Hilfe des nautischen

Jahrbuchs für 1881 auf richtige Sternzeit gestellt war, hatte man alles zur Beobachtung vorbereitet, welche folgenden Gang nahm:

Es wurde das jeweils zu untersuchende Instrument auf dem Beobachtungspfeiler P_4 horizontal aufgestellt, das Fernrohr auf die an einem ungefähr 200 m entfernten Hause angebrachte Meridianmarke eingestellt und an den beiden Mikroskopen, bezw. Nonien des Horizontalkreises abgelesen, um die Meridianrichtung auch bei Nacht, wenn die Marke nicht mehr sichtbar war, einstellen zu können. Nach Eintritt der Dunkelheit wurde dann am Höhenkreis die Zenithdistanz des zunächst zur Kulmination gelangenden Sternes eingestellt. Der bewegliche Doppelfaden des Okularmikrometers (das für diese Beobachtungen um 90^0 gedreht werden musste, damit der sonst horizontal stehende bewegliche Faden eine vertikale Stellung einnahm) stand hiebei an demjenigen Rande des Gesichtsfeldes, von welchem aus der Eintritt des zu erwartenden Sternes in dasselbe erfolgte, und zwar blieb, mit Ausnahme einer einzigen Beobachtungsreihe, die Trommel stets auf Null gestellt. War der Stern eingetreten, so wurde die Zeit beobachtet, zu welcher derselbe jedesmal die beiden Fäden des beweglichen Doppelfadens deckte, der letztere nach erfolgter zweiter Ablesung rasch um eine oder (bei Sternen mit kleinerer Deklination) mehrere Umdrehungen weiter geführt und die beiden Zeitpunkte der Coincidenz abermals notiert. So wurde für jeden beobachteten Stern die Anzahl von Sekunden gemessen, welche er brauchte, um im Gesichtsfeld des Fernrohrs einen Weg gleich einer Umdrehung des Okularmikrometers zurückzulegen. Multiplizierte man diesen Wert x mit dem Cosinus des Deklination δ des jeweils beobachteten Sternes, sowie mit der Zahl 15 (wegen 1 sec. = 15''), so wurde der zugehörige Schraubenwert für jeden einzelnen Fall in Bogensekunden gefunden.

In den Beobachtungsheften Nr 4 und Nr 6 sind diese Beobachtungen, samt den Reduktionen und Genauigkeitsbestimmungen vollständig (als Anhang) enthalten und ergab sich nach den dortigen Berechnungen

für Instr. Nr I: 1 rev. = 121,147'' $\pm$ 0,167''
„ „ „ II: 1 „ = 120,178'' $\pm$ 0,125''

Endlich ist in Betreff der beiden Instrumente noch zu erwähnen, dass jedes derselben zur Beseitigung, beziehungsweise Bestimmung eines

vorhandenen Indexfehlers, oder besser ausgedrückt, zur Bestimmung der Neigung des Mikroskopträgers, in fester Verbindung mit diesem letzteren eine Libelle trägt, und dass ausserdem zur Bestimmung einer etwaigen Neigung sowohl der Alhidadenaxe als auch der horizontalen Drehaxe auf der letzteren gleichfalls eine Röhrenlibelle angebracht ist, welche jedoch nach Belieben aufgesetzt oder heruntergenommen werden kann.

Die Teilwerte dieser Libellen wurden seitens des Lingke'schen Instituts wie folgt, gefunden:

Instrument Nr I: Libelle am Mikroskopträger 1 p = 2,10″
„ auf der Drehaxe 1 p = 1,61″
Instrument Nr II: Libelle am Mikroskopträger 1 p = 4,22″
„ auf der Drehaxe 1 p = 4,22″

Eine nachträglich angestellte Kontrolmessung ergab die vollständige Richtigkeit der vorstehenden Werte.

Auf jeder der drei Stationen waren als Signalapparate je zwei Heliotrope, eine Magnesiumlampe und zwei grosse Reflektoren in Verwendung. Die Heliotrope waren der Mehrzahl nach Bertram'sche, nur zwischen Höhensteig und Irschenberg kamen Steinheil'sche zur Verwendung. Da die geodätische Sammlung der K. technischen Hochschule nur zwei Bertram'sche und zwei Steinheil'sche Heliotrope besitzt, wurden noch zwei Bertram'sche durch Herrn Professor Dr Schmidt aus der Sammlung der K. Sächsischen Bergakademie in Freiberg mitgebracht. Die Magnesiumlampen dienten dazu, die Visierrichtung bei bedecktem Himmel deutlich zu markieren und wurden Signale mit denselben stets zu vorher verabredeten Zeiten abgegeben (für die Richtung: „links" auf jeder Station 5 und 10 Minuten, „rechts" 15 und 20 Minuten nach Beginn einer neuen halben Stunde).

Für die Beobachtungen bei Nacht dienten als Signale die schon in der Ersten Mitteilung, S. 45 und 46 beschriebenen Reflektoren von Kolb in Nürnberg, zu welchen noch zwei Stück neu angeschafft werden mussten, weil für jede Station zwei nötig und nur vier vorhanden waren. Als nicht uninteressant ist hier noch zu bemerken, dass bei bedecktem Himmel und sonst ruhiger Luft diese Lampen mit dem Fernrohr ganz bequem auch zu jeder Tageszeit gesehen werden konnten, so dass häufig das Signalisieren mit Magnesiumlicht überflüssig wurde.

Zur Bestimmung des Druckes, der Temperatur und der Feuchtigkeit der Luft dienten auf jeder Station ein Quecksilber- und ein Aneroidbarometer, ein Lufttthermometer und ein August'scher Psychrometer, sämtliche Instrumente der geodätischen Sammlung entnommen. Die Barometer waren auf die einzelnen Stationen, wie folgt, verteilt:

Kampenwand: Quecksilberbarometer von Greiner Nr 517
Aneroidbarometer Nr 50700

Irschenberg: Quecksilberbarometer von Greiner Nr 518
Aneroidbarometer Nr 38262

Höhensteig: Quecksilberbarometer von Rath Nr 2
Aneroidbarometer Nr 38255

Die sämtlichen Quecksilberbarometer wurden nach Beendigung der Beobachtungen mit dem Normalbarometer der K. Meteorologischen Zentralstation in München verglichen und kommen laut Mitteilung derselben den einzelnen Barometern folgende Korrektionen zu:

Quecksilberbarometer von Greiner, Nr 517: c = 0,00
„ „ „ Greiner, Nr 518: c = — 1,00 mm
„ „ „ Rath, Nr 2: c = — 0,20 mm

Diese Werte stimmen vollständig überein mit denjenigen, welche sich bei der am 12. August 1881 vor der Abreise angestellten Vergleichung der drei Quecksilberbarometer unter einander ergeben haben und sich im Beobachtungsheftchen Nr III, S. 3 aufgezeichnet finden.

Die Beleuchtung des Innenraumes der Beobachtungshütten bei Nacht geschah durch Petroleum-Hängelampen, die so angebracht wurden, dass sie gleichzeitig auch das Fadenkreuz in erwünschter Weise beleuchteten. Bei dem Ertel'schen Höhenkreis geschah das mittelst eines Illuminateurs centrisch vom Objektiv aus, bei den beiden Lingke'schen Universalinstrumenten dagegen durch eine seitlich angebrachte, bei Tag verschliessbare Oeffnung im Fernrohr.

Endlich mussten zu den Ablesungen am Okularmikrometer, sowie an den beiden Mikroskopen des Höhenkreises und an den Libellen stets kleine Handlaternen verwendet werden, um die Teilungen deutlich sichtbar zu machen.

3. Die Beobachter und ihre Leistungen.

Die Beobachtungen selbst nahmen am Dienstag, den 16. August morgens 6 Uhr ihren Anfang und wurden, soferne dies die Witterung zuliess, Tag und Nacht ununterbrochen bis Samstag, den 27. August, mittags 12 Uhr fortgesetzt, den dazwischen liegenden Sonntag ausgenommen. Die Beobachter wechselten auf den Stationen Höhensteig und Irschenberg in Zwischenräumen von acht Stunden, und zwar um 6 Uhr morgens, 2 Uhr mittags und 10 Uhr nachts, auf der Kampenwand dagegen, wo der Gutsherr von Hohenaschau, Reichsrat Freiherr v. Cramer-Klett, nicht bloss die Beobachtungshütte auf seine Kosten bauen liess, sondern auch die unentgeltliche Benützung seines dortigen massiven Gebäudes als Logierhaus für die Beobachter gestattete, waren in Folge der örtlichen Verhältnisse nur sechsstündige Arbeitsschichten eingeführt, welche in den Zeitpunkten 6 Uhr morgens und abends, 12 Uhr mittags und nachts ihre Begrenzungen fanden. Es musste also jede Station doppelt besetzt werden und es wurde daher, um dies möglich zu machen, das ständige Personal durch fünf Studierende der Ingenieur-Abteilung der technischen Hochschule ergänzt, welche wie die übrigen Gehilfen durch Probemessungen zwischen München und Dachau auf das bei den definitiven Beobachtungen einzuhaltende Verfahren gründlich eingeübt worden waren.

Auf die einzelnen Stationen war das gesamte Personal in nachfolgender Weise verteilt:

Station Kampenwand:

Vorstand: Professor Dr Schmidt,

Gehilfen: die Studierenden Brix und Kuntzen und der Markscheider Heinze;

Station Irschenberg:

Vorstand: Privatdozent Dr Decher,

Gehilfen: die Studierenden Lamprecht und Spöttle, der Hilfsrechner Hesselbarth;

Station Höhensteig:

Vorstand: Professor Dr Haid,

Gehilfen: Assistent Oertel, Studierender Bertel und der Mechaniker Mösl.

Der hier berichtende Leiter der Gesamtexpedition, Professor Direktor Dr v. Bauernfeind, hatte sein Hauptquartier in Hohenaschau, wo er tägliche Berichte von den Stationen empfing und diese selbst wiederholt besuchte, um sich von dem regelmässigen Vollzuge seiner Anordnungen zu überzeugen.

Die erhaltenen Beobachtungsdaten finden sich sämtlich aufgezeichnet in den bei den Akten der Königl. Gradmessungskommission verwahrten und zur Einsicht für Sachverständige bereitliegenden Beobachtungsheften I bis III und 1 bis 6. Davon enthalten die Hefte I bis III die sämtlichen Ablesungen an beiden Barometern, am Psychrometer und Thermometer mit den dazu gehörigen Zeiten und meteorologischen Notizen für jede Station. Die zur Messung der Zenithdistanzen gemachten Ablesungen dagegen sind in den Heften Nr 1 bis Nr 6 enthalten, wobei, wie auch schon früher, notiert wurde:

Die bürgerliche Zeit nach Stunden und Minuten (der Einfachheit halber wurde auf jeder Station am Anfang der halben und ganzen Stunden mit den Beobachtungen begonnen);

der Zielpunkt und die Lage des Fernrohrs, sowie die Beschaffenheit der Signalisierung;

die Ablesungen am Okularmikrometer für sechsmalige Einstellung desselben;

der Stand der Blasenenden der Libelle am Mikroskopträger vor und nach der Ablesung der beiden Mikroskope;

die am Nonius oder Index des Höhenkreises abgelesene Gradzahl;

die Ablesung der beiden Mikroskope für doppelte Einstellung auf den dem Nullpunkt des Rechens vorausgehenden, sowie auf den demselben nachfolgenden Teilstrich des Limbus; endlich

die Stände der Blasenenden der Libelle auf der horizontalen Axe des Fernrohrs.

Diese sämtlichen Einstellungen und Ablesungen waren für jeden der beiden Zielpunkte einer Station in beiden Lagen des Fernrohrs, im Ganzen also im Zeitraum einer halben Stunde viermal auszuführen.

Der Stand des Okularmikrometers war gewöhnlich für beide Lagen des Fernrohrs, wenn auch nicht stark, doch etwas verschieden. Zur Reduktion auf gleiche Excentricität der Visierlinie wurde stets, wie auch schon früher, aus den 6 Ablesungen an der Trommel des Okularmikrometers das Mittel gerechnet und die Differenz beider Mittel mit ihrem Vorzeichen, nachdem sie durch Multiplikation mit dem jeweiligen Schraubenwert des Okularmikrometers (vgl. S. 14) im Gradmass ausgedrückt worden war, an den Mikroskoplesungen in Lage II des Fernrohrs als Korrektion angebracht. Das Vorzeigen dieser Korrektion gegenüber demjenigen der okularmikrometrischen Differenz wurde auf folgende Weise bestimmt:

Für die Instrumente in Höhensteig und Kampenwand (Ertel'scher Höhenkreis und Lingke'sches Universalinstrument Nr II) ist, wenn Z die Zenithdistanz, a_1 und a_2 die Ablesungen am Höhenkreis, endlich d_1 und d_2 die Mittel der Okularmikrometerstände in beiden Fernrohrlagen bedeuten und δ den absoluten Unterschied $d_1 - d_2$ bezeichnet:

$$2Z = 360^0 + (a_2 - d_2) - (a_1 - d_1) = 360^0 + (a_2 + \delta) - a_1$$

Für das in Irschenberg verwendete Lingke'sche Universalinstrument Nr I dagegen ist unter den gleichen Voraussetzungen

$$2Z = 360^0 + (a_2 + d_2) - (a_1 + d_1) = 360^0 + (a_2 - \delta) - a_1$$

Es geht also hieraus hervor, dass für die Beobachtungen in Höhensteig und Kampenwand das Vorzeichen der Korrektion für ungleiche Excentricität der Visierlinie in beiden Fernrohrlagen dem Vorzeichen der Differenz der Mikrometerlesungen in Fernrohrlage II minus Fernrohrlage I entgegengesetzt, für die Beobachtungen in Irschenberg dagegen diesem gleich zu nehmen war.

Eine weitere Korrektion war an den Mikroskoplesungen anzubringen für die Neigung des Mikroskopträgers gegen den Horizont. Dieselbe wurde gemessen durch die schon früher besprochene, mit dem Mikroskopträger verbundene Röhrenlibelle. Bei dem Ertel'schen Höhenkreis ist diese Libelle von der Mitte aus nach beiden Enden hin geteilt, hier musste also bei

der Ablesung des Libellenstandes für jede Fernrohrlage ein Okular-Ende und ein Objektiv-Ende der Blase unterschieden werden, um später aus den Aufschreibungen ersehen zu können, nach welcher Seite hin der Libellenausschlag erfolgte.

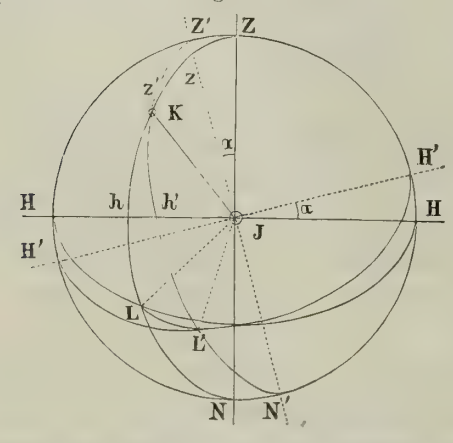
Nach Seite 67 und 68 der „Ersten Mitteilung“ ist für Kreis links (Lage I) die Korrektion $\pm$, je nachdem die Ablesung am Okular-Ende $\gtrless$ war als die am Objektiv-Ende, und für Kreis rechts (Lage II) $\pm$, wenn die Ablesung am Okular-Ende $\lessgtr$ war als die am Objektiv-Ende.

Einfacher ergab sich das Vorzeigen dieser Korrektion bei den beiden Lingke'schen Instrumenten. Die Teilung und Bezifferung der Libelle beginnt hier am Objektiv-Ende und läuft durch bis zum entgegengesetzten Okular-Ende. Da auf diese Länge 40 Teile gehen, so spielt die Libelle ein, wenn die Blasenmitte auf 20 steht. Bezeichnet man daher mit a den Stand der Libellenblasenmitte (Mittel aus den Ablesungen der Blasen-Enden), also den Ausschlag, so ergibt sich für beide Instrumente die Korrektion c aus

$$c = -(a - 20)\,t,$$

worin t den auf S. 15 angegebenen Teilwert der Libelle vorstellt. (Für den Ertel'schen Höhenkreis ist nach S. 32 der „Ersten Mitteilung“ $1^p = 2{,}32''$.)

Fig. 3.



Endlich ist noch zu untersuchen, ob wegen schiefer Drehaxe eine Korrektur nötig wird. Gemessen wurde die Abweichung der Drehaxe von der horizontalen Lage durch den Ausschlag der auf ihr stehenden Libelle.

Steht das Instrument in I vollständig richtig und ist HZHN der Meridian durch I, so ist der Horizont HH und der Zenith in Z. Ist jedoch die Drehaxe um den Winkel α geneigt, so verschieben sich auch Horizont und Zenith um den Winkel α, so dass also H'H' zum Horizont und Z' zum Zenith wird. Für eine Visur von I nach K wäre also die wahre Zenithdistanz, wenn man durch Z und K, sowie durch Z' und K

die grössten Kreise legt, ZK = z, während in Folge der geneigten Axe z' = Z'K gemessen wird. Schneiden die oben erwähnten grössten Kreise den Horizont in L und L' und sind die zu z und z' gehörigen Höhenwinkel h und h', so ist aus Dreieck LKL'

$$\sin h = \sin h' \cdot \cos \alpha$$

Der Winkel α wurde durch den Libellenausschlag bestimmt. Eine Durchsicht der Beobachtungshefte zeigt, dass dieser Ausschlag bei den auf Station Kampenwand angestellten Beobachtungen, (wo die Libelle den grössten Teilwert p = 4,22'' besitzt) in maximo 8p beträgt, was also einem Neigungswinkel von ungefähr 35'' entspricht. Da aber für alle Winkel zwischen 0^0 0' 0'' und 0^0 15' (für fünfstellige Logarithmen) die Funktion $\cos \alpha = 1$ gesetzt werden kann, wird eine Korrektion wegen schiefer Drehaxe um so weniger nötig, als die Instrumente in H und I empfindlichere Aufsatzlibelle (p = 1,6'') besitzen und die Maximalausschläge keine grösseren als in K waren.

Die beobachteten Refraktionen sind bekanntlich die Unterschiede der beobachteten Zenithdistanzen gegen die wahren. Die letzteren sind für die drei Seiten und Ecken unseres Beobachtungsdreiecks auf S. 10 zusammengestellt und die beobachteten Zenithdistanzen wurden sofort in den Beobachtungsheften Nr 1 bis Nr 6 berechnet, so dass es nur mehr einer einfachen Subtraktion bedurfte, um die „beobachteten Refraktionen" zu finden. Für die einzelnen Stationen und Seiten des Dreiecks HIK finden sich die Werte derselben unter der Rubrik „Beob.-Refr. $\triangle z_0$" in den Heften Nr 13 bis 18.

B. Berechnung der Refraktionen und der Höhenunterschiede aus den meteorologischen Elementen.

I. Die Konstanten für diese Berechnungen.

Die Berechnung der für jede einzelne Beobachtung, d. h. für gewisse gegebene meteorologische Werte gleich bleibenden und somit als konstant bezeichneten Werte, geschah wie früher mit Benützung der von mir in meiner Abhandlung über die astronomische Strahlenbrechung (Bd. 62 der Astronomischen Nachrichten) angeführten Daten. Hiernach

gelten für die Breite von Königsberg $\varphi_0 = 54^0\ 52'\ 50''$, die Temperatur $t_0 = 9{,}31^0$ C und den Luftdruck $\beta = 751{,}71$ mm folgende Werte:

$$\alpha_0 = 0{,}00027895;\quad \lg\ \alpha_0 = 6{,}4455264$$
$$m_0 = 0{,}007464;\quad \lg\ m_0 = 7{,}8729716$$
$$v_0 = 0{,}186865;\quad \lg\ v_0 = 9{,}2715280$$

Ferner finden sich aus meiner in Band 67 S. 71 der eben erwähnten Zeitschrift erschienenen Abhandlung über „terrestrische Strahlenbrechung" mittelst der dort berechneten Tafel die Werte m_0 für die auf Seite 6 zusammengestellten Polhöhen der drei Stationen und zwar für Station

$$H:\ \varphi = 47^0\ 52'\ 0{,}27'';\ \text{hiemit}\ m_0 = 0{,}007603$$
$$I:\ \varphi = 47^0\ 49'\ 47{,}41'';\ \text{„}\ m_0 = 0{,}007604$$
$$K:\ \varphi = 47^0\ 45'\ 17{,}95'';\ \text{„}\ m_0 = 0{,}007605$$

Diese Werte von m_0 sind noch auf die Meereshöhe von Königsberg $= 0$ bezogen und müssen daher erst auf die Meereshöhen der betreffenden Stationen reduziert werden.

Nun ist aber, wenn h_0 die Atmosphärenhöhe bedeutet:

$$m_0 = \frac{h_0}{r_0}\ (r_0 = \text{Meridiankrümmungshalbmesser})$$

und wenn h die Meereshöhe der Station ist:

$$m_0' = \frac{h_0 - h}{r_0 + h} = \frac{h_0}{r_0 + h} - \frac{h}{r_0 + h} = m_0 - \frac{h}{r_0}$$

mit ausreichender Genauigkeit.

Damit wird für Station

$$H:\ m_0' = 0{,}007603 - 0{,}000075 = 0{,}007528$$
$$I:\ m_0' = 0{,}007604 - 0{,}000118 = 0{,}007486$$
$$K:\ m_0' = 0{,}007605 - 0{,}000246 = 0{,}007359$$

somit für

$$H:\ \lg\ m_0' = 7{,}8766796$$
$$I:\ \lg\ m_0' = 7{,}8742498$$
$$K:\ \lg\ m_0' = 7{,}8668188$$

Mit den Werten von m_0' ergeben sich noch aus

$$v_0' = \frac{5\,\alpha_0}{m_0'},$$

jene von v_0'. Es fand sich für Station

H: $v_0' = 0{,}185275$; $\lg v_0' = 9{,}2678168$
I: $v_0' = 0{,}186315$; $\lg v_0' = 9{,}2702466$
K: $v_0' = 0{,}189530$; $\lg v_0' = 9{,}2776776$

Für eine beliebige (absolute) Temperatur Θ ($= 272{,}8^0\,\mathrm{C} + \tau$) und einen beliebigen Luftdruck β finden sich die Refraktionskonstanten α, m und v endlich aus

$$\alpha = \frac{1+\varepsilon\tau_0}{1+\varepsilon\tau}\,\frac{\beta}{\beta_0}\;\; d_0 = \frac{\Theta_0\,\beta}{\Theta\cdot\beta_0}\;\; \alpha_0 = \varrho\cdot\alpha_0$$

$$m = \frac{1+\varepsilon\tau}{1+\varepsilon\tau_0}\,\frac{\beta_0}{\beta}\,m_0' = \frac{\Theta\cdot\beta_0}{\Theta_0\cdot\beta}\,m_0 = \frac{m_0'}{\varrho}$$

$$v = \frac{5\,\alpha}{m} = \left(\frac{(1+\varepsilon\tau_0)\beta}{(1+\varepsilon\tau)\beta^0}\right)^2\cdot\frac{5\,\alpha_0}{m_0'}$$

$$= \left(\frac{\Theta^0\,\beta}{\Theta\,\beta_0}\right)^2\cdot v_0' = \varrho^2\cdot v_0'$$

worin ε den Ausdehnungskoeffizienten der Luft ($= 0{,}003665$ für 1^0 C), Θ_0 $272{,}8^0 + \tau_0 = 272{,}8^0 + 9{,}31^0 = 282{,}11^0$ C und ϱ das Verhältnis der Dichtigkeiten der Luft für den normalen und einen beliebigen Luftdruck, sowie desgleichen Temperatur bedeuten. Es ist daher

$$\varrho = \frac{\Theta_0\,\beta}{\Theta\cdot\beta_0} = \frac{\beta}{\Theta}\cdot\frac{282{,}11}{751{,}71} = [9{,}57437]\,\frac{\beta}{\Theta},$$

wenn die eingeklammerte Zahl den Logarithmus von $\frac{\Theta_0}{\beta_0}$ darstellt.

Damit erhalten wir endlich die Werte der Refraktionskonstanten m und v für die drei Stationen und für beliebige Werte von Θ und β, oder da die Zahlenwerte der Faktoren keine Bedeutung haben, gleich die Logarithmen der jeweiligen Werte von m und v, wie folgt:

Station H: $\lg m = 8{,}30232 - \lg\frac{\beta}{\Theta}$

$$\lg v = 8{,}41654 + 2\lg\frac{\beta}{\Theta}$$

$$\text{Station I:}\quad \lg m = 8{,}29989 - \lg \frac{\beta}{\Theta}$$

$$\lg v = 8{,}41897 + 2 \lg \frac{\beta}{\Theta}$$

$$\text{Station K:}\quad \lg m = 8{,}29246 - \lg \frac{\beta}{\Theta}$$

$$\lg v = 8{,}42640 + 2 \lg \frac{\beta}{\Theta}$$

2. Die Formeln zur Berechnung der theoretischen Refraktionswerte.

Die strenge Formel hiefür ist nach meiner Abhandlung über die terrestrische Strahlenbrechung (Band 67, S. 60 und 61 der Astronomischen Nachrichten):

$$r = v\varphi \left[1 - 2y + \left(2 + \frac{p}{3}\right) y^2 - \left(1 + \frac{p}{2} - p_1 + \frac{p^2}{3}\right) y^3 + \ldots .\right]$$

und es haben in dieser Formel die einzelnen Zeichen folgende Bedeutung:

$y = \frac{x}{m r_1}$; x = Höhenunterschied beider Stationen, m = Refraktionskonstante, r_1 = Normale der Beobachtungsseite

$p_0 = \frac{\cot z}{m} = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{m}$; z = beobachtete Zenithdistanz, $\varepsilon = z - 90^0$

$$p = \frac{m(\cos^2 z + 1 - v)}{\cos^2 z} = \frac{m(\sin^2 \varepsilon + 1 - v)}{\sin^2 \varepsilon}$$

$$p_1 = \frac{2 m v}{3 \cos^2 z} = \frac{2 m v}{3 \sin^2 \varepsilon}$$

φ = Centriwinkel zwischen zwei Stationen im Gradmass.

Auf Seite 80 und 81 der Ersten Mitteilung ist bewiesen, dass für den damaligen geringen Höhenunterschied der beiden Beobachtungs-Stationen mit ausreichender Genauigkeit gesetzt werden konnte

$$r = v\varphi$$

hier gilt diese Annahme nicht mehr, wie die Berechnung eines besonderen Falles zeigt; es muss somit jetzt in der Annäherung an die strenge Formel

weiter gegangen werden als früher. Als Beispiel wählen wir die am 22. August, mittags 12 Uhr auf der Kampenwand gemachten Beobachtungen. Die gemessene scheinbare Zenithdistanz von Höhensteig war damals $z = 93^0\ 6'\ 24{,}0''$ und folglich der Unterschied gegen $90^0 = \varepsilon = 3^0\ 6'\ 24{,}0''$. Ausserdem wurden zu jener Zeit beobachtet der Barometerstand $\beta = 633{,}9$ mm und die absolute Temperatur $\Theta = 288{,}2^0$ C.

Für die Seite HK ist der Centriwinkel $C = \varphi = 660{,}79''$ ($\lg \varphi = 2{,}82006$) und für die Station K:

$$\lg m = 8{,}29246 - \lg \frac{\beta}{\Theta} = 7{,}95013$$

$$\lg v = 8{,}42640 + 2 \lg \frac{\beta}{\Theta} = 9{,}11106$$

Nach der Formel $r = v\varphi$ würde damit $\lg r = 1{,}93112$ und $r = 85{,}33''$ erhalten werden; berechnet man dagegen r aus der vollständigen Formel

$$r = v\varphi \left[1 - 2y + \left(2 + \frac{p}{3}\right) y^2 - \left(1 + \frac{p}{2} - p_1 + \frac{p^2}{3}\right) y^3 + \ldots\right]$$

so findet sich zunächst

$$y = \frac{x}{m r_1} = \frac{-1080{,}331}{m r_1} = -0{,}01898$$

Ferner erhält man die Grösse p aus

$$p = \frac{m (\sin^2 \varepsilon + 1 - v)}{\sin^2 \varepsilon} = 2{,}6530$$

daher den Faktor von y^2 und das dritte Glied selbst

$$\left(2 + \frac{p}{3}\right) = 2{,}8843 \text{ und } \left(2 + \frac{p}{3}\right) y^2 = 0{,}00104$$

Das mit y^3 multiplizierte Glied unseres Ausdrucks für r äussert auf dessen Wert keinen merkbaren Einfluss mehr und wir erhalten somit für die Refraktion in K nach H hin:

$$r = v\varphi\ (1 + 0{,}03796 + 0{,}00104) = 88{,}67''$$

Es ist also die Refraktion r aus dem vollständigen Ausdruck um $3{,}34''$ grösser gefunden worden als aus der einfachen Formel $r = v\varphi$, womit unsere Behauptung, dass die Berechnung der theoretischen Refraktionen nach der vollständigen Formel durchgeführt werden muss,

bewiesen ist. Wollte man jedoch ausser m und v auch noch die Werte p und y für jede einzelne Beobachtung bestimmen, so würde dies eine sehr umständliche und zeitraubende Arbeit verursachen. Eine einfache Betrachtung zeigt aber, dass eine bedeutende Vereinfachung des obigen Rechnungsverfahrens möglich ist, ohne die Genauigkeit in r zu vermindern. Untersucht man nämlich zu diesem Zwecke die einzelnen Glieder des Ausdrucks für r, soweit sie überhaupt in Betracht kommen, und zwar zunächst das Glied

$$1 - 2y = 1 - \frac{2x}{mr_1}$$

so ist hierin allein m veränderlich. Es ist demnach weiter zu untersuchen, ob für die extremsten Werte von m die Aenderungen in y so klein sind, dass dieselben einem Mittelwert gegenüber vernachlässigt werden können. In diesem Falle könnte nämlich, da die Aenderung in m bedingt ist durch die in lg $(\beta : \Theta)$, mit dem leicht zu findenden arithmetischen Mittelwerte von lg $(\beta : \Theta)$ auch der von m und damit der von y erhalten werden.

Nach Heft Nr 13 sind nun die extremsten Werte von lg $(\beta : \Theta)$ für Kampenwand-Höhensteig folgende:

Am 19. Aug. 5^h Vm: $\lg \frac{\beta}{\Theta} = 0{,}35677$; $\lg m_1 = 7{,}93569$

„ 26. „ $5\frac{1}{2}{}^h$ Nm: $\lg \frac{\beta}{\Theta} = 0{,}33187$; $\lg m_2 = 7{,}96059$

Mit diesen Werten von lg m findet sich entprechend:

$$y_1 = -0{,}01963$$
$$y_2 = -0{,}01854$$

also auch:

$$(1 - 2y_1) = 1{,}03926$$
$$(1 - 2y_2) = 1{,}03708$$

Nimmt man, wie auf S. 25 (oben) erhalten, $v\varphi = 85{,}33''$ an, so wird die für die beiden Werte $v\varphi$ $(1 - 2y)$ erhaltene Verschiedenheit der Produkte zeigen, ob die angestrebte Vereinfachung eine erlaubte ist oder nicht. Man erhält:

$$r_1 = 1{,}03926 \cdot 85{,}33'' = 88{,}68''$$
$$r_2 = 1{,}03708 \cdot 85{,}33'' = 88{,}50''$$

Zeigen schon die Resultate, wie sie für die extremsten Werte von lg $(\beta : \Theta)$, also auch für die extremsten Werte von m und y erhalten wurden, untereinander nur 0,18" Differenz, so wird diese Differenz noch auf die Hälfte reduziert, wenn wir aus dem Mittelwert von $(\beta : \Theta)$ jenen von y berechnen und damit r bestimmen, denn der grösste Fehler ist alsdann 0,1", ein Betrag, der hier überhaupt die Genauigkeitsgrenze bilden dürfte.

Das nächst veränderliche Glied unserer Reihe ist $(2 + \frac{1}{3} p)\ y^2$ und zwar kann hierin, da y^2 noch sicherer als konstant betrachtet werden kann als y (weil $y < 1$), nur der Ausdruck p als Veränderliche gelten. Nun ist

$$p = \frac{m\,(\sin^2 \varepsilon + 1 - r)}{\sin^2 \varepsilon},$$

worin veränderlich sind m, v und ε. Es ist also zu untersuchen, ob eine merkbare Aenderung in dem Werte von r eintritt, wenn diese drei Grössen gleichzeitig so ausfallen, dass p zu einem Maximum oder Minimum wird, also für den denkbar ungünstigsten Fall, der in Wirklichkeit eigentlich gar nicht vorkommt. Die extremsten Werte von lg $(\beta : \Theta)$ sind schon oben (S. 26) angeführt, nämlich

$\lg \left(\frac{\beta}{\Theta}\right)_{max}$	$= 0{,}35671$ und damit wird	$\lg \left(\frac{\beta}{\Theta}\right)_{min}$	$= 0{,}33187$
$\lg m_{min}$	$= 7{,}93569$	$\lg m_{max}$	$= 7{,}96059$
$\lg v_{max}$	$= 9{,}13994$	$\lg v_{min}$	$= 9{,}09014$
v_{max}	$= 0{,}13802$	v_{min}	$= 0{,}12307$
$(1 - v)_{min}$	$= 0{,}86198$	$(1 - v)_{max}$	$= 0{,}87693$

Der Ausdruck für p wird aber ein Maximum oder Minimum, je nachdem m und v aus min lg $(\beta : \Theta)$ oder max lg $(\beta : \Theta)$ bestimmt werden, weil wir entsprechend max m und max $(1 - v)$, bezw. min m, min $(1 - v)$ erhalten; p wird ferner ein Maximum oder Minimum, je nachdem ε_{min} oder ε_{max} in den obigen Ausdruck eingesetzt wird, und wir haben also folgende Extreme zusammenzustellen:

Für p_{max}: $\lg \left(\frac{\beta}{\Theta}\right)_{min}$ und ε_{min}

„ p_{min}: $\lg \left(\frac{\beta}{\Theta}\right)_{max}$ und ε_{max}

Der grösste und kleinste Wert von ε findet sich aber aus dem Beobachtungsheft Nr 13 wie folgt:

$$\varepsilon_{min} = 3^0\ 6'\ 8{,}5''\ \text{(am 26. Aug. } 12\tfrac{1}{2}^h \text{ Mgs.)}$$
$$\varepsilon_{max} = 3^0\ 6'\ 29{,}3''\ \text{(am 22. Aug. } 4\tfrac{1}{2}^h \text{ Nm.)}$$

Damit erhalten wir

$$\max\ p = 2{,}7433$$
$$\min\ p = 2{,}5370$$

und hiemit für y die entsprechenden Werte (y_{max} und y_{min}) eingesetzt:

$$\max\ (2 + \tfrac{1}{3}p)\ y^2 = 0{,}00105$$
$$\min\ (2 + \tfrac{1}{3}p)\ y^2 = 0{,}00103$$

Die zweiten Glieder unseres Ausdruckes für r zeigen also geringe Differenzen erst in der fünften Stelle, so dass auch hier die Berechnung aus den Mittelwerten von m, v und ε durchgeführt werden kann, ohne dass die Genauigkeit Schaden leidet.

Wir kommen nun zu dem dritten Gliede unserer Formel:

$$\left(1 + \frac{p}{2} - p_1 + \frac{p^2}{3}\right) y^3$$

Dieses Glied äussert nach einer früheren Bemerkung auf das Endresultat gar keinen Einfluss mehr, denn der Wert von y^3 zeigt selbst für den grössten Höhenunterschied zwischen Höhensteig und Kampenwand fünf Nullen nach dem Komma, kann also für jeden einzelnen Fall $= 0$ gesetzt werden, womit auch der eingeklammerte Faktor, dessen numerischer Wert ohnedies gering ist, bedeutungslos wird.

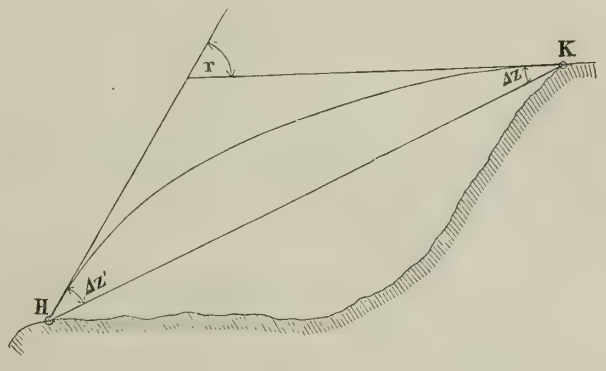
Die gleichen Untersuchungen wie für die Seite Kampenwand-Höhensteig wurden für die übrigen Seiten des Dreiecks HIK angestellt und es ergab sich allenthalben, dass die beabsichtigte Näherungsberechnung die Werte von r mit vollkommen genügender Genauigkeit liefert.

Nachdem für jede Seite und Beobachtungsstation die Mittelwerte von lg $(\beta : \Theta)$ bestimmt worden waren, fanden sich für die Berechnung der theoretischen Refraktionen folgende Ausdrücke (in welchen die eingeklammerten Zahlen Logarithmen bedeuten):

Seite KH:	$r = 1{,}03928\ v\varphi = [0{,}01673]\ v\varphi$	$\lg\left(\frac{\beta}{\Theta}\right) = 0{,}34538$
„ HK:	$r = 0{,}95974\ v\varphi = [9{,}98215]\ v\varphi$	$= 0{,}39066$
„ KI:	$r = 1{,}02986\ v\varphi = [0{,}02278]\ v\varphi$	$= 0{,}34489$
„ IK:	$r = 0{,}97137\ v\varphi = [9{,}98738]\ v\varphi$	$= 0{,}37624$
„ IH:	$r = 1{,}01035\ v\varphi = [0{,}00447]\ v\varphi$	$= 0{,}37686$
„ HI:	$r = 0{,}99002\ v\varphi = [9{,}99564]\ v\varphi$	$= 0{,}39060$

Wäre der Höhenunterschied der Beobachtungsstationen, wie für die früheren Beobachtungen zwischen Döbra und Kapellenberg ein sehr geringer, so könnte man voraussetzen, dass die Winkel $\triangle z$ und $\triangle z'$ (vgl. nebenstehende Figur), welche die Sehne des Lichtbogens, z. B. von K nach H mit den Tangenten desselben in K und H bildet, unter sich gleich gross, also $\triangle z = \triangle z' = \frac{1}{2} r$ sei, für die hier vorliegenden Höhenunterschiede ist dies nicht mehr zulässig, wohl aber kann ein konstanter Faktor ermittelt werden, der die Winkel $\triangle z$ und $\triangle z'$ aus r genügend genau zu finden gestattet, wie aus der nachfolgenden Untersuchung hervorgeht.

Fig. 4.



Nach meiner mehrerwähnten, in Band 67 der Astronomischen Nachrichten enthaltenen Abhandlung über die terrestrische Strahlenbrechung bestehen für die Winkel $\triangle z$ und $\triangle z'$ folgende Gleichungen (wobei $\triangle z$ der oberen Station entspricht):

$$\triangle z = \tfrac{1}{2} r \left(1 + \frac{2v + m(5 - 6v)}{3v} p_0 \varphi + \frac{v(p - 5) + 2m(5 - 6v)}{3v} p_0^2 \varphi^2 + \ldots\right)$$

$$\triangle z' = \tfrac{1}{2} r \left(1 - \frac{2v + m(5 - 6v)}{3v} p_0 \varphi - \frac{v(p - 5) + 2m(5 - 6v)}{3v} p_0^2 \varphi^2 + \ldots\right)$$

Um nun zu finden, ob der Einfluss der obigen Klammerausdrücke für verschiedene Werte von m, v, p_0 und p ein konstanter bleibt, soll die

Berechnung von $\triangle z$ und $\triangle z'$ für die Seite Kampenwand-Höhensteig, für welche der Höhenunterschied am grössten ist, wieder unter Benützung der extremsten Werte von lg $(\beta : \Theta)$ und ε durchgeführt werden.

Nach Seite 27 und 28 ist

$\lg m_{min}$	$= 7{,}93569$	$\lg m_{max}$	$= 7{,}96059$
$\lg v_{max}$	$= 9{,}13994$	$\lg v_{min}$	$= 9{,}09014$
v_{max}	$= 0{,}13802$	v_{min}	$= 0{,}12307$
ε_{max}	$= 3^0\ 6'\ 29{,}3''$	ε_{min}	$= 3^0\ 6'\ 8{,}5''$

Betrachten wir wieder die einzelnen Glieder der obigen Ausdrücke nach einander, so wird zunächst das zweite Glied

$$A_1 = \frac{2v + m(5 - 6v)}{3v}\, p_0\varphi = \frac{-(2v + m[5 - 6v])\ \mathrm{tg}\,\varepsilon}{3mv}\,\varphi$$

ein Maximum für max ε und min m, also wieder für max ε und max $(\beta : \Theta)$ (wobei vom Vorzeichen abgesehen ist), für den umgekehrten Fall ein Minimum; φ ist hier der Centriwinkel HK im Bogenmass und ($\lg \varphi = 7{,}50564$). Damit erhält man

$$\max A_1 = (-)\ 0{,}01521$$
$$\min A_1 = (-)\ 0{,}01468$$

Für das folgende dritte Glied der Reihe

$$A_2 = \frac{v(p - 5) + 2m(5 - 6v)}{3v}\,(p_0\varphi)^2 = \frac{(v[p - 5] + 2m[5 - 6v])\ \mathrm{tg}^2\varepsilon}{3vm^2}\,\varphi^2$$

gelten in Bezug auf Maximum und Minimum ganz die gleichen Angaben, wie oben, und es wird

$$\max A_2 = (-)\ 0{,}00026$$
$$\min A_2 = (-)\ 0{,}00020$$

$$\min \triangle z = \tfrac{1}{2} r(1 - 0{,}01521 - 0{,}00026) = \tfrac{1}{2} r \cdot 0{,}98453$$
$$\max \triangle z = \tfrac{1}{2} r(1 - 0{,}01468 - 0{,}00020) = \tfrac{1}{2} r \cdot 0{,}98512$$

Setzt man wieder, wie auf S. 25 erhalten wurde, beispielsweise $r = 88{,}6''$, so erhält man damit

$$\min \triangle z = 44{,}3'' \cdot 0{,}98453 = 43{,}61''$$
$$\max \triangle z = 44{,}3'' \cdot 0{,}98512 = 43{,}64''$$

Die extremsten Werte von $\triangle z$ stimmen also bis auf 0,03'' überein und es geht daraus hervor, dass mit weitaus genügender Genauigkeit wieder das Mittel beider genommen werden kann. Man erhält dasselbe durch Multiplikation von $\frac{1}{2}$ r mit einem Faktor, der aus der Berechnung der Ausdrücke A_1 und A_2 für die Mittelwerte von lg $(\beta : \Theta)$ und ε erhalten wird.

Die gleichen Untersuchungen für die übrigen Seiten und Stationen unseres Dreiecks haben die Zulässigkeit dieser Abkürzung in allen Fällen ergeben und finden sich demnach die Winkel $\triangle z$ und $\triangle z'$ aus nachfolgenden Gleichungen, worin die eingeklammerten Zahlen Logarithmen bedeuten und der Faktor $\frac{1}{2}$ in die Klammer gezogen ist:

Seite KH:	z	= [9,69235] . r
	z'	= [9,70549] . r
Seite HK:	z	= [9,69256] . r
	$\triangle z'$	= [9,70529] . r
Seite KI:	$\triangle z$	= [9,69400] . r
	$\triangle z'$	= [9,70389] . r
Seite IK:	$\triangle z$	= [9,69420] . r
	$\triangle z'$	= [9,70369] . r
Seite HI:	$\triangle z$	= [9,69732] . r
	$\triangle z'$	= [9,70061] . r
Seite IH:	$\triangle z$	= [9,69733] . r
	$\triangle z'$	= [9,70060] . r

Dabei ist zu bemerken, dass $\triangle z$ in allen Fällen sich auf die obere, $\triangle z'$ auf die untere Station bezieht.

Mit den vorstehenden und den sechs Formeln auf Seite 29 dieser Schrift sind die Werte der theoretischen Refraktion für jede Station, und zwar in Heft Nr 13 bis Nr 18 berechnet worden.

3. Die trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede.

Die Berechnung der trigonometrischen Höhen aus den beobachteten Zenithdistanzen geschieht nach Band 67, Seite 79 der „Astronom. Nachr." nach folgender Formel:

$$x = r_1\varphi \cot z + \frac{\cos^2 z + 1 - v}{2 \sin^2 z} r_1\varphi^2 + \frac{2v \cot z}{3m \sin^2 z} r_1\varphi^3$$

worin φ im Bogenmass ausgedrückt und das vierte mit $r_1\varphi^4$ multiplizierte Glied weggelassen ist, da eine Berechnung desselben für den ungünstigsten hier vorkommenden Fall nur einen Wert von 8 mm ergibt und eine Berechnung der Höhen genauer als auf Centimeter nicht zweckmässig erscheint. Wir werden also die Höhenunterschiede x nach der vorstehenden Formel berechnen, die sich durch Zerlegung ihres zweiten rechtseitigen Glieds in seine einzelnen Bestandteile auch so schreiben lässt:

$$x = r_1\varphi \cot z + \tfrac{1}{2} \cot^2 z\, r\varphi^2 + \frac{r_1\varphi^2}{2\sin^2 z} - \frac{r_1 v\varphi^2}{2\sin^2 z} + \frac{2v\cot z}{3m\sin^2 z} r_1\varphi^3$$

Bedenkt man, dass z in allen Fällen von 90^0 nicht sehr verschieden ist, so wird man keinen merkbaren Fehler begehen, wenn man die Werte von $\sin^2 z$ und $\cot^2 z$ als konstant betrachtet; ebenso wird durch die nachfolgende numerische Berechnung von x für einen beliebigen Fall nachgewiesen, dass auch das mit φ^3 multiplizierte Glied unseres letzten Ausdrucks für alle Werte von m und v als konstant angesehen werden kann, so dass in diesem letzten Gliede auch die Schwankungen in den Werten von m und v auf die Berechnung des Wertes x keinen Einfluss mehr ausüben.

Man hat also diese konstanten Faktoren und Glieder für jede Seite und Station unseres Beobachtungsdreiecks unter Zugrundelegung mittlerer Werte von m und v (bezw. lg $[\beta : \Theta]$) und von ε nur einmal zu berechnen. Fassen wir die im Vorstehenden als konstant bezeichneten Glieder des Ausdrucks für x zusammen, so erhalten wir

$$x = \left(\tfrac{1}{2} r_1\varphi^2 \cot^2 z + \tfrac{1}{2} r_1 \frac{\varphi^2}{\sin^2 z} + \frac{2v\cot z}{3m\sin^2 z} r_1\varphi^3\right) + (r_1\varphi)\cot z - \left(\frac{r_1\varphi^2}{2\sin^2 z}\right) v$$

oder symbolisch geschrieben und $z = 90^0 + \varepsilon$ gesetzt:

$$x = C_1 + C_2 \cdot \cot z - C_3 \cdot v = C_1 - C_2 \operatorname{tg} \varepsilon - C_3 v$$

Die Berechnung, welche unsere Behauptung bezüglich der Unabhängigkeit des letzten Gliedes der mit C_1 bezeichneten dreiteiligen Grösse von der Veränderlichkeit der Werte m und v beweisen wird, ist folgende:

Für die Seite Kampenwand-Höhensteig ist

$\lg r_1$	$= 6{,}80497$	max ε	$= 3^0\ 6'\ 29{,}3''$
$\lg \varphi$	$= 7{,}50564$	min ε	$= 3^0\ 6'\ 8{,}5''$
$\lg (r_1 \varphi)$	$= 4{,}31061$		
$\lg m_{min}$	$= 7{,}93569$	$\lg m_{max}$	$= 7{,}96059$
$\lg v_{max}$	$= 9{,}13994$	$\lg v_{min}$	$= 9{,}09014$

Zunächst handelt es sich um den Nachweis, dass der Wert der mit C_1 bezeichneten Summe

$$\tfrac{1}{2} r_1 \varphi^2 \cot^2 z + \tfrac{1}{2} r_1 \frac{\varphi^2}{\sin^2 z} + \frac{2 v \cot z}{3 m \sin^2 z} r_1 \varphi^3$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$\tfrac{1}{2} r_1 \varphi^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + \frac{r_1 \varphi^2}{2 \cos^2 \varepsilon} - \frac{2 v \operatorname{tg} \varepsilon}{3 m \cos^2 \varepsilon} r_1 \varphi^3$$

konstant ist für alle Schwankungen der m, v, z. Da dies nur möglich ist, wenn jedes der einzelnen Glieder konstant bleibt, so wollen wir Glied für Glied näher untersuchen:

Erstes Glied $(\frac{1}{2} r_1 \varphi^2 \operatorname{tang}^2 \varepsilon)$:

Dafür ist ε_{max}	$= 3^0\ 6'\ 29{,}3''$	ε_{min}	$= 3^0\ 6'\ 8{,}5''$
$\lg \operatorname{tg} \varepsilon$	$= 8{,}73481 - 10$	$\lg \operatorname{tg} \varepsilon$	$= 8{,}73400$
$\lg \operatorname{tg}^2 \varepsilon$	$= 7{,}46962 - 10$		$7{,}46800$
$\lg r_1$	$= 6{,}80497$		$6{,}80497$
$2 \lg \varphi$	$= 5{,}01128 - 10$		$5{,}01128$
	$9{,}28587 - 10$		$5{,}28425$
$\lg 2$	$= 0{,}30103$		$0{,}30103$
	$8{,}98484 = 10$		$8{,}98322$
Maximalwert	$= \mathbf{0{,}097}$ m	Minimalwert	$= \mathbf{0{,}096}$ m

Zweites Glied $\left(\frac{r_1 \varphi^2}{2 \cos^2 \varepsilon}\right)$:

$\lg (\frac{1}{2} r_1 \varphi^2)$	$= 1{,}51522$		$1{,}51522$
$2 \lg \cos \varepsilon$	$= 9{,}99872$		$9{,}99872$
	$1{,}51650$		$1{,}51650$
Maximalwert	$= \mathbf{32{,}847}$ m	Minimalwert	$= \mathbf{32{,}847}$ m

Drittes Glied $\left(\frac{2\,v\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}{3m\cos^2\varepsilon}\,r_0\varphi^3\right)$:

lg 2	= 0,30103	lg 2	= 0,30103
lg v_{max}	= 9,13994	lg v_{min}	= 9,09014
lg tg ε_{max}	= 8,73481	lg tg ε	= 8,73400
lg $(r_1\varphi^3)$	= 9,32189	lg $(r_1\varphi^3)$	= 9,32189
	7,49767		7,44706
lg 3	= 0,47712	lg 3	= 0,47712
lg m_{min}	= 7.93569	lg m_{max}	= 7,96059
2 lg cos ε	= 9,99872	2 lg cos ε	= 9,99872
	8,41153		8,43643
lg z	= 7,49767		7,44706
	9,08614		9,01063
Maximalwert	= **0,122** m	Minimalwert	= **0,102** m

Es wird demnach durch Addition der drei gefundenen Werte

$$C_1 = +\,0{,}097 + 32{,}847 - 0{,}122 = 32{,}822$$
$$C_1' = +\,0{,}096 + 32{,}847 - 0{,}102 = 32{,}843$$

Die Abweichung beider beträgt 0,02 m, und von einem zu berechnenden Mittelwert 0,01 m. Da dieser Betrag aber überhaupt unsere Genauigkeitsgrenze vorstellt, ist die beabsichtigte Näherung erlaubt, denn C_2 ist ja an und für sich schon eine Konstante, weil sowohl r_1 als φ konstant sind, und dass $C_3 = \frac{r_1\varphi^2}{2\cos^2\varepsilon}$ für alle Schwankungen in ε unveränderlich bleibt, ist auf Seite 33 („Zweites Glied“) schon bewiesen.

Die gleichen Untersuchungen, für die übrigen Seiten des Beobachtungsdreiecks angestellt, haben durchweg ergeben, dass die Berechnung der trigonometrischen Höhenunterschiede nach dieser Näherungsmethode die Genauigkeit derselben nicht beeinträchtigt. Es wurden demnach wieder für die Seiten und Stationen des Beobachtungsdreiecks die Konstanten C_1, C_2, C_3 für mittlere Werte von m, v, ε berechnet und dadurch zur Bestimmung der trigonometrischen Höhenunterschiede x die folgenden sechs Formeln gefunden, worin abermals die eingeklammerten Zahlen Loga-

rithmen bedeuten. Es ist nämlich in dem Beobachtungsdreieck HIK für die Seite

KH	die Höhe	x = 32,83	— [4,31061]	tg ε	— [1,51650]	v
HK	„ „	x = 33,07	— [4,31061]	cotg z	— [1,51638]	v
KI	„ „	x = 90,56	— [4,53197]	tg ε	— [1,95784]	v
IK	„ „	x = 91,02	— [4,53197]	cotg z	— [1,95775]	v
IH	„ „	x = 23,25	— [4,23650]	tg ε	— [1,36673]	v
HI	„ „	x = 23,29	— [4,23650]	cotg z	— [1,36670]	v

Die Auswertung dieser Formeln in Zahlen, bestehend in Berechnung der Höhen x und ihrer Unterschiede gegen die durch Nivellement gefundenen Höhen, ist in sechs besonderen mit Nr 19 bis Nr 24 bezeichneten Heften enthalten, während die Ergebnisse dieser Auswertungen in den nachfolgenden Zahlentafeln Nr 1 bis Nr 6, wovon die Nummern 1, 3, 5 je sechs und die Nummern 2, 4, 6 je fünf Abteilungen (A bis F und A bis E) haben, sowie in den beiliegenden beiden Steindrucktafeln sowohl nach ihrer chronologischen Reihenfolge als auch nach Stunden geordnet und übersichtlich zusammengestellt sind. Die Bedeutung der schwarzen und roten Linien in den zwei graphischen Tafeln ist im allgemeinen dieselbe geblieben wie in der zur „Ersten Mitteilung von Ergebnissen aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion“, nur konnten diesmal nicht die Refraktionswerte selbst aufgetragen werden, sondern nur ihre Differenzen gegen den jeweiligen Mittelwert, und zwar deshalb, weil die Refraktionswerte so gross sind und so stark von einander abweichen, dass sie bei dem einmal gewählten Massstabe von einem Centimeter für vier Sekunden auf der Zeichnung nicht Platz gefunden hätten, wie sich am besten aus der nachfolgenden Zusammenstellung ihrer sämtlichen Mittelwerte ergibt.

Dreieckseite Höhensteig—Kampenwand:

Mittel aller beobachteten Refraktionen

in Höhensteig	76,7″
in Kampenhöhe	35,0
zwischen Höhensteig und Kampenhöhe	58,8

Mittel aller berechneten Refraktionen
für Höhensteig HK = 50,7'' und KH = 45,6'' 48,2''
für Kampenhöhe HK = 49,2'' und KH = 44,3'' 46,8
zwischen Höhensteig und Kampenhöhe 47,5

Dreieckseite Höhensteig—Irschenberg:

Mittel aller beobachteten Refraktionen
in Höhensteig . . . . . 60,2''
in Irschenberg 52,1
zwischen Höhensteig und Irschenberg 56,1

Mittel aller berechneten Refraktionen
für Höhensteig HI = 42,0'' und IH 43,6'' . . 42,8''
für Irschenberg HI = 41,7'' und IH 43,3'' . . 42,5
zwischen Höhensteig und Irschenberg 42,7

Dreieckseite Irschenberg—Kampenwand:

Mittel aller beobachteten Refraktionen
in Irschenberg . . . . . 95,8''
in Kampenhöhe 71,4
zwischen Irschenberg und Kampenhöhe 83,6

Mittel aller berechneten Refraktionen
für Irschenberg KI = 74,8'' und IK = 78,5'' . 76,6''
für Kampenhöhe KI = 73,1'' und IK = 78,5'' . 75,8
zwischen Irschenberg und Kampenhöhe 76,2

Aus dieser Zusammenstellung und der dazu gehörigen Steindrucktafel Nr I ist ersichtlich, dass die zwischen je zwei Punkten der Richtungen HK und IK (Fig I und Fig III) gegenseitig und gleichzeitig beobachteten Refraktionen unter sich stark abweichen, während sie relativ nur wenig von einander verschieden sein sollten. Naturgemäss zeigt sich dann diese Anomalie auch bei den aus ihnen und den gemessenen Zenithdistanzen trigonometrisch berechneten Höhenunterschieden, wie ein Blick auf die Figuren I und III der Steindrucktafel Nr II zeigt. Fasst man nicht die Einzelrefraktionen an den beiden Stationen (z. B. 76,7'' in

Höhensteig und 35,0'' in Kampenhöhe) sondern ihre Summe (r = 76,7 + 35,0 = 111,7'') ins Auge, welche die eigentliche Gesamtrefraktion zwischen den zwei Stationen (hier H und K) ist, so weicht diese beobachtete Summe von der berechneten Gesamtrefraktion (hier 2 × 47,5 = 95,0'') nicht so auffallend mehr ab (nämlich nur um 111,7 — 95,0 = 16,7''). Immerhin aber muss die starke Abweichung der unmittelbar und gleichzeitig auf der oberen und der unteren Station beobachteten Refraktionen unter sich und von den berechneten Refraktionen einen physischen Grund haben, da dieser Unterschied nicht von Messungsfehlern herrühren kann. Mit der Aufsuchung dieses Grundes werden wir uns im nächsten Abschnitt C befassen. Wir bemerken jedoch schon hier, dass sich die Beobachtungs- und Rechnungs-Resultate für die beiden niedrig gelegenen Stationen Höhensteig und Irschenberg anders verhalten als für die beiden eben betrachteten Richtungen HK und IK, wie sowohl die Zusammenstellung auf Seite 36 als auch Fig II der Tafel Nr I zeigen. Denn zwischen Irschenberg und Höhensteig weichen zwar die auf beiden Stationen beobachteten Refraktionen unter sich so wenig als möglich ab, dagegen entfernen sie sich von den berechneten Refraktionswerten weiter als die in den Richtungen HK und IK beobachteten Strahlenbrechungen.

C. Folgerungen aus den mitgeteilten Beobachtungen.

I. In Bezug auf barometrisch bestimmte Höhen.

Hierüber habe ich ich mich in einer besonderen in den Denkschriften der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1883 (Kl. II, Bd XIV, Abt. 3) gedruckten Abhandlung „Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhen" (München 1883, Verlag der K. Akademie) wie folgt ausgesprochen.

Die zu den Refraktionsbeobachtungen gehörigen und in halbstündigen Intervallen Tag und Nacht fortgesetzten Bestimmungen der meteorologischen Elemente, sowie die für den bezeichneten Zweck ebenfalls unentbehrlichen und daher seit 1857 von mir jederzeit ausgeführten geometrischen Nivellierungen zwischen den Beobachtungsstationen bestätigten

im allgemeinen die in meiner Schrift „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen“ (München, 1862) aufgestellten und von Prof. Rühlmann in seiner Abhandlung „Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre“ (Leipzig 1870) noch erweiterten Sätze über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhenunterschiede und ihre in der Wärmestrahlung des Bodens liegende Ursache. Da aber unsere Barometermessungen im Jahre 1857 am Miesing mit Quecksilberbarometern und im Jahre 1881 an der Kampenwand mit Aneroiden angestellt wurden, so liess sich auch jene Vergleichung der Leistungsfähigkeit dieser beiden Arten von Barometern anstellen, welche in der vorhin genannten Abhandlung „Neue Beobachtungen“ durchgeführt worden ist.

Die dort berechneten und verzeichneten Höhenkurven für die Richtungen I: Höhensteig-Kampenwand mit 1083 m Höhenunterschied, II: Höhensteig-Irschenberg mit 270 m Höhenunterschied, III: Irschenberg-Kampenwand mit 811 m Höhenunterschied lehrten zunächst, dass die Kurve der zweiten Richtung (HI) nicht ganz den gesetzmässigen Verlauf hat wie die beiden anderen, indem sie zwar auch die tägliche zwischen 6 und 7 Uhr morgens und abends wechselnde Periode der berechneten Höhenunterschiede, nicht aber das Maximum und das Minimum dieser Unterschiede zu den Stunden zeigt, welche durch unsere eigenen früheren und Rühlmanns spätere Untersuchungen bereits festgestellt sind und durch die Kurven der Richtungen I (HK) und III (IK) aufs neue bestätigt werden. Während nämlich, wie es sein soll, die Kurven I und III das Maximum der Höhe um $1^h\ 30^m$ nachmittags, also etwa eine halbe Stunde vor der höchsten Temperatur des Tages, und das Minimum um $3^h\ 30^m$ und 4^h nachts, also eine bis anderthalb Stunden vor Sonnenaufgang zeigen, liegt das Maximum der Höhe in Kurve II bei $10^h\ 30^m$ vormittags und das Minimum bei $11^h\ 30^m$ nachts, also fünf bis sechs Stunden vor Sonnenaufgang. Diese Anomalie der Kurve II kann nur davon herrühren, dass das Terrain in der Richtung Höhensteig-Irschenberg ziemlich nahe mit der Verbindungslinie beider Orte verläuft und daher die für die barometrische Höhenmessung ebenso wie für die atmosphärische Strahlenbrechung massgebende Luftschichte von den lokalen Einflüssen zu sehr in ihren Temperaturverhältnissen beeinträchtigt wird, als dass sich das

Maximum und Minimum der Höhe und der Refraktion an den Stellen zeigen könnten, welche selbst bei den durch tiefe und weite Thäler getrennten Stationen in der Regel nur an solchen Tagen hervortreten, an denen unbewölkter Himmel eine ungestörte Bestrahlung der Erdoberfläche durch die Sonne bei Tage und eine gleichmässige Ausstrahlung der Wärme des Erdbodens gegen den kälteren Himmelsraum bei Nacht zulässt.

Die Amplituden der täglichen Perioden für die beiden Richtungen nach der Kampenwand (HK und IK) ergaben sich für unsere Beobachtungszeit in der zweiten Hälfte des Monats August 1881 sowohl für die aufsteigenden als für die abfallenden Zweige der Kurven als gleichgross, nämlich zwischen $6^1/_2$ Uhr morgens und $6^1/_2$ Uhr nachts liegend und somit einen Zeitraum von zwölf Stunden umfassend. Professor Rühlmann hat aus den sechsjährigen Mitteln der meteorologischen Beobachtungen in Genf und auf dem Grossen St. Bernhard für einen Höhenunterschied von 2070 m und die Mitte des Monats August fast dieselben Werte gefunden, nämlich eine Amplitude für den aufsteigenden Kurvenzweig von 7 Uhr morgens bis $7^1/_2$ Uhr abends und für den abfallenden von $7^1/_2$ Uhr abends bis 7 Uhr morgens, also die erste etwas grösser und die zweite etwas kleiner als zwölf Stunden. Diese Unterschiede kommen bei einer so leicht veränderlichen Grösse, wie die Amplitude der täglichen Periode barometrisch bestimmter Höhen ist, nicht in Betracht, und es haben daher meine Messungen an der Kampenwand aus dem Jahre 1881 die Ergebnisse, welche Rühlmann aus den von Plantamour veröffentlichen Beobachtungen zwischen Genf und dem Grossen St. Bernhard ableitete, vollständig bestätigt. Dasselbe gilt von der täglichen Periode der in den Jahren 1877 bis 1880 zwischen den beiden nördlich vom Fichtelgebirge gelegenen Stationen Döbra und Kapellenberg von mir angestellten barometrischen Höhenmessungen, worüber ich bereits in meiner ersten Mitteilung über die „Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion“ (München 1880) berichtet habe.

Das Verhältnis der Leistungsfähigkeit zweier guten Quecksilberbarometer (Heberbarometer von Rath in München, 1857 von mir schon benützt und 1862 beschrieben) gegenüber der zweier guten Aneroid- oder Federbarometer (von Naudet und Hulot in Paris, 1874 von mir untersucht und beschrieben) habe ich aus den mittleren Fehlern sowohl einer

Messung als des Mittels von hundert Messungen für Quecksilberbarometer (1857, vgl. „Untersuchungen und Beobachtungen“ von 1862) und für Federbarometer (1881, vgl. „Neue Beobachtungen“ von 1883) abgeleitet. Dieses Verhältnis ist für Quecksilber- und Feder-Barometer gleich 5 zu 3, was zu Gunsten der Aneroide spricht, insoferne man ihnen im voraus eine solche relative Genauigkeit nicht zutrauen wird. Zu diesem günstigen Ergebnisse muss jedoch bemerkt werden, dass man es nur dann erhält, wenn die Standkorrektionen der Aneroide fortwährend mit daneben aufgestellten Quecksilberbarometern überwacht und nach Bedürfnis verbessert werden. Unter dieser Bedingung aber erscheint es allerdings vorteilhafter, den Höhenunterschied zweier Stationen, wenn man ihn einigermassen genau finden will, mit guten Quecksilberbarometern zu bestimmen und nur nebenbei Aneroide, wenn man sie hat, mit abzulesen.

2. In Bezug auf die beobachteten Refraktionswerte.

Ausser den bereits am Schlusse der Abteilung B (Seite 38) angeführten Resultaten unserer Beobachtungen, dass nämlich zwischen den Stationen mit grossen Höhenunterschieden (HK mit 1083 m und IK mit 811 m) die unten und oben unmittelbar und gleichzeitig beobachteten Refraktionswerte weit mehr von einander abweichen als sie sollten, während ihre arithmetischen Mittel den berechneten Einzelrefraktionen ziemlich nahe kommen, und dass zwischen den Stationen mit kleinem Höhenunterschiede (HI mit 270 m) fast genau das Gegenteil stattfindet, nämlich die unten und oben unmittelbar und gleichzeitig beobachteten Refraktionswerte nicht mehr von einander abweichen als erwartet werden kann, während ihre arithmetischen Mittel von den berechneten Einzelrefraktionen weiter abstehen als sie sollten; — ausser diesen Resultaten entnehmen wir der graphischen Darstellung unserer Beobachtungen auf Tafel Nr I weiter noch, dass die den beobachteten Refraktionen und Temperaturen entsprechenden Kurven sich und der die Mittel der Refraktionen und Temperaturen darstellenden Graden gegen 8 Uhr morgens und gegen 7 Uhr abends begegnen, woraus zu schliessen ist, dass diese meteorologischen Erscheinungen die gleiche tägliche Periode zeigen, wie wir sie schon früher und in Nr 1 dieses Abschnittes bei den barometrisch bestimmten Höhen

erkannt haben, und wie wir ihnen in Nr 3 bei den trigonometrischen Höhenmessungen wieder begegnen werden.

Wenn man nach den natürlichen Ursachen fragt, welche die vorhin erwähnten grossen Abweichungen in den an zwei Stationen von sehr verschiedener Höhenlage gleichzeitig beobachteten Einzelrefraktionen zu erklären vermögen, so kann man zunächst an Lotablenkungen denken, welche auf den hier in Betracht kommenden Stationen stattfinden, und ich habe bei den in Rede stehenden Beobachtungen um so mehr daran gedacht, als ja gerade ich es war, der zuerst den Vorschlag machte, gegenseitige Präzisionsnivellements und trigonometrische Höhenmessungen zur Bestimmung von Lotablenkungen zu benützen (vgl. meine Abhandlung über Erdkrümmung und Lotabweichung vom Jahre 1872.)

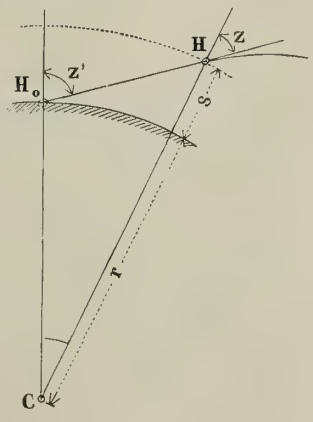
Wenn ich aber auch nicht im mindesten bezweifle, dass die drei Stationen Höhensteig, Irschenberg und Kampenwand mit solchen Ablenkungen behaftet sind, so bin ich doch auch fest davon überzeugt, dass die Unterschiede dieser in den Beobachtungsebenen Höhensteig-Kampenwand, Irschenberg-Kampenwand und Höhensteig-Irschenberg gleichgerichteten Lotablenkungen die Amplituden je zweier Stationen nur um Bruchteile einer Raumsekunde verschieden gestalten können gegenüber den aus dem Bessel'schen Erdellipsoid berechneten Werten der zu den Bögen HK, IK, HI gehörigen Erdmittelpunktswinkel. Denn wenn man, wie ich es gethan habe — nach der Abhandlung des K. K. Obersten und Vermessungsreferenten im Kriegsministerium, E. Pechmann, „Die Abweichung der Lothlinie bei astronomischen Beobachtungsstationen" (2. Heft, Wien 1865) und mit Benützung erstens des von ihm in seinen „Notizen zur Höhen- und Profilkarte von Tirol und Vorarlberg" (Wien 1865, bei F. B. Geitler) und zweitens des von dem K. B. Obersten und Direktor des topographischen Bureau, C. v. Orff, in dem Werk „die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage" (München 1873) beigebrachten Materials — die Lotabweichungen auf den genannten drei Stationen annähernd berechnet, so ergibt sich in Anbetracht der bedeutenden Ausdehnung des bayerischen und österreichischen Hochgebirgs und der ganz geringen Entfernungen der Stationen Höhensteig und Irschenberg von der Kampenwand das vorhin angegebene Resultat, dass nämlich die Lotabweichungs-Unterschiede $\delta_k - \delta_h$, $\delta_k - \delta_i$, $\delta_i - \delta_h$ den Betrag einer

Sekunde nicht erreichen und noch weniger übersteigen. Aus diesem Grunde und da die öffentlichen Mittel für Gradmessungszwecke nur sehr mässige sind (weshalb auch kostspielige Beobachtungsarbeiten stets über längere Zeiträume verteilt werden müssen) habe ich mit den Refraktionsbeobachtungen des Jahres 1881 nicht auch gleichzeitig astronomische Bestimmungen der Polhöhen und Azimuthe der drei Stationen vornehmen können und wollen. Ich behalte mir übrigens vor darauf zurückzukommen, wenn sich die Bayerische Gradmessungs-Kommission in den nächsten Jahren mit einer systematischen Feststellung der auf allen trigonometrischen Hauptpunkten Bayerns stattfindenden Lotablenkungen befassen wird.

Vorläufig glaube ich die mehrfach erwähnten starken Abweichungen in den gleichzeitig beobachteten Refraktionen durch die Annahme erklären und beseitigen zu können, dass der Zustand der Luftschichten, durch welche die Lichtstrahlen ihre Wege genommen haben, nicht überall der theoretisch vorausgesetzte war. Namentlich werden in Folge der Bodenstrahlung nur selten die unteren Luftschichten die dichtesten sein, wie es das den Refraktionsformeln zu Grunde liegende Gesetz verlangt, wonach die Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft in verschiedenen Höhen proportional sind den fünften Potenzen der daselbst herrschenden absoluten Temperaturen. Durch direkte Versuche, welche Dr Prestel und Andere angestellt haben (vgl. des Ersteren Abhandlung „Die mit der Höhe zunehmende Temperatur als Funktion der Windrichtung“ in der Leopoldina, Bd. XXIX, aus dem Jahre 1861), steht es sogar fest, dass in den meisten Fällen von unten bis zu etwa zehn Meter Höhe die Temperatur zunimmt, was auf die Dichtigkeit der Luft einen entsprechenden Einfluss äussern muss. In Erwägung nun, dass nach dem von mir für die Dichtigkeiten der höheren Luftschichten aufgestellten Gesetze die Lichtkurve der Erdoberfläche ihre konkave Seite, nach den Prestel'schen Beobachtungen aber ihre konvexe Seite zuwendet, und unter der Annahme, dass über die wirkliche Gestalt der Lichtkurve in den untersten Schichten der Atmosphäre zur Zeit noch eine grosse Unsicherheit besteht, halte ich es bis zu einer auf Versuchen beruhenden Feststellung des wahren Sachverhalts für erlaubt, zur Erklärung der vorhin besprochenen Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung anzuehmen: über jeder Beobachtungsstation besitze die Luft bis zu einer gewissen Höhe gleichmässige Dichtigkeit, und

erst von da ab trete die Gültigkeit des von mir aufgestellten Dichtigkeitsgesetzes ein. Auf Grund dieser Annahme lässt sich dann die Höhe dieser gleichmässig dichten Luftschichte aus einer grösseren Reihe guter Refraktionsbeobachtungen berechnen. Beträgt nämlich der Unterschied der beobachteten und berechneten Refraktionen zwischen zwei Beobachtungsstationen, welche horizontal um e Meter von einander entfernt sind, $\triangle z$ Sekunden, so wird zunächst die trigonometrisch bestimmte Höhe um $\triangle h$ Meter falsch, und es folgt dieser Fehler sofort aus der Gleichung $\triangle h = e \cdot tg \triangle z = e \cdot \triangle z \cdot tg\, 1''$. Kennt man nun für eine grössere Beobachtungsreihe zwischen zwei Stationen den mittleren konstanten Wert $\triangle h$, um welche alle mit Rücksicht auf Refraktion und Erdkrümmung trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede der ernivellierten Höhendifferenz gegenüber zu klein oder zu gross werden, so ergibt sich die Höhe s der hypothetischen gleichmässig dichten Luftschichte, oberhalb welcher erst das Gesetz $\varrho : \varrho_0 = h^5 : h_0^5$ Geltung hat und innerhalb deren zwischen zwei um e Meter horizontal von einander entfernten Stationen ein mittlerer Fehler $\triangle z$ in den beobachteten und berechneten Refraktionen entsteht, mit Hilfe der beigedruckten Figur wie folgt. Stellt nämlich H_0 den Beobachtungsort, r_0 seinen Erdhalbmesser H_0C, z' die beobachtete und z die berichtigte Zenithdistanz, endlich γ den Zentriwinkel H_0CH vor, so ist $z' = z + \gamma$ oder $\gamma = z' - z$ und es verhält sich $r : r + s = \sin z : \sin z'$. Daraus folgt

Fig. 5.



$$\sin z' = \left(1 + \frac{s}{r_0}\right) \sin(z' - \gamma) = \sin z + \frac{s}{r_0} \sin z$$

$$s = r_0 \cdot \frac{\sin z' - \sin z}{\sin z} = 2\, r_0 \cdot \frac{\sin {}^1/_2 (z' - z) \cdot \cos {}^1/_2 (z' + z)}{\sin z}$$

Wenn demnach das Mittel aller beobachteten Refraktionswerte in $H = 76{,}7''$ und das aller für H nach K berechneten Refraktionen $= 47{,}5''$ und somit $\triangle z = 29{,}2''$ ist, so wird für $e = HK = 20445{,}8$ m der Wert $\triangle h = 2{,}89$ m und $s = 46{,}5$ m. Berechnet man mit diesem Werte von s

oder auch mit dem ihm nahekommenden s = 40 m, wofür $\triangle z = 25''$ und $\triangle h = 2{,}5$ m wird, die den beobachteten Zenithdistanzen z' entsprechenden Refraktionen für die Station H, so stimmen Beobachtung und Rechnung so nahe überein als man es nur wünschen kann: beide hienach gebildete Kurven laufen ungefähr so neben einander her wie die rot und schwarz punktierten Linien der ersten und dritten Figur in der Steindrucktafel Nr I. Für die zweite Figur dieser Tafel ist dieses, wie schon erwähnt, allerdings nicht der Fall, weil die beiden Stationen, worauf sie sich bezieht, Höhensteig und Irschenberg, in einer Luftschichte liegen, die ihrer geringen Höhe wegen der Wärmestrahlung des Bodens zu sehr ausgesetzt ist, als dass sie dem mehrfach genannten Dichtigkeitsgesetze folgen könnte. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist um so wahrscheinlicher, als die vorstehende Formel für s, wenn man sie auf die Beobachtungen zwischen Irschenberg und Kampenwand anwendet (für welche in I die mittlere scheinbare Zenithdistanz $z' = 88^0\ 45'\ 45''$ und für $\triangle h = 2{,}5$ m der Unterschied $\triangle z = 15''$ ist) die auf Irschenberg ruhende gleichmässig dichte Luftschichte noch 10 m Höhe hat. Dazu kommt, dass der Lichtstrahl zwischen Höhensteig und Irschenberg vom Innstrom über das sogenannte grosse Filz hinzieht und durch die von diesem aufsteigenden Dünste sicherlich in der gesetzmässigen Brechung gehindert wird. Auch spricht für einen der gleichmässigen Dichtigkeit sich nähernden Zustand der zwischen Höhensteig und Irschenberg befindlichen Luftschichte der Umstand, dass die in H und I beobachteten Einzelrefraktionen nur wenig von einander abweichen, was in den übrigen zwei Richtungen HK und IK nicht der Fall ist.

3. In Bezug auf trigonometrisch bestimmte Höhen.

Aus der Darstellung der trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede Höhensteig-Kampenwand (Taf. II, Fig. 1) und Irschenberg-Kampenwand (Taf. II, Fig. 3) ergibt sich zunächst, dass die diese Höhenunterschiede darstellenden (schwarz gestrichelten und ausgezogenen) Kurven von einander um nahezu konstante Beträge von einander abstehen, und diese Bemerkung gab mir eben Veranlassung, über den unteren Stationen H und I Luftschichten von durchschnittlich gleicher Dichtigkeit in Betracht zu ziehen, welche diese konstanten Differenzen in den trigonometrisch

bestimmten Höhen verschwinden machen. Betrachtet man nun die auf dieser Annahm beruhenden Kurven der Tafel II, welche aus den beobachteten Zenithdistanzen in K und aus den verbesserten Zenithdistanzen von H und I hervorgingen, so sieht man, dass jetzt die rot gestrichelten Mittel (welche den ausgezogenen parallel sind) zwischen den unten und oben beobachteten Höhen durchgehen und die den Geraden A_1B_1 und A_3B_3 gegenüber eine tägliche Periode für trigonometrisch bestimmte Höhen zeigen, wie wir sie schon früher für barometrisch bestimmte Höhen kennen gelernt haben. Die diese Periode darstellenden Kurven haben fast genau dieselben Wendepunkte wie die barometrischen, nämlich gegen 7 bis 8 Uhr des Morgens und des Abends, nur erheben sie sich, wie zu erwarten war, weniger hoch über die den Nivellementen entsprechenden Geraden, weil unter übrigens gleichen Umständen trigonometrisch bestimmte Höhenunterschiede stets genauer sein werden als diejenigen, welche man mit Hilfe des Barometers gefunden hat.

Das Hauptergebnis der dritten Abteilung des Abschnitts C unserer Abhandlung dürfte sich somit in den Satz zusammenfassen lassen: „Die im Verlauf von 24 Stunden erhaltenen Werte für die trigonometrische Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Stationen bilden eine Kurve, welche ebenso wie die für barometrisch bestimmte Höhen gültige eine tägliche Periode mit nahezu gleichen Wendepunkten hat.“

Habe ich somit schon vor zwanzig Jahren eine tägliche Periode der barometrisch bestimmten Höhen nachgewiesen, so zeige ich jetzt, dass eine solche auch für trigonometrisch bestimmte Höhen, sowie für direkt gemessene terrestrische Refraktionen besteht, und dass die Wendepunkte dieser Perioden nahehin unter sich und mit denen der Temperatur zusammenfallen. Daraus folgt, dass diese Perioden vorzugsweise von dem täglichen Gange der Temperatur abhängen, ich behalte mir jedoch den näheren Nachweis dieses Zusammenhanges für eine spätere, die Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung im Zusammenhange behandelnde besondere Schrift vor.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung: Veranlassung zur Fortsetzung der Refraktionsbeobachtungen aus den Jahren 1877—1880. Auswahl geeigneter Punkte am Bayerischen Hochgebirge. Bestimmung ihrer gegenseitigen Lage in horizontaler und vertikaler Projektion. Wahre Zenithdistanzen an den Enden der drei Seiten	1— 10
A. Ausführung der Refraktionsbeobachtungen:	
1. Einrichtung der Beobachtungsstationen	10— 12
2. Die Instrumente und ihre Konstanten	12— 16
3. Die Beobachter und ihre Leistungen	17— 21
B. Berechnung der Refraktionen und der Höhenunterschiede:	
1. Die Konstanten für diese Berechnungen	21— 24
2. Die Formeln für die theoretischen Refraktionswerte	24— 31
3. Die Formeln zur trigonometrischen Höhenberechnung	31— 37
C. Folgerungen aus den mitgeteilten Beobachtungen:	
1. In Bezug auf barometrisch bestimmte Höhen	37— 40
2. In Bezug auf die beobachteten Refraktionswerte	40— 34
3. In Bezug auf trigonometrisch bestimmte Höhen	44— 45
Tafeln: Refraktionen und Höhenunterschiede enthaltend	
1. zwischen Höhensteig und Kampenwand	47— 56
2. „ Kampenwand und Höhensteig	57— 65
3. „ Höhensteig und Irschenberg	66— 75
4. „ Irschenberg und Höhensteig	76— 84
5. „ Irschenberg und Kampenwand	85— 94
6. „ Kampenwand und Irschenberg	95—102

Bemerkungen:

1. Die vorstehende Abhandlung wurde von der mathematisch-physikalischen Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften am 2. Juni 1883 zum Druck in ihren Denkschriften begutachtet.
2. Auf Seite 3 dieser Schrift, am Schlusse der Zeile 14 v. o. lese man „umfasst“ statt „umfassen“.

Tafel Nr. 1.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Höhensteig und Kampenwand.

A. Beobachtet in Höhensteig.

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in H	Refraktion berechn in K	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in H	Refraktion berechn in K	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
1	16. Nm	11.30	716,4	291,6	77,6	50,7	49,2	—2,6	38	19. Vm	5.—	720,1	284,9	64,7	53,6	52,1	—1,0
2	„	12.—	716,2	290,4	75,3	51,1	49,6	—2,3	39	„	7.—	720,2	288,6	64,0	52,3	50,8	—1,2
3	16. Nm	12.30	716,2	291,7	78,4	50,6	49,1	—2,7	40	„	8.30	720,6	289,6	60,2	52,0	50,5	—0,8
4	„	1.—	716,1	291,8	75,5	50,6	49,1	—2,4	41	„	9.—	720,7	291,1	61,4	51,5	50,0	—0,9
5	„	1.30	716,1	291,8	73,6	50,6	49,1	—2,2	42	„	9.30	720,8	292,0	60,9	51,2	49,7	—0,9
6	„	2.—	715,6	291,8	67,9	50,5	49,0	—4,1	43	„	10.—	720,6	292,2	61,9	51,1	49,6	—1,0
7	„	2.30	715,2	291,8	70,3	50,4	49,0	—4,0	44	„	10.30	720,5	292,4	61,9	51,0	49,5	—1,0
8	„	3.—	715,2	290,8	63,6	50,8	49,3	—1,3	45	„	11.—	720,3	292,9	62,7	50,8	49,3	—1,1
9	„	7.—	714,6	287,7	64,3	51,8	50,3	—1,1	46	„	11.30	720,3	292,9	63,9	50,8	49,3	—1,2
10	„	10.—	714,5	285,6	77,4	52,5	51,0	—2,4	47	„	12.—	720,3	293,1	66,3	50,7	49,2	—1,5
11	17. Vm	4.—	711,4	285,9	100,2	52,0	50,5	—4,7	48	19. Nm	12.30	720,0	293,8	64,1	50,4	49,0	—1,3
12	„	4.30	711,3	285,9	93,0	52,0	50,5	—4,1	49	„	1.—	719,7	294,4	63,7	50,2	48,7	—1,2
13	„	5.—	711,2	285,9	100,2	52,0	50,5	—4,7	50	„	1.30	719,8	293,8	60,9	50,4	48,9	—0,9
14	„	6.—	710,7	285,8	91,0	51,9	50,4	—3,8	51	„	2.—	719,7	294,8	59,9	50,0	48,6	—0,9
15	18. Vm	12.—	713,6	288,4	61,1	51,4	49,9	—0,8	52	„	2.30	719,5	294,7	61,1	50,0	48,6	—1,0
16	18. Nm	12.30	713,0	290,7	60,1	50,5	49,0	—0,9	53	„	3.—	719,3	294,8	62,1	50,0	48,5	—1,1
17	„	1.—	712,9	290,8	60,8	50,5	49,0	—0,9	54	„	3.30	719,8	295,0	65,5	50,0	48,5	—1,4
18	„	1.30	712,8	290,9	61,8	50,4	49,0	—1,0	55	„	4.—	718,8	295,0	66,1	49,9	48,4	—1,5
19	„	2.30	712,5	290,9	60,1	50,4	48,9	—0,9	56	„	4.30	718,5	295,3	66,8	49,7	48,3	—1,6
20	„	7.30	715,0	288,4	72,7	51,6	50,1	—2,0	57	„	5.—	718,3	295,0	66,9	49,7	48,3	—1,6
21	„	8.—	715,5	288,4	69,0	51,7	50,2	—1,8	58	„	5.30	718,1	294,9	64,9	49,7	48,3	—1,4
22	„	9.—	716,4	287,8	72,6	52,0	50,5	—2,0	59	„	6.—	717,8	294,0	69,5	50,0	48,6	—1,8
23	„	9.30	716,5	287,8	70,5	52,0	50,5	—1,8	60	„	6.30	717,8	293,0	75,5	50,4	48,9	—2,4
24	„	10.—	716,9	287,9	67,1	52,1	50,6	—1,5	61	„	7.—	717,9	292,4	86,5	50,6	49,1	—3,5
25	„	10.30	717,9	288,0	66,0	52,2	50,7	—1,4	62	„	7.30	718,0	291,6	87,2	50,9	49,4	—3,5
26	„	11.—	718,3	287,7	67,3	52,3	50,8	—1,4	63	„	8.—	718,2	290,6	90,4	51,3	49,8	—3,8
27	„	11.30	718,5	287,3	69,7	52,5	51,0	—1,6	64	„	8.30	717,8	290,0	84,8	51,4	50,0	—3,2
28	„	12.—	718,6	287,2	66,8	52,6	51,0	—1,4	65	„	9.—	717,9	289,8	96,6	51,5	50,0	—4,4
29	19. Vm	12.30	718,8	287,1	65,6	52,6	51,1	—1,2	66	„	9.30	717,7	289,6	96,6	51,6	50,1	—4,4
30	„	1.—	719,1	287,2	73,6	52,6	51,1	—2,0	67	„	10.—	717,7	289,0	94,7	51,8	50,3	—4,2
31	„	1.30	719,4	287,3	68,1	52,6	51,1	—1,7	68	„	10.30	717,9	289,4	95,0	51,7	50,2	—4,2
32	„	2.—	719,5	287,2	62,7	52,7	51,2	—0,9	69	„	11.—	717,7	288,2	105,3	52,1	50,6	—5,2
33	„	2.30	719,5	287,1	64,8	52,7	51,2	—1,2	70	„	12.—	717,6	288,9	100,4	51,8	50,3	—4,7
34	„	3.—	719,8	287,0	69,3	52,8	51,3	—1,6	71	20. Vm	12.30	717,8	288,7	92,5	51,9	50,4	—3,9
35	„	3.30	719,8	286,8	72,2	52,9	51,4	—1,9	72	„	1.—	718,0	289,6	94,5	51,6	50,1	—4,1
36	„	4.—	719,9	286,4	70,9	53,0	51,5	—1,7	73	„	3.—	717,8	292,1	76,8	50,7	49,2	—2,5
37	„	4.30	720,0	286,0	63,2	53,2	51,7	—1,0	74	„	3.30	717,8	289,9	74,3	51,5	50,0	—2,2

Nr	Zeit der Beobachtung 1881, August	Luft-druck mm	Absol Temp °C	Refraktion beob Sec	berechn in H Sec	berechn in K Sec	Höh Diffr Δ m	Nr	Zeit der Beobachtung 1881, August	Luft-druck mm	Absol Temp °C	Refraktion beob Sec	berechn in H Sec	berechn in K Sec	Höh Diffr Δ m
75	20. Vm 4.—	717,2	292,8	75,0	50,4	48,9	—2,5	127	23. Nm 2.30	716,3	300,5	65,3	47,7	46,3	—1,7
76	„ 4.30	717,4	292,3	81,9	50,6	49,1	—3,1	128	„ 3.—	716,1	300,0	70,0	47,8	46,5	—2,1
77	„ 7.—	718,0	294,3	82,2	50,0	48,5	—3,1	129	„ 4.—	715,9	299,5	70,2	48,0	46,6	—2,1
78	„ 8.—	718,2	294,0	82,1	50,1	48,7	—3,1	130	„ 4.30	715,6	299,6	75,8	47,9	46,5	—2,7
79	22. Vm 7.—	720,8	289,8	78,2	51,9	50,4	—2,5	131	„ 5.—	715,5	299,0	79,7	48,1	46,7	—3,0
80	„ 8.—	720,7	291,7	65,1	51,2	49,8	—1,2	132	„ 5.30	715,3	298,8	81,2	48,1	46,7	—3,2
81	„ 8.30	721,0	292,7	69,7	50,9	49,5	—1,8	133	„ 6.—	714,8	297,8	79,1	48,4	47,0	—2,9
82	„ 9.—	720,9	293,6	68,8	50,6	49,2	—1,7	134	„ 7.—	714,0	295,8	81,6	48,9	47,5	—3,2
83	„ 10.—	720,6	294,6	61,1	50,2	48,8	—1,0	135	„ 7.30	713,6	295,4	90,0	49,0	47,6	—4,0
84	„ 10.30	720,5	294,8	63,6	50,2	48,7	—1,2	136	„ 8.—	713,6	294,6	94,6	49,3	47,8	—4,4
85	„ 11.—	720,3	295,0	68,7	50,1	48,6	—1,8	137	„ 8.30	713,5	294,5	89,4	49,3	47,8	—4,9
86	„ 11.30	720,3	294,8	59,0	50,1	48,7	—0,8	138	„ 9.30	713,6	294,5	95,8	49,3	47,9	—4,5
87	„ 12.—	720,1	295,3	60,2	49,9	48,5	—0,9	139	„ 10.—	713,6	293,1	98,9	49,8	48,3	—4,8
88	22. Nm 12.30	719,9	296,2	63,4	49,6	48,2	—1,3	140	„ 10.30	713,4	292,8	94,4	49,8	48,4	—4,3
89	„ 1.—	719,6	296,3	61,5	49,5	48,1	—1,1	141	„ 11.—	713,1	295,8	89,9	48,8	47,4	—4,0
90	„ 1.30	719,6	296,3	60,1	49,5	48,1	—1,0	142	„ 11.30	713,0	295,7	92,1	48,8	47,4	—4,2
91	„ 3.30	718,4	296,9	60,4	49,2	47,7	—1,0	143	„ 12.—	712,9	296,0	88,9	48,7	47,3	—4,0
92	„ 4.—	718,2	296,8	67,9	49,2	47,7	—1,7	144	24. Vm 12.30	712,9	296,0	90,1	48,7	47,3	—4,1
93	„ 4.30	718,5	296,8	65,8	49,2	47,8	—1,6	145	„ 1.—	712,9	296,0	95,1	48,7	47,3	—4,5
94	„ 5.—	718,7	295,3	65,1	49,7	48,3	—1,4	146	„ 1.30	713,0	296,6	91,0	48,5	47,1	—4,1
95	„ 5.30	718,6	295,0	70,2	49,8	48,4	—1,9	147	„ 2.—	712,9	295,4	95,1	48,9	47,5	—4,5
96	„ 6.—	718,7	295,0	67,4	49,8	48,4	—1,7	148	„ 2.30	713,1	295,8	84,7	48,8	47,4	—3,5
97	„ 6.30	718,8	294,5	63,7	50,0	48,6	—2,3	149	„ 3.—	713,7	294,3	83,8	49,4	48,0	—4,3
98	„ 7.30	718,3	292,8	81,9	50,5	49,1	—3,1	150	„ 3.30	714,3	292,6	83,8	50,0	48,6	—4,2
99	„ 8.—	718,7	292,9	82,1	50,5	49,1	—3,0	151	„ 4.—	714,5	291,1	87,9	50,6	49,1	—3,6
100	„ 8.30	718,8	292,6	78,3	50,7	49,2	—2,6	152	„ 4.30	714,4	290,9	90,9	50,6	49,1	—3,9
101	„ 9.—	718,8	291,8	83,4	50,9	49,5	—3,1	153	24. Nm 3.30	719,1	288,6	76,2	52,1	50,6	—2,3
102	„ 11.—	717,4	289,9	87,8	51,4	49,9	—3,5	154	25. Vm 6.30	721,0	287,3	79,4	52,9	51,3	—2,5
103	„ 11.30	717,3	290,0	93,2	51,4	49,9	—4,1	155	„ 7.—	721,1	287,7	81,4	52,7	51,2	—2,7
104	„ 12.—	717,2	289,6	93,1	51,5	50,0	—4,1	156	„ 7.30	721,2	287,8	79,2	52,7	51,2	—2,5
105	23. Vm 12.30	717,2	289,3	93,5	51,6	50,1	—4,0	157	„ 8.—	721,4	288,0	70,5	52,7	51,2	—1,7
106	„ 1.30	718,2	289,0	84,0	51,9	50,4	—3,1	158	„ 8.30	721,4	288,6	72,4	52,5	50,9	—1,9
107	„ 2.—	718,8	289,0	90,6	51,9	50,4	—3,7	159	„ 9.—	721,5	289,0	70,5	52,3	50,8	—1,7
108	„ 3.30	718,5	289,0	83,8	51,9	50,4	—3,0	160	„ 9.30	721,7	289,6	68,3	52,1	50,6	—1,5
109	„ 4.—	718,4	289,0	77,1	51,9	50,4	—2,4	161	„ 10.—	721,5	289,8	68,6	52,0	50,5	—1,6
110	„ 4.30	718,3	289,0	81,2	51,9	50,4	—2,8	162	„ 10.30	721,4	290,8	68,2	51,7	50,2	—1,5
111	„ 5.—	718,3	289,1	77,8	51,8	50,3	—2,5	163	„ 11.—	721,4	291,0	66,8	51,6	50,1	—1,4
112	„ 6.—	718,4	290,2	77,8	51,5	50,0	—2,5	164	„ 11.30	721,2	291,7	70,0	51,3	49,8	—1,7
113	„ 7.—	717,9	292,3	81,6	50,6	49,2	—3,0	165	„ 12.—	721,2	291,8	66,0	51,3	49,8	—1,4
114	„ 7.30	718,1	293,8	76,2	50,2	48,7	—2,5	166	25. Nm 12.30	721,0	292,3	68,5	51,1	49,6	—1,7
115	„ 8.—	718,2	294,8	78,0	49,8	48,4	—2,7	167	„ 1.—	721,2	292,6	66,0	51,0	49,5	—1,4
116	„ 8.30	717,9	295,4	77,3	49,6	48,2	—2,7	168	„ 1.30	721,0	292,8	65,3	50,9	49,4	—1,3
117	„ 9.—	718,0	295,6	74,9	49,5	48,1	—2,4	169	„ 2.30	720,6	293,7	66,0	50,5	49,1	—1,3
118	„ 10.—	718,3	296,5	76,6	49,3	47,9	—2,6	170	„ 3.30	720,0	294,4	67,9	50,2	48,8	—1,8
119	„ 10.30	718,3	297,1	70,8	49,1	47,7	—2,2	171	„ 4.—	720,0	294,5	66,1	50,2	48,7	—1,5
120	„ 11.—	718,4	298,0	68,4	48,8	47,4	—1,9	172	„ 4.30	720,0	293,4	67,6	50,6	49,1	—1,6
121	„ 11.30	718,1	298,4	65,0	48,6	47,2	—1,5	173	„ 5.—	719,9	293,6	74,2	50,5	49,0	—2,2
122	„ 12.—	718,0	298,8	62,8	48,5	47,1	—1,3	174	„ 5.30	719,6	293,4	72,7	50,5	49,0	—2,1
123	23. Nm 12.30	717,7	299,8	62,8	48,1	46,7	—1,3	175	„ 6.30	719,5	291,9	75,8	51,0	49,5	—2,4
124	„ 1.—	717,5	300,4	64,0	47,9	46,5	—1,5	176	„ 7.—	719,5	290,8	80,9	51,4	49,9	—2,8
125	„ 1.30	717,3	300,5	65,3	47,8	46,5	—1,6	177	„ 7.30	719,5	289,9	83,6	51,7	50,2	—3,1
126	„ 2.—	716,9	300,8	62,1	47,7	46,3	—1,3	178	„ 8.—	719,7	288,3	90,8	52,3	50,8	—3,7

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	berechn in H	berechn in K	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	berechn in H	berechn in K	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
179	25. Nm	8.30	719,7	287,8	90,8	52,5	51,0	—3,7	207	26. Nm	3.30	716,5	298,2	69,6	48,5	47,1	—2,0
180	„	9.30	719,5	287,8	91,9	52,5	51,0	—3,9	208	„	4.—	716,5	298,0	67,1	48,5	47,1	—1,7
181	„	10.—	719,3	287,8	94,8	52,4	50,9	—4,1	209	„	4.30	716,3	298,3	74,0	48,4	47,0	—2,4
182	„	10.30	719,3	285,8	90,3	53,2	51,6	—3,6	210	„	5.—	715,9	298,1	72,8	48,4	47,0	—2,3
183	„	11.—	719,2	285,8	91,6	53,2	51,6	—3,7	211	„	5.30	715,8	297,8	70,4	48,5	47,1	—2,1
184	„	11.30	719,4	285,3	96,9	53,3	51,8	—4,2	212	„	6.—	715,6	296,8	73,2	48,8	47,4	—2,3
185	26. Vm	12.30	719,3	284,8	102,5	53,6	52,0	—4,7	213	„	6.30	715,6	296,4	83,5	48,9	47,5	—3,3
186	„	1.30	719,4	284,4	108,3	53,7	52,2	—5,3	214	„	7.—	715,6	294,8	80,8	49,5	48,0	—3,0
187	„	2.30	718,9	284,6	94,2	53,7	52,1	—3,9	215	„	7.30	715,6	294,6	86,8	49,5	48,1	—3,6
188	„	3.30	718,7	284,2	97,7	53,7	52,1	—4,3	216	„	8.—	715,6	293,8	90,0	49,8	48,4	—3,9
189	„	4.30	718,6	283,8	107,3	53,8	52,3	—5,2	217	„	8.30	715,6	292,7	93,3	50,2	48,7	—4,2
190	„	7.—	719,2	287,5	93,9	52,5	51,0	—4,0	218	„	9.—	715,7	291,8	93,2	50,5	49,0	—4,1
191	„	7.30	719,1	288,8	90,2	52,1	50,5	—3,7	219	27. Vm	2.—	715,5	288,7	101,6	51,6	50,1	—4,9
192	„	8.—	719,0	289,2	79,0	51,9	50,4	—2,6	220	„	3.—	714,9	286,9	109,5	52,1	50,6	—5,6
193	„	8.30	719,0	289,5	80,3	51,8	50,3	—2,7	221	„	4.—	714,6	287,4	104,4	51,9	50,4	—5,1
194	„	9.—	719,2	291,4	77,6	51,1	49,7	—2,5	222	„	5.—	714,5	287,8	106,9	51,7	50,3	—5,4
195	„	9.30	719,0	292,4	72,4	50,8	49,3	—2,1	223	„	6.—	714,4	289,6	94,6	51,1	49,6	—4,2
196	„	10.—	718,7	294,1	71,8	50,1	48,7	—2,1	224	„	6.30	714,0	291,3	94,8	50,4	49,0	—4,3
197	„	10.30	718,6	294,8	67,0	49,9	48,4	—1,6	225	„	7.—	714,0	290,8	91,1	50,6	49,2	—3,9
198	„	11.—	718,5	295,4	68,0	49,7	48,2	—1,7	226	„	8.—	713,9	293,4	89,3	49,7	48,3	—3,8
199	„	11.30	718,2	295,8	64,6	49,5	48,1	—1,4	227	„	8.30	713,6	294,8	82,4	49,2	47,8	—3,2
200	„	12.—	718,2	296,6	63,7	49,2	47,8	—1,3	228	„	9.—	713,6	294,4	81,0	49,3	47,9	—3,0
201	26. Nm	12.30	718,0	296,8	65,7	49,1	47,7	—1,6	229	„	9.30	713,5	294,8	72,0	49,2	47,8	—2,2
202	„	1.—	717,8	297,0	65,2	49,0	47,6	—1,5	230	„	10.—	713,6	296,6	70,8	48,6	47,2	—2,1
203	„	1.30	717,6	298,0	64,7	48,7	47,3	—1,5	231	„	11.—	713,4	297,8	63,7	48,2	46,8	—1,4
204	„	2.—	717,2	298,7	66,4	48,4	47,0	—1,7	232	„	11.30	713,1	298,0	63,7	48,1	46,7	—1,4
205	„	2.30	717,2	297,9	65,5	48,7	47,3	—1,6	233	„	12.—	713,3	298,0	62,2	48,1	46,7	—1,3
206	„	3.—	716,9	297,9	72,3	48,6	47,2	—2,3									

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der in Höhensteig nach Kampenwand beobachteten Refraktionen.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	91,0	79,4	64,0	76,2	82,1	60,2	61,4	60,9	61,9	61,9	62,7	77,6
2	77,8	94,8	82,2	79,2	65,1	69,7	68,8	68,3	61,1	63,6	68,7	63,9
3	94,6		78,2	90,2	78,0	77,3	74,9	72,4	76,6	70,8	68,4	59,0
4			81,6		70,5	72,4	70,5	72,0	68,6	68,2	66,8	65,0
5			81,4		79,0	80,3	77,6		71,8	67,0	68,0	70,0
6			93,9		89,3	82,4	81,0		70,8		63,7	64,6
7			91,1									63,7
Mittel	87,8	87,1	81,8	81,9	77,4	73,7	72,4	68,4	68,5	66,3	66,6	66,3
Gewicht	3	2	7	3	6	6	6	4	6	5	6	7
Komb. Mittel	87,5	86,0	83,2	80,8	77,6	74,3	71,7	69,4	67,9	66,9	66,5	66,0

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	75,3	78,4	75,5	73,6	67,9	70,3	63,6	65,5	66,1	66,8	66,9	64,9
2	61,1	60,1	60,8	61,8	59,9	60,1	62,1	60,4	67,9	65,8	65,1	70,2
3	66,3	64,1	63,7	60,9	62,1	61,1	70,0	76,2	70,2	75,8	79,7	81,2
4	60,2	63,4	61,5	60,1	66,4	65,3	72,3	67,9	66,1	67,6	74,2	72,7
5	62,8	62,8	64,0	65,3		66,0		69,6	67,1	74,0	72,8	70,4
6	66,0	68,5	66,0	65,3		65,5						
7	63,7	65,7	65,2	64,7								
8	62,2											
Mittel	64,7	66,1	65,2	64,5	64,1	64,6	67,0	67,9	67,5	70,0	71,7	72,0
Gewicht	8	7	7	7	4	6	4	5	5	5	5	5
Komb. Mittel	65,5	65,5	65,3	64,6	64,3	65,1	66,6	67,6	68,2	69,8	71,4	72,0

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	69,5	75,5	64,3	72,7	69,0	84,8	72,6	70,5	77,4	66,0	67,3	69,7
2	67,4	63,7	86,5	87,2	90,4	78,3	96,6	96,6	67,1	95,0	105,3	93,2
3	79,1	75,8	81,6	81,9	82,1	89,4	83,4	95,8	94,7	94,4	87,8	92,1
4	73,2	83,5	80,9	90,0	94,6	90,8	93,2	91,9	98,9	90,3	89,9	96,9
5			80,8	83,6	90,8	93,3			94,8		91,6	
6				86,8	90,0							
Mittel	72,3	74,6	78,8	83,7	86,2	87,3	86,5	88,7	86,6	86,4	88,4	88,0
Gewicht	4	4	5	6	6	5	4	4	5	4	5	4
Komb. Mittel	72,8	75,1	79,0	83,1	85,9	86,8	87,3	87,6	87,1	87,0	87,8	87,9

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	66,8	65,6	73,6	68,1	62,7	64,8	69,3	72,2	100,2	93,0	100,2	
2	100,4	92,5	94,5	84,0	90,6	84,7	76,8	74,3	70,9	63,2	64,7	
3	93,1	93,5	95,1	91,0	95,1	94,2	83,8	83,8	75,0	81,9	77,8	
4	88,9	90,1		108,3	101,6		109,5	83,8	77,1	81,2	106,9	
5		102,5						97,7	87,9	90,9		
6									104,4	107,3		
Mittel	87,3	89,0	87,7	87,9	87,5	81,2	84,9	82,4	85,9	86,3	87,4	
Gewicht	4	5	3	4	4	3	4	5	6	6	4	
Komb. Mittel	88,0	88,3	88,1	87,8	86,0	83,7	83,4	83,9	85,1	86,5	87,2	

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Höhensteig aus Höhensteig-Kampenwand.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	51,9	52,9	52,3	50,2	50,1	52,0	51,5	51,2	51,1	51,0	50,8	50,7
2	51,5	52,8	50,0	52,7	51,2	50,9	50,6	50,5	50,2	50,2	50,1	50,8
3	53,2	50,4	51,9	52,1	49,8	49,6	49,5	49,4	49,3	49,1	48,8	50,1
4	51,1		50,6	50,8	52,7	52,5	52,3	52,1	52,0	51,7	51,6	48,6
5			52,7		51,9	51,8	51,1	50,8	50,1	49,9	49,7	51,3
6			52,5		49,7	49,2	49,3	49,2	48,6		48,2	49,5
7			50,6									48,1
Mittel	51,9	52,0	51,5	51,5	50,9	51,0	50,7	50,5	50,2	50,4	49,9	49,9
Gewicht	4	3	7	4	6	6	6	6	6	5	6	7
Komb. Mittel	52,1	51,9	51,6	51,4	51,1	50,9	50,7	50,5	50,3	50,2	50,0	49,9

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	51,1	50,6	50,6	50,6	50,5	50,4	50,8	50,0	49,9	49,7	49,6	49,7
2	51,4	50,5	50,5	50,4	50,0	50,4	50,0	49,2	49,2	49,7	49,7	49,8
3	50,7	50,4	50,2	50,4	47,7	50,0	49,3	50,2	48,0	49,2	49,7	48,1
4	49,9	49,6	49,5	49,5	48,4	47,7	47,8	48,5	50,2	47,9	48,1	50,5
5	48,5	48,1	47,9	47,8		50,5	48,6		48,5	50,6	50,5	48,5
6	51,3	51,1	51,0	50,9		48,7				48,4	48,4	
7	49,2	49,0	49,1	48,7								
8	48,1											
Mittel	50,0	49,9	49,8	49,8	49,2	49,6	49,3	49,5	49,2	49,3	49,3	49,3
Gewicht	8	7	7	7	4	6	5	4	5	6	6	5
Komb. Mittel	50,0	49,9	49,8	49,7	49,5	49,4	49,4	49,4	49,3	49,3	49,3	49,3

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	50,0	50,4	51,8	51,6	51,7	51,7	52,0	52,0	52,5	52,2	52,3	52,5
2	49,8	50,0	50,6	50,9	51,3	51,4	51,5	51,6	52,1	51,7	52,1	51,9
3	48,4	51,0	50,3	50,5	50,5	50,7	50,9	49,3	51,8	51,1	51,4	51,4
4	48,8	48,9	48,9	49,0	49,3	49,3	49,3	52,5	49,8	49,8	48,8	48,8
5			51,4	51,7	52,3	52,5	50,5	50,7	52,4	53,2	53,2	53,3
6			49,5	49,5	49,8	50,2				51,0	51,2	
Mittel	49,3	50,1	50,4	50,5	50,8	51,0	50,8	51,2	51,7	51,5	51,5	51,6
Gewicht	4	4	6	6	6	6	5	5	5	6	6	5
Komb. Mittel	49,5	50,0	50,4	50,6	50,8	50,9	51,0	51,2	51,5	51,6	51,5	51,5

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	52,6	52,6	52,6	52,6	52,7	52,7	52,8	52,9	52,0	52,0	52,0	51,8
2	51,8	51,9	51,6	51,9	51,9	48,8	50,7	51,5	53,0	53,2	53,6	54,1
3	51,5	51,6	51,9	48,5	48,9	53,7	49,4	51,9	50,4	50,6	51,8	51,7
4	48,7	48,7	48,7	53,7	51,6		52,1	50,0	51,9	51,9	51,7	
5		53,6	51,8					53,7	50,6	50,6		
6		51,6							51,9	53,8		
Mittel	51,1	51,7	51,3	51,7	51,3	51,7	51,3	52,0	51,6	52,0	52,3	52,5
Gewicht	4	6	5	4	4	3	4	5	6	6	4	3
Komb. Mittel	51,4	51,5	51,5	51,5	51,5	51,5	51,6	51,7	51,8	52,0	52,3	52,3

D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Kampenwand aus Höhensteig-Kampenwand.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	50,4	51,3	50,8	48,7	48,7	50,5	50,0	49,7	49,6	49,5	49,3	49,2
2	50,0	51,3	48,5	51,2	49,8	49,5	49,2	49,1	48,8	48,7	48,6	49,3
3	51,7	49,0	50,4	50,5	48,4	48,2	48,1	80,0	47,9	47,7	47,4	48,7
4	49,6		49,2	49,3	51,2	50,9	50,8	50,6	50,5	50,2	50,1	47,2
5			51,2		50,4	50,3	49,7	49,3	48,7	48,4	48,2	49,8
6			51,0		48,3	47,8	47,9	47,8	47,2		46,8	48,1
7			49,2									46,7
Mittel	50,4	50,5	50,0	49,9	49,5	49,5	49,3	49,1	48,8	48,9	48,4	48,4
Gewicht	4	3	7	4	6	6	6	6	6	5	6	7
Komb. Mittel	50,6	50,4	50,1	49,8	49,6	49,5	49,3	49,1	48,9	48,8	48,5	48,5

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	49,6	49,1	49,1	49,1	49,0	49,0	49,3	48,5	48,4	48,2	48,1	48,3
2	49,9	49,0	49,0	49,0	48,6	48,9	48,5	47,7	47,7	48,3	48,3	48,4
3	49,2	49,0	48,7	48,9	46,3	48,6	47,8	48,8	46,6	47,8	48,3	46,7
4	48,5	48,2	48,1	48,1	47,0	46,3	46,5	47,1	48,7	46,5	46,7	49,0
5	47,1	46,7	46,5	46,5		49,1	47,2		47,1	49,1	49,0	47,1
6	49,8	49,6	49,5	49,4		47,3				47,0	47,0	
7	47,8	47,7	47,6	47,3								
8	46,7											
Mittel	48,6	48,5	48,3	48,3	47,7	48,2	47,9	48,0	47,7	47,8	47,9	47,9
Gewicht	8	7	7	7	4	6	5	4	5	6	6	5
Komb. Mittel	48,5	48,5	48,4	48,2	48,0	48,0	48,0	47,9	47,8	47,8	47,9	47,9

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	48,6	48,9	50,3	50,1	50,2	50,2	50,5	50,5	51,0	50,7	50,8	51,0
2	48,4	48,6	49,1	49,4	49,8	50,0	50,0	50,1	50,6	50,2	50,6	50,4
3	47,0	49,5	48,9	49,1	49,1	49,2	49,5	47,9	50,3	49,7	49,9	49,9
4	47,4	47,5	47,5	47,6	47,8	47,8	47,9	51,0	48,3	48,4	47,4	47,4
5			49,9	50,2	50,8	51,0	49,0	49,3	50,9	51,6	51,6	51,8
6			48,0	48,1	48,4	48,7				49,5	49,7	
Mittel	47,9	48,6	49,0	49,1	49,4	49,5	49,4	49,8	50,2	50,0	50,0	50,1
Gewicht	4	4	6	6	6	6	5	5	5	6	6	5
Komb. Mittel	48,1	48,5	48,9	49,2	49,4	49,5	49,5	49,8	50,1	50,1	50,0	50,0

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	51,0	51,1	51,1	51,1	51,2	51,2	51,3	51,4	50,5	50,5	50,5	50,3
2	50,3	50,4	50,4	50,4	50,4	47,4	49,2	50,0	51,5	51,7	52,1	52,6
3	50,0	50,1	50,1	47,1	47,5	52,1	48,0	50,4	48,9	49,1	50,3	50,3
4	47,3	47,3	47,3	52,2	50,1		50,6	48,6	50,4	50,4	50,3	
5		52,0	50,3					52,1	49,1	49,1		
6		50,1							50,4	52,3		
Mittel	49,7	50,2	49,8	50,2	49,8	50,2	49,8	50,5	50,2	50,5	50,8	51,1
Gewicht	4	6	5	4	4	3	4	5	6	6	4	3
Komb. Mittel	49,9	50,0	50,0	50,0	50,0	50,0	50,1	50,3	50,4	50,5	50,8	50,9

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen für Höhensteig-Kampenwand.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	— 3,8	— 2,5	— 1,2	— 2,5	— 3,1	— 0,8	— 0,9	— 0,9	— 1,0	— 1,0	— 1,1	— 2,6
2	— 2,5	— 4,3	— 3,1	— 2,5	— 1,2	— 1,8	— 1,7	— 1,5	— 1,0	— 1,2	— 1,8	— 1,2
3	— 4,2		— 2,5	— 3,7	— 2,7	— 2,7	— 2,4	— 2,1	— 2,6	— 2,2	— 1,9	— 0,8
4			— 3,0		— 1,7	— 1,9	— 1,7	— 2,2	— 1,6	— 1,5	— 1,4	— 1,5
5			— 2,7		— 2,6	— 2,7	— 2,5		— 2,1	— 1,6	— 1,7	— 1,7
6			— 4,0		— 3,8	— 3,2	— 3,0		— 2,1		— 1,4	— 1,4
7			— 3,9									— 1,4
Mittel	— 3,5	— 3,4	— 2,9	— 2,9	— 2,5	— 2,2	— 2,0	— 1,7	— 1,7	— 1,5	— 1,5	— 1,5
Gewicht	3	2	7	3	6	6	6	4	6	5	6	7
Komb. Mittel	— 3,5	— 3,3	— 3,0	— 2,8	— 2,5	— 2,2	— 2,0	— 1,8	— 1,7	— 1,6	— 1,5	— 1,5

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	— 2,3	— 2,7	— 2,4	— 2,2	— 4,1	— 4,0	— 1,3	— 1,4	— 1,5	— 1,6	— 1,6	— 1,4
2	— 0,8	— 0,9	— 0,9	— 1,0	— 0,9	— 0,9	— 1,1	— 1,0	— 1,7	— 1,6	— 1,4	— 1,9
3	— 1,5	— 1,3	— 1,2	— 0,9	— 1,3	— 1,0	— 2,1	— 2,3	— 2,1	— 2,7	— 3,0	— 3,2
4	— 0,9	— 1,3	— 1,1	— 1,0	— 1,7	— 1,7	— 2,3	— 1,8	— 1,5	— 1,6	— 2,2	— 2,1
5	— 1,3	— 1,3	— 1,5	— 1,6		— 1,3		— 2,0	— 1,7	— 2,4	— 2,3	— 2,1
6	— 1,4	— 1,7	— 1,4	— 1,3		— 1,6						
7	— 1,3	— 1,6	— 1,5	— 1,5								
8	— 1,3											
Mittel	— 1,4	— 1,5	— 1,4	— 1,4	— 2,0	— 1,7	— 1,7	— 1,7	— 1,7	— 2,0	— 2,1	— 2,1
Gewicht	8	7	7	7	4	6	4	5	5	5	5	5
Komb. Mittel	— 1,5	— 1,5	— 1,4	— 1,6	— 1,8	— 1,8	— 1,7	— 1,7	— 1,8	— 2,0	— 2,1	— 2,1

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	— 1,8	— 2,4	— 1,1	— 2,0	— 1,8	— 3,2	— 2,0	— 1,8	— 2,4	— 1,4	— 1,4	— 1,6
2	— 1,7	— 2,3	— 3,5	— 3,5	— 3,8	— 2,6	— 4,4	— 4,4	— 1,5	— 4,2	— 5,2	— 4,1
3	— 2,9	— 2,4	— 3,2	— 3,1	— 3,0	— 4,9	— 3,1	— 4,5	— 4,2	— 4,3	— 3,5	— 4,2
4	— 2,3	— 3,3	— 2,8	— 4,0	— 4,4	— 3,7	— 4,1	— 3,9	— 4,8	— 3,6	— 4,0	— 4,2
5			— 3,0	— 3,1	— 3,7	— 4,2			— 4,1		— 3,7	
6				— 3,6	— 3,9							
Mittel	— 2,2	— 2,6	— 2,7	— 3,2	— 3,5	— 3,7	— 3,4	— 3,7	— 3,4	— 3,4	— 3,6	— 3,5
Gewicht	4	4	5	6	6	5	4	4	5	4	5	4
Komb. Mittel	— 2,3	— 2,5	— 2,8	— 3,2	— 3,5	— 3,6	— 3,6	— 3,6	— 3,5	— 3,5	— 3,5	— 3,6

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	— 1,4	— 1,2	— 2,0	— 1,7	— 0,9	— 1,2	— 1,6	— 1,9	— 4,7	— 4,1	— 4,7	
2	— 4,7	— 3,9	— 4,1	— 3,1	— 3,7	— 3,5	— 2,5	— 2,2	— 1,7	— 1,0	— 1,0	
3	— 4,1	— 4,0	— 4,5	— 4,1	— 4,5	— 3,9	— 4,3	— 3,0	— 2,5	— 3,1	— 2,5	
4	— 4,0	— 4,1		— 5,3	— 4,9		— 5,6	— 4,2	— 2,4	— 2,8	— 5,4	
5		— 4,7						— 4,3	— 3,6	— 3,9		
6									— 5,1	— 5,2		
Mittel	— 3,6	— 3,6	— 3,5	— 3,5	— 3,5	— 2,9	— 3,5	— 3,2	— 3,3	— 3,7	— 3,4	
Gewicht	4	5	3	4	4	3	4	5	6	6	4	
Komb. Mittel	— 3,6	— 3,6	— 3,5	— 3,5	— 3,4	— 3,2	— 3,3	— 3,3	— 3,4	— 3,5	— 3,5	

F. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der mittleren absoluten Temperatur für Höhensteig-Kampenwand.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	283,3	284,3	281,9	282,2	283,1	282,6	283,2	283,4	284,5	285,3	286,2	286,8
2	281,9	281,9	284,3	282,8	284,5	284,8	284,9	285,4	285,9	285,3	285,7	286,2
3	283,1	283,1	282,0	285,3	283,6	283,6	283,0	283,0	282,2	282,8	282,3	282,5
4	288,9	290,4	284,0	292,0	285,6	285,0	286,1	287,0	287,4	287,5	288,1	288,1
5	287,5	285,8	290,8	286,5	291,1	290,5	289,8	290,7	289,6	289,8	289,7	289,7
6	290,0	288,4	285,9	290,8	288,0	289,8	290,4	290,1	290,8	291,2	291,3	291,2
7	284,2	288,7	290,3	289,1	291,5	291,9	292,7	292,6	293,1	294,0	294,9	295,1
8	288,5	285,3	289,6	283,8	289,0	289,3	289,8	289,3	288,5	290,6	289,8	286,7
9		289,6	283,7	286,6	283,7	284,0	284,2	284,5	290,0	285,4	285,9	291,7
10			285,8	289,5	286,9	287,1	288,3	288,8	294,3	290,9	291,4	294,2
11			289,5		291,3	292,3	292,3	293,0		294,3	294,5	
Mittel	285,9	286,4	286,2	286,9	287,1	287,4	287,7	288,0	288,6	288,8	289,1	289,2
Gewicht	8	9	11	10	11	11	11	11	10	11	11	10
Komb. Mittel	286,2	286,2	286,4	286,8	287,1	287,4	287,7	288,1	288,5	288,8	289,1	289,3

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	286,4	286,2	286,5	287,5	288,0	288,3	287,5	286,9	286,3	286,3	285,4	284,9
2	286,6	284,7	285,9	286,8	286,8	286,5	286,5	285,7	285,2	291,6	291,4	290,8
3	283,3	288,7	284,8	285,1	285,8	285,6	285,5	285,5	292,5	291,8	292,0	290,9
4	288,6	296,1	289,8	289,5	290,6	290,8	290,8	291,1	291,7	293,4	292,2	291,3
5	289,3	287,5	292,0	292,1	291,8	292,6	293,0	292,9	293,4	296,2	295,6	295,5
6	291,8	292,8	296,1	296,7	296,8	297,1	296,3	296,3	295,9	295,9	296,2	288,6
7	296,3		288,2	288,7	288,7	289,1	289,2	289,4	289,9			296,0
8	290,1		293,1	293,7	294,6	294,3	294,5	294,7	295,6			
9	287,1											
10	292,2											
11	293,7											
Mittel	289,6	289,3	289,6	290,0	290,4	290,5	290,4	290,3	291,3	292,5	292,1	291,1
Gewicht	11	6	8	8	8	8	8	8	8	6	6	7
Komb. Mittel	289,4	289,5	289,6	290,0	290,3	290,5	290,4	290,6	291,4	292,1	292,0	291,2

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	284,4	283,9	293,8	283,1	283,3	283,2	282,7	282,8	283,0	282,7	282,4	282,4
2	290,2	289,6	286,5	293,4	287,6	287,6	287,5	287,2	286,9	287,4	287,0	287,6
3	290,6	290,2	291,8	285,8	289,4	289,3	288,6	288,0	287,7	288,0	287,9	288,1
4	291,0	294,1		291,5	293,0	293,1	293,3	293,1	292,4	292,3	293,8	293,6
5	294,9	287,5			284,8	284,5	289,8	284,5	284,5	283,5	283,5	283,3
6	288,1	292,9			291,1	290,5		289,3	289,1	289,7	288,6	
7	295,0											
Mittel	290,6	289,7	290,7	288,5	288,2	288,0	288,4	287,5	287,3	287,3	287,2	287,0
Gewicht	7	6	3	4	6	6	5	6	6	6	6	5
Komb. Mittel	290,5	290,2	289,9	289,0	288,2	288,2	288,1	287,7	287,4	287,3	287,2	287,1

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	282,7	282,6	282,9	283,1	282,9	282,9	283,1	283,0	283,1	283,8	283,3	283,4
2	287,7	288,3	288,1	288,0	288,2	287,3	287,2	287,3	289,8	287,2	288,7	282,6
3	288,2	293,9	288,6	288,6	293,7	293,6	292,7	291,6	287,2	290,7	287,1	288,5
4	294,0	283,1	293,9	294,3	283,6	283,8	283,2	283,1	290,7	283,1	290,1	287,6
5	283,1	288,0	283,2	283,4	287,8		286,9		283,1		283,0	289,4
6			287,5						287,2		287,5	287,5
Mittel	287,1	287,1	287,4	287,5	287,2	286,9	286,6	286,3	286,8	287,5	286,6	286,5
Gewicht	5	5	6	5	5	4	5	4	6	4	6	6
Komb. Mittel	287,1	287,2	287,4	287,4	287,2	286,9	286,6	286,5	286,9	287,1	286,8	286,4

Tafel Nr. 2.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Kampenwand und Höhensteig.

A. Beobachtet auf Kampenwand.

Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ
	1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
1	16. Vm 9.30	629,8	279,1	32,6	46,0	47,4	+1,1	43	18. Nm 9.—	629,0	278,4	39,2	46,1	47,5	+0,4
2	„ 10.30	629,6	280,6	30,0	45,4	46,8	+1,3	44	„ 9.30	629,3	278,6	34,0	46,1	47,5	+0,9
3	„ 11.—	629,4	281,6	31,9	45,1	46,5	+1,0	45	„ 10.—	629,6	278,6	34,1	46,1	47,5	+0,9
4	„ 11.30	629,4	281,9	31,3	45,0	46,4	+1,1	46	„ 10.30	629,8	278,5	34,4	46,2	47,6	+0,9
5	„ 12.—	629,2	282,3	30,6	44,8	46,2	+1,1	47	„ 11.—	629,8	278,6	34,9	46,1	47,5	+0,8
6	16. Nm 1.—	629,2	281,1	27,4	45,2	46,6	+1,5	48	„ 11.30	630,0	278,8	34,1	46,1	47,5	+0,9
7	„ 1.30	629,1	283,1	30,1	44,6	45,9	+1,2	49	„ 12.—	629,8	278,4	39,6	46,2	47,6	+0,4
8	„ 2.—	628,9	284,2	33,6	44,2	45,5	+0,8	50	19. Vm 12.30	630,0	278,3	33,6	46,3	47,8	+1,0
9	„ 4.—	628,4	282,2	30,3	44,8	46,1	+1,2	51	„ 1.—	630,3	278,3	34,9	46,3	47,7	+0,8
10	„ 4.30	628,3	282,1	33,7	44,8	46,1	+0,8	52	„ 1.30	630,6	278,2	32,9	46,4	47,8	+1,1
11	„ 5.—	628,3	280,7	31,6	45,2	46,6	+1,1	53	„ 2.—	631,2	278,3	34,3	46,4	47,9	+0,9
12	„ 7.30	628,2	279,3	38,2	45,7	47,1	+0,5	54	„ 2.30	631,5	278,3	33,6	46,5	47,9	+1,0
13	„ 8.—	628,3	279,7	40,0	45,5	46,9	+0,3	55	„ 3.—	631,6	278,1	33,1	46,5	48,0	+1,1
14	„ 8.30	628,2	279,6	38,9	45,5	46,9	+0,4	56	„ 3.30	631,6	278,2	33,1	46,5	47,9	+1,1
15	„ 9.—	628,1	279,6	39,4	45,5	46,9	+0,3	57	„ 4.—	631,8	278,2	32,7	46,5	48,0	+1,1
16	„ 9.30	628,0	279,7	45,7	45,5	46,9	−0,2	58	„ 4.30	632,6	278,2	34,9	46,7	48,1	+0,9
17	„ 10.—	627,9	280,3	37,5	45,3	46,7	+0,5	59	„ 5.—	632,6	278,2	32,9	46,7	48,1	+1,1
18	„ 10.30	628,0	279,7	37,4	45,5	46,9	+0,5	60	„ 5.30	632,6	278,2	32,1	46,7	48,0	+1,2
19	„ 11.—	627,8	279,3	41,0	45,6	47,0	+0,2	61	„ 6.—	632,8	278,6	32,3	46,6	48,0	+1,1
20	„ 11.30	627,8	279,4	41,9	45,6	47,0	+0,1	62	„ 6.30	632,9	278,7	30,4	46,5	48,0	+1,3
21	„ 12.—	627,8	279,6	39,8	45,5	46,9	+0,3	63	„ 7.30	633,0	280,6	32,6	45,9	47,3	+1,0
22	17. Vm 12.30	627,6	279,8	39,9	45,4	46,8	+0,3	64	„ 8.—	633,2	280,3	29,6	46,0	47,5	+1,4
23	„ 1.—	627,3	279,8	36,8	45,4	46,8	+0,7	65	„ 9.—	633,1	281,1	32,4	45,8	47,2	+1,2
24	„ 1.30	627,1	280,3	40,9	45,2	46,6	+0,2	66	„ 9.30	633,1	281,9	32,7	45,5	46,9	+1,0
25	„ 2.—	627,0	280,1	43,9	45,2	46,6	−0,2	67	„ 10.—	633,0	282,6	29,5	45,3	46,7	+1,3
26	„ 2.30	626,8	280,4	34,8	45,1	46,5	+0,8	68	„ 10.30	633,0	282,6	30,0	45,3	46,7	+1,2
27	„ 3.30	626,5	280,3	38,8	45,1	46,5	+0,3	69	„ 11.—	632,9	283,2	31,4	45,1	46,5	+1,1
28	„ 4.—	626,0	280,2	37,2	45,0	46,4	+0,5	70	„ 12.—	633,4	284,1	32,5	44,9	46,2	+0,9
29	„ 4.30	626,0	280,3	39,2	45,0	46,4	+0,3	71	19. Nm 1.—	633,2	285,1	29,9	44,5	45,9	+1,3
30	„ 5.—	625,9	280,6	38,0	44,9	46,3	+0,4	72	„ 1.30	633,1	285,2	34,2	44,5	45,8	+0,7
31	18. Nm 12.30	625,9	278,6	27,3	45,6	47,0	+1,0	73	„ 2.30	632,9	286,8	33,6	44,0	45,3	+0,8
32	„ 1.—	625,9	278,7	30,3	45,5	46,9	+1,2	74	„ 3.—	633,1	286,7	32,8	44,0	45,4	+0,8
33	„ 1.30	626,0	278,7	28,7	45,5	46,9	+1,4	75	„ 3.30	633,1	287,1	33,9	43,9	45,2	+0,7
34	„ 2.—	626,0	280,0	30,6	45,1	46,5	+1,2	76	„ 4.—	633,1	289,9	32,4	43,0	44,4	+0,8
35	„ 2.30	626,1	280,3	33,5	45,0	46,4	+0,9	77	„ 4.30	633,1	287,9	33,7	43,6	45,0	+0,7
36	„ 3.—	626,1	279,9	30,9	45,2	46,5	+1,2	78	„ 5.30	633,0	286,6	35,9	44,0	45,4	+0,5
37	„ 3.30	626,0	279,4	31,4	45,3	46,7	+1,1	79	„ 8.—	633,3	284,6	41,0	44,7	46,1	+0,1
38	„ 5.—	626,2	278,3	32,6	45,7	47,1	+1,0	80	„ 8.30	633,3	285,2	38,7	44,5	45,9	+0,3
39	„ 5.30	626,3	278,4	33,0	45,7	47,1	+1,0	81	„ 9.—	633,2	285,1	36,2	44,5	45,9	+0,6
40	„ 6.—	626,5	278,6	35,9	45,6	47,0	+0,7	82	„ 9.30	633,3	284,8	37,9	44,6	46,0	+0,4
41	„ 8.—	628,8	278,6	33,8	46,0	47,4	+0,9	83	„ 10.—	633,3	284,8	38,3	44,6	46,0	+0,4
42	„ 8.30	628,8	278,6	35,4	46,0	47,4	+0,8	84	„ 10.30	633,4	285,3	39,2	44,5	45,9	+0,2

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	^{0}C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	^{0}C	Sec	Sec	Sec	m
85	19. Nm	11.—	633,1	285,8	38,6	44,3	45,7	+0,4	137	23. Vm	1.—	633,0	288,1	43,9	43,6	44,9	—0,3
86	„	11.30	633,3	286,3	36,8	44,2	45,5	+0,4	138	„	1.30	633,2	288,2	46,1	43,6	44,9	—0,5
87	„	12.—	633,2	286,4	44,4	44,2	45,5	—0,3	139	„	2.—	633,5	287,4	39,0	43,9	45,2	+0,2
88	20. Vm	12.30	633,5	286,8	38,4	44,0	45,4	+0,3	140	„	2.30	633,5	285,6	40,9	44,4	45,8	+0,1
89	„	1.—	633,7	286,6	40,0	44,1	45,5	+0,1	141	„	3.—	633,6	285,3	37,2	44,5	45,9	+0,4
90	„	3.—	633,3	286,1	44,1	44,2	45,6	—0,3	142	„	4.—	633,6	285,4	42,7	44,5	45,9	—0,1
91	„	3.30	633,4	286,3	35,4	44,2	45,5	+0,7	143	„	4.30	633,5	285,1	41,6	44,6	45,9	±0,0
92	„	4.—	633,0	286,8	39,3	44,0	45,3	+0,2	144	„	5.—	633,4	285,1	36,7	44,6	45,9	+0,5
93	„	4.30	632,7	285,2	38,8	44,4	45,8	+0,3	145	„	5.30	633,4	285,2	34,1	44,5	45,9	+0,8
94	„	5.—	633,2	285,4	32,8	44,4	45,8	+0,9	146	„	6.—	633,4	284,8	33,6	44,6	46,1	+0,8
95	„	6.—	633,1	286,9	35,3	44,0	45,3	+0,6	147	„	6.30	633,5	285,7	32,6	44,4	45,7	+1,0
96	„	6.30	633,0	286,9	30,1	43,9	45,3	+1,1	148	„	7.—	633,1	288,2	29,9	43,6	44,9	+1,1
97	„	7.—	632,9	287,3	32,6	43,8	45,1	+0,8	149	„	7.30	633,1	287,7	33,8	43,7	45,1	+0,7
98	„	7.30	632,9	289,1	29,7	43,3	44,6	+1,1	150	„	8.—	633,4	288,1	32,6	43,6	45,0	+0,8
99	„	8.—	633,1	288,2	31,3	43,6	44,9	+0,9	151	„	8.30	633,3	288,4	33,0	43,5	44,9	+0,8
100	„	8.30	633,3	288,1	32,2	43,6	44,9	+0,9	152	„	9.—	633,3	289,7	31,3	43,1	44,5	+0,9
101	„	9.30	633,3	287,7	32,7	43,7	45,1	+1,0	153	„	9.30	633,0	289,3	33,2	43,2	44,5	+0,7
102	„	10.—	633,6	287,2	33,8	43,9	45,3	+0,8	154	„	10.—	633,0	289,7	33,0	43,1	44,4	+0,7
103	„	11.—	633,9	286,3	36,6	44,2	45,6	+0,5	155	„	10.30	633,3	290,9	33,6	42,8	44,1	+0,6
104	20. Nm	4.30	634,4	287,7	34,7	43,9	45,2	+0,6	156	„	11.—	633,3	291,7	31,8	42,5	43,8	+0,8
105	„	5.—	634,5	287,7	31,1	43,9	45,2	+1,0	157	„	11.30	633,7	291,8	32,3	42,6	43,9	+0,7
106	22. Vm	6.—	634,0	281,9	37,7	45,6	47,0	+0,6	158	„	12.—	633,5	293,8	29,3	42,0	43,3	+1,0
107	„	6.30	634,0	281,9	30,8	45,6	47,0	+1,2	159	23. Nm	12.30	633,1	292,4	30,6	42,3	43,6	+0,9
108	„	7.—	634,0	281,9	38,5	45,6	47,1	+0,4	160	„	1.—	633,0	291,8	30,4	42,5	43,8	+0,9
109	„	7.30	634,0	282,9	35,8	45,3	46,7	+0,7	161	„	1.30	632,9	292,9	29,1	42,1	43,4	+1,0
110	„	8.—	633,9	284,3	30,5	44,9	46,2	+1,1	162	„	2.—	632,9	292,8	29,4	42,1	43,5	+1,0
111	„	8.30	633,9	286,8	29,9	44,1	45,4	+1,1	163	„	2.30	632,7	293,6	29,1	41,9	43,2	+1,0
112	„	9.—	633,9	287,1	29,5	44,0	45,4	+1,2	164	„	4.—	632,6	292,2	36,4	42,3	43,6	+0,3
113	„	9.30	633,9	286,3	35,5	44,2	45,6	+0,6	165	„	5.—	632,2	292,2	38,2	42,2	43,5	+0,1
114	„	10.—	633,8	286,9	32,8	44,0	45,4	+0,8	166	„	5.30	632,0	292,2	37,6	42,2	43,5	+0,2
115	„	10.30	633,7	287,5	33,3	43,9	45,2	+0,8	167	„	6.—	631,7	291,9	39,5	42,3	43,6	±0,0
116	„	11.—	633,6	287,5	34,3	43,9	45,2	+0,7	168	„	6.30	631,4	291,9	37,8	42,2	43,5	+0,1
117	„	11.30	633,4	287,5	30,7	43,8	45,2	+1,1	169	„	7.—	631,4	291,7	35,7	42,3	43,6	+0,4
118	„	12.—	633,9	288,2	33,2	43,7	45,0	+0,8	170	„	7.30	631,4	291,4	36,3	42,4	43,7	+0,3
119	22. Nm	1.—	633,8	287,6	33,0	43,8	45,2	+0,8	171	„	8.—	631,4	291,4	34,5	42,4	43,7	+0,5
120	„	1.30	633,6	287,8	34,4	43,8	45,1	+0,7	172	„	8.30	631,2	291,6	34,8	42,3	43,6	+0,5
121	„	2.—	633,5	287,8	32,4	43,7	45,1	+0,9	173	„	9.—	631,4	292,1	34,4	42,2	43,5	+0,5
122	„	2.30	633,4	288,2	33,5	43,6	44,9	+0,7	174	„	9.30	631,1	291,7	35,7	42,2	43,5	+0,5
123	„	3.30	633,3	288,8	31,2	43,4	44,7	+1,0	175	„	10.—	631,3	291,7	34,0	42,3	43,6	+0,7
124	„	4.—	633,2	289,9	27,9	43,1	44,4	+1,2	176	„	10.30	631,1	291,8	31,9	42,2	43,5	+0,8
125	„	4.30	633,2	289,9	27,9	43,1	44,4	+1,2	177	„	11.—	631,0	291,8	32,8	42,2	43,5	+0,7
126	„	5.—	633,1	288,9	31,8	43,3	44,7	+0,9	178	„	11.30	630,0	291,4	31,7	42,2	43,5	+0,8
127	„	5.30	633,2	287,6	31,6	43,8	45,1	+0,9	179	„	12.—	630,0	291,9	35,0	42,0	43,3	+0,4
128	„	6.—	633,1	286,9	30,3	44,0	45,3	+1,1	180	24. Vm	12.30	629,5	291,7	36,6	42,0	43,3	+0,3
129	„	6.30	633,2	285,9	30,2	44,3	45,6	+1,1	181	„	1.—	629,6	291,7	36,2	42,0	43,3	+0,3
130	„	8.—	633,6	285,8	35,9	44,4	45,7	+0,6	182	„	1.30	630,6	291,9	34,3	42,1	43,4	+0,5
131	„	8.30	633,4	285,9	39,0	44,3	45,7	+0,2	183	„	2.—	630,4	291,9	35,6	42,1	43,4	+0,4
132	„	9.—	633,6	285,4	37,9	44,5	45,9	+0,4	184	„	3.—	630,6	291,1	42,2	42,4	43,7	+0,7
133	„	10.—	632,8	284,4	39,5	44,7	46,1	+0,2	185	„	3.30	630,8	290,6	44,0	42,5	43,8	—0,4
134	„	10.30	632,7	285,3	45,5	44,4	45,8	—0,4	186	„	4.—	630,9	290,3	46,3	42,6	43,9	—0,6
135	„	11.—	632,5	285,8	42,8	44,2	45,6	—0,2	187	„	4.30	631,1	290,4	44,9	42,6	43,9	—0,5
136	„	11.30	632,5	286,2	43,7	44,1	45,4	—0,2	188	„	5.30	631,7	288,8	39,0	43,2	44,5	+0,1

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
189	24. Vm	6.—	631,8	289,1	37,8	43,1	44,4	+0,3	241	26. Vm	9.—	633,0	285,1	32,7	44,5	45,9	+1,0
190	„	6.30	631,5	285,9	45,4	43,0	44,4	−0,4	242	„	9.30	632,9	285,2	32,9	44,5	45,8	+0,9
191	24. Nm	3.30	633,2	282,1	32,2	45,5	46,9	+1,1	243	„	10.	632,9	285,9	34,9	44,2	45,6	+0,7
192	25. Vm	7.30	634,2	279,8	32,0	46,4	47,8	+1,2	244	„	10.30	632,8	286,9	31,4	43,9	45,3	+1,0
193	„	8.—	634,2	279,4	31,9	46,5	47,9	+1,2	245	„	11.—	632,8	287,3	31,6	43,8	45,1	+0,9
194	„	8.30	634,4	279,4	28,5	46,5	48,0	+1,3	246	„	11.30	633,0	287,6	30,1	43,7	45,1	+1,1
195	„	9.—	634,4	279,3	33,6	46,6	48,0	+1,0	247	„	12.—	633,0	287,8	32,7	43,7	45,1	+0,8
196	„	9.30	634,4	279,4	31,9	46,5	48,0	+1,2	248	26. Nm	12.30	632,9	288,8	33,1	43,3	44,7	+0,7
197	„	10.—	634,5	279,4	30,1	46,5	48,0	+1,4	249	„	1.—	632,9	289,2	35,1	43,2	44,6	+0,5
198	„	10.30	634,3	279,9	29,5	46,4	47,8	+1,4	250	„	1.30	632,9	289,3	35,2	43,2	44,6	+0,5
199	„	11.—	634,4	280,7	31,8	46,1	47,5	+1,1	251	„	2.—	632,8	290,4	35,4	42,9	44,2	+0,6
200	„	11.30	634,4	281,7	29,8	45,8	47,2	+1,3	252	„	2.30	632,5	290,6	35,2	42,8	44,1	+0,5
201	„	12.—	634,3	282,3	28,9	45,6	47,0	+1,4	253	„	3.—	632,5	291,1	32,2	42,6	43,9	+0,8
202	25. Nm	12.30	634,2	282,7	32,3	45,5	46,8	+1,0	254	„	3.30	632,5	291,1	34,9	42,6	43,9	+0,5
203	„	1.—	634,4	283,7	29,6	45,1	46,5	+1,3	255	„	4.—	632,4	293,2	34,0	42,0	43,3	+0,5
204	„	1.30	634,3	284,6	31,7	44,8	46,2	+1,0	256	„	4.30	632,3	293,4	39,0	41,9	43,2	+0,0
205	„	2.—	634,2	283,8	32,6	45,1	46,5	+1,0	257	„	5.—	632,1	294,2	38,6	41,7	42,9	+1,0
206	„	2.30	634,1	284,4	30,9	44,9	46,2	+1,1	258	„	5.30	631,7	294,2	30,6	41,6	42,9	+0,8
207	„	3.—	634,0	284,6	32,1	44,8	46,2	+1,0	259	„	6.—	631,8	293,2	31,1	41,9	43,2	+0,8
208	„	3.30	633,7	284,3	31,3	44,8	46,2	+1,1	260	„	6.30	631,8	289,3	31,0	43,0	44,4	+0,9
209	„	4.—	633,5	285,3	30,7	44,5	45,9	+1,1	261	„	7.—	631,9	288,7	30,9	43,2	44,6	+1,0
210	„	4.30	633,7	284,9	32,0	44,7	46,0	+1,0	262	„	7.30	631,9	288,3	31,3	43,4	44,7	+0,9
211	„	5.—	633,7	284,1	33,6	44,9	46,3	+0,8	263	„	8.—	631,9	288,4	32,4	43,3	44,6	+0,8
212	„	5.30	633,6	283,7	33,3	45,0	46,4	+0,9	264	„	8.30	632,0	288,3	33,9	43,4	44,7	+0,7
213	„	6.—	633,5	283,3	33,7	45,1	46,5	+0,9	265	„	9.—	632,1	287,7	35,8	43,6	44,9	+0,5
214	„	7.—	633,5	282,1	35,2	45,5	46,9	+0,7	266	„	9.30	632,1	287,4	37,6	43,7	45,0	+0,3
215	„	7.30	633,6	281,7	37,0	45,7	47,1	+0,6	267	„	10.—	632,0	287,3	36,1	43,7	45,0	+0,5
216	„	8.—	633,5	281,2	36,0	45,8	47,2	+0,7	268	„	10.30	631,8	288,9	34,1	43,2	44,5	+0,6
217	„	8.30	633,6	281,1	38,0	45,9	47,3	+0,5	269	„	11.—	631,7	287,4	36,1	43,6	44,9	+0,5
218	„	9.—	633,3	281,1	38,0	45,8	47,2	+0,5	270	„	11.30	631,7	287,6	34,8	43,5	44,9	+0,6
219	„	9.30	633,4	281,1	35,5	45,8	47,2	+0,8	271	„	12.—	631,7	287,3	35,9	43,6	45,0	+0,5
220	„	10.—	633,3	281,2	39,2	45,8	47,2	+0,4	272	27. Vm	12.30	631,6	287,1	35,9	43,7	45,0	+0,5
221	„	10.30	633,3	281,2	39,5	45,8	47,2	+0,3	273	„	1.—	631,7	286,7	40,1	43,8	45,2	+0,1
222	„	11.—	633,3	281,2	39,0	45,8	47,2	+0,4	274	„	1.30	631,5	286,8	46,6	43,8	45,1	−0,6
223	„	11.30	633,5	281,2	40,8	45,8	47,2	+0,2	275	„	2.—	631,6	286,8	44,4	43,8	45,1	−0,4
224	„	12.—	633,3	281,4	38,1	45,7	47,1	+0,5	276	„	2.30	631,3	286,8	40,5	43,7	45,1	+0,0
225	26. Vm	12.30	633,3	281,4	48,7	45,7	47,1	−0,6	277	„	3.—	631,1	286,8	34,9	43,7	45,0	+0,6
226	„	1.—	633,2	281,5	46,9	45,7	47,1	−0,4	278	„	3.30	631,1	286,8	38,1	43,7	45,0	+0,3
227	„	2.—	633,2	282,1	41,3	45,5	46,9	+0,1	279	„	4.—	630,8	286,8	39,7	43,7	45,0	+0,1
228	„	2.30	633,0	281,9	41,2	45,5	46,9	+0,2	280	„	5.30	630,0	287,1	37,6	43,5	44,8	+0,3
229	„	3.—	632,9	281,9	37,7	45,5	46,9	+0,5	281	„	6.—	629,8	287,3	36,0	43,4	44,7	+0,5
230	„	3.30	632,9	282,0	40,3	45,5	46,9	+0,2	282	„	6.30	629,7	287,8	35,9	43,2	44,5	+0,4
231	„	4.—	632,7	282,1	37,8	45,4	46,8	+0,5	283	„	7.—	629,7	288,2	36,4	43,1	44,4	+0,4
232	„	4.30	632,6	282,4	38,0	45,3	46,7	+0,4	284	„	7.30	629,5	288,7	33,7	42,9	44,2	+0,6
233	„	5.—	632,4	282,4	37,3	45,3	46,7	+0,5	285	„	8.—	629,6	289,1	35,7	42,8	44,1	+0,4
234	„	5.30	632,6	282,6	35,6	45,2	46,6	+0,6	286	„	8.30	629,5	289,7	35,1	42,6	43,9	+0,5
235	„	6.—	632,7	282,7	33,9	45,2	46,6	+0,8	287	„	9.—	629,4	290,2	33,4	42,5	43,8	+0,6
236	„	6.30	632,8	283,8	36,4	44,9	46,2	+0,6	288	„	9.30	629,1	291,2	35,9	42,2	43,5	+0,3
237	„	7.—	632,8	284,1	35,5	44,8	46,1	+0,7	289	„	10.—	629,3	291,9	38,1	41,9	43,2	+0,1
238	„	7.30	632,7	284,3	35,3	44,7	46,1	+0,7	290	„	10.30	629,3	291,8	33,6	42,0	43,3	+0,6
239	„	8.—	632,7	284,6	32,8	44,6	46,0	+0,9	291	„	11.—	629,0	291,2	33,3	42,1	43,4	+0,6
240	„	8.30	632,9	284,7	32,8	44,6	46,0	+0,9	292	„	11.30	628,8	290,3	31,0	42,3	43,6	+0,8

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der auf Kampenwand nach Höhensteig beobachteten Refraktionen.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	32,3	30,4	32,6	32,6	29,6	32,2	32,4	32,6	29,5	30,0	31,9	31,3
2	35,3	30,1	38,5	29,7	31,3	29,9	29,5	32,7	33,8	30,0	31,4	30,7
3	37,7	30,8	29,9	35,8	30,5	33,0	31,3	32,7	32,8	33,3	36,6	32,3
4	33,6	32,6	35,5	33,8	32,6	28,5	33,6	35,5	33,0	33,6	34,3	29,8
5	37,8	45,4	36,4	32,0	31,9	32,8	32,7	33,2	30,1	29,5	31,8	30,1
6	33,9	36,4		35,3	32,8	35,1	33,4	31,9	34,9	31,4	31,8	31,0
7	36,0	35,9		33,7	35,7			32,9	38,1	33,6	31,6	
8								35,9			33,3	
Mittel	35,2	34,5	34,6	33,3	32,1	31,9	32,3	33,4	33,2	31,6	32,8	30,9
Gewicht	7	7	5	7	7	6	6	8	7	7	8	6
Komb. Mittel	35,2	34,7	34,3	33,3	32,4	32,1	32,5	33,1	32,9	32,3	32,0	31,5

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	30,6	27,3	27,4	30,1	33,6	33,5	30,9	31,4	30,3	33,7	31,6	33,0
2	32,5	30,6	30,3	28,7	30,6	33,6	32,8	33,9	32,4	33,7	32,6	35,9
3	33,2	32,3	29,9	34,2	32,4	33,5	32,1	31,2	27,9	34,7	31,1	31,6
4	29,3	33,1	33,0	34,4	29,4	29,1	32,2	32,2	36,4	27,9	31,8	37,6
5	28,9		30,4	29,1	32,6	30,9		31,3	30,7	32,0	38,2	33,3
6	32,7		29,6	31,7	35,4	35,2		34,9	34,0	39,0	33,6	30,6
7			35,1	35,2							38,6	
Mittel	31,2	30,8	30,8	31,9	32,3	32,6	32,0	32,5	32,0	33,5	33,9	33,7
Gewicht	6	4	7	7	6	6	4	6	6	6	7	6
Komb. Mittel	31,0	30,9	31,1	31,7	32,3	32,4	32,3	32,3	32,5	33,2	33,8	33,9

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	35,9	30,2	35,7	38,2	40,0	38,9	39,4	45,7	37,5	37,4	41,0	41,9
2	30,3	37,8	35,2	36,3	33,8	35,4	39,2	34,0	34,1	34,4	34,9	34,1
3	39,5	31,0	30,9	37,0	41,0	38,7	36,2	37,9	38,3	39,2	38,6	36,8
4	33,7			31,3	35,9	39,0	37,9	35,7	39,5	45,5	42,8	43,7
5	31,1				34,5	34,8	34,4	35,5	34,0	31,9	32,8	31,7
6					36,0	38,0	38,0	37,6	39,2	39,5	39,0	40,8
7					32,4	33,9	35,8		36,1	34,1	36,1	34,8
Mittel	34,1	33,3	33,9	35,7	36,2	37,0	37,3	37,7	37,0	37,4	37,9	37,7
Gewicht	5	3	3	4	7	7	7	6	7	7	7	7
Komb. Mittel	33,8	33,7	34,2	35,4	36,3	36,9	37,3	37,4	37,3	37,4	37,7	38,0

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	39,8	39,9	36,8	40,9	43,9	34,8	33,1	38,8	37,2	39,2	38,0	32,1
2	39,6	33,6	34,9	32,9	34,3	33,6	44,1	33,1	32,7	34,9	32,9	34,1
3	44,4	38,4	40,0	46,1	39,0	40,9	37,2	35,4	39,3	38,8	32,8	39,0
4	35,0	36,6	43,9	34,3	35,6	41,2	42,2	44,0	42,7	41,6	36,7	35,6
5	38,1	48,7	36,2	46,6	41,3	40,5	37,7	40,3	46,3	44,9	37,3	37,6
6	35,9	35,9	46,9		44,4		34,9	38,1	37,8	38,0		
7			40,1						39,7			
Mittel	38,8	38,9	39,8	40,2	39,7	38,2	38,2	38,3	39,4	39,6	35,5	35,7
Gewicht	6	6	7	5	6	5	6	6	7	6	5	5
Komb. Mittel	38,6	39,1	39,7	40,0	39,5	38,6	38,2	38,6	39,2	38,5	36,6	35,5

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Kampenwand aus Kampenwand-Höhensteig.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	46,6	46,5	43,8	45,9	46,0	43,6	45,8	46,0	45,3	45,4	45,1	45,0
2	44,0	43,9	45,6	43,3	43,6	44,1	44,0	45,5	43,9	45,3	45,1	43,8
3	45,6	45,6	43,6	45,3	44,9	43,5	43,1	43,7	44,0	43,9	44,2	42,6
4	44,6	44,4	44,8	43,7	43,6	44,6	44,5	44,2	43,1	42,8	43,9	43,7
5	43,1	43,0	43,1	44,7	44,6	42,6	42,5	43,2	44,2	43,9	42,5	42,3
6	45,2	44,9		42,9	42,8			44,5	41,9	42,0	43,8	
7	43,4	43,2						42,2			42,1	
Mittel	44,6	44,5	44,2	44,3	44,3	43,7	44,0	44,2	43,7	43,9	43,8	43,5
Gewicht	7	7	5	6	6	5	5	7	6	6	7	5
Komb. Mittel	44,6	44,5	44,3	44,3	44,2	43,9	44,0	44,0	43,9	43,8	43,8	43,7

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	44,8	44,7	45,2	44,6	44,2	44,0	44,0	43,9	44,8	44,8	45,2	45,7
2	44,9	42,3	44,5	44,5	43,7	43,6	43,3	43,4	43,0	43,6	45,7	44,0
3	43,7	43,3	43,8	43,8	42,1	41,9	42,6	42,6	44,0	43,9	43,9	43,8
4	42,0		42,5	42,1	42,9	42,8			43,1	43,1	43,3	42,2
5	43,7		43,2	43,2					42,3	42,1	42,2	45,0
6									44,5	44,7	44,9	41,6
7									42,0	41,9	41,7	
Mittel	43,8	43,4	43,9	43,6	43,2	43,1	43,3	43,3	43,4	43,4	43,8	43,7
Gewicht	5	3	5	5	4	4	3	3	7	7	7	6
Komb. Mittel	43,6	43,6	43,7	43,6	43,3	43,2	43,3	43,3	43,4	43,5	43,7	43,8

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	45,6	44,3	42,3	45,7	45,5	45,5	45,5	45,5	45,3	45,5	45,6	45,6
2	44,0	42,2	45,5	42,4	46,0	46,0	46,1	46,1	46,1	46,2	46,1	46,1
3	42,3	45,2	43,2	45,7	44,7	44,5	44,5	44,6	44,6	44,5	44,3	44,2
4	45,1	43,0		43,4	44,4	44,3	44,5	42,2	44,7	44,4	44,2	44,1
5	41,9				42,4	42,3	42,2	45,8	42,3	42,2	42,2	42,2
6					45,8	45,9	45,8	43,7	45,8	45,8	45,8	45,8
7					43,3	43,4	43,6		43,7	43,2	43,6	43,5
Mittel	43,8	43,7	43,7	44,3	44,6	44,6	44,6	44,6	44,6	44,5	44,5	44,5
Gewicht	5	4	3	4	7	7	7	6	7	7	7	7
Komb. Mittel	43,8	43,7	43,6	44,2	44,5	44,6	44,6	44,6	44,6	44,5	44,5	44,6

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	45,5	45,4	45,4	45,2	45,2	45,1	46,5	45,1	45,0	45,0	44,9	46,7
2	46,2	46,3	46,3	46,4	46,4	46,5	44,2	46,5	46,5	46,7	46,7	44,2
3	44,2	44,0	44,1	43,6	43,9	44,4	44,5	44,2	44,0	44,4	44,4	44,5
4	43,9	43,8	43,6	45,4	45,5	45,5	45,5	44,4	44,5	44,6	44,6	45,2
5	45,7	45,7	45,7	43,8	43,8	43,7	43,7	45,5	45,4	45,3	45,3	43,5
6	43,6	43,7	43,8					43,7	43,7			
Mittel	44,9	44,8	44,8	44,9	45,0	45,0	44,9	44,9	44,9	45,2	45,2	44,8
Gewicht	6	6	6	5	5	5	5	6	6	5	5	5
Komb. Mittel	44,8	44,8	44,8	44,9	45,0	45,0	44,9	44,9	45,0	45,1	45,1	44,9

D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Höhensteig aus Kampenwand-Höhensteig.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	48,0	48,0	45,1	47,3	47,5	44,9	47,2	47,4	46,7	46,8	46,5	46,4
2	45,3	45,3	47,1	44,6	44,9	45,4	45,4	46,9	45,3	46,7	46,5	45,2
3	47,0	47,0	44,9	46,7	46,2	44,9	44,5	45,1	45,4	45,2	45,6	43,9
4	46,1	45,7	46,1	45,1	45,0	46,0	45,9	45,6	44,4	44,1	45,2	45,1
5	44,4	44,4	44,4	46,1	46,0	43,9	43,8	44,5	45,6	45,3	43,8	43,6
6	46,6	46,2		44,2	44,1			45,8	43,2	43,3	45,1	
7	44,7	44,5						43,5			43,4	
Mittel	46,0	45,9	45,5	45,7	45,6	45,0	45,4	45,5	45,1	45,2	45,2	44,8
Gewicht	7	7	5	6	6	5	5	7	6	6	7	5
Komb. Mittel	46,0	45,8	45,7	45,6	45,5	45,3	45,3	45,4	45,2	45,2	45,1	45,0

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	46,2	46,1	46,6	45,9	45,5	45,3	45,4	45,2	46,1	46,1	46,6	47,1
2	46,2	43,6	45,9	45,8	45,1	44,9	44,6	44,7	44,4	45,0	47,1	45,4
3	45,0	44,7	45,2	45,1	43,5	43,2	43,9	43,9	45,3	45,2	45,2	45,1
4	43,3		43,8	43,4	44,2	44,1			44,4	44,4	44,7	43,5
5	45,1		44,6	44,6					43,6	43,4	43,5	46,4
6									45,9	46,0	46,3	42,9
7									43,3	43,2	42,9	
Mittel	45,2	44,8	45,2	45,0	44,6	44,4	44,6	44,6	44,7	44,8	45,2	45,1
Gewicht	5	3	5	5	4	4	3	3	7	7	7	6
Komb. Mittel	45,0	45,0	45,1	45,0	44,7	44,5	44,6	44,6	44,7	44,9	45,1	45,1

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	47,0	45,6	43,6	47,1	46,9	46,9	46,9	46,9	46,7	46,9	47,0	47,0
2	45,3	43,5	46,9	43,7	47,4	47,4	47,5	47,5	47,5	47,6	47,5	47,5
3	43,6	46,6	44,6	47,1	46,1	45,9	45,9	46,0	46,0	45,9	45,7	45,5
4	46,5	44,4		44,7	45,7	45,7	45,9	43,5	46,1	45,8	45,6	45,4
5	43,2				43,7	43,6	43,5	47,2	43,6	43,5	43,5	43,5
6					47,2	47,3	47,2	45,0	47,2	47,2	47,2	47,2
7					44,6	44,7	44,9		45,0	44,5	44,9	44,9
Mittel	45,1	45,0	45,0	45,7	45,9	45,9	46,0	46,0	46,0	45,9	45,9	45,9
Gewicht	5	4	3	4	7	7	7	6	7	7	7	7
Komb. Mittel	45,1	45,0	45,2	45,6	45,9	45,9	46,0	46,0	46,0	45,9	45,9	46,0

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	46,9	46,8	46,8	46,6	46,6	46,5	48,0	46,5	46,4	46,4	46,4	48,0
2	47,6	47,8	47,7	47,8	47,9	47,9	45,6	47,9	48,0	48,1	48,1	45,5
3	45,5	45,4	45,5	44,9	45,2	45,8	45,9	45,5	45,3	45,8	45,8	45,9
4	45,2	45,1	44,9	46,8	46,9	46,9	46,9	45,8	45,9	45,9	45,9	46,6
5	47,1	47,1	47,1	45,1	45,1	45,1	45,0	46,9	46,8	46,7	46,7	44,8
6	45,0	45,0	45,2					45,0	45,0			
Mittel	46,2	46,2	46,2	46,2	46,3	46,4	46,3	46,3	46,2	46,6	46,6	46,2
Gewicht	6	6	6	5	5	5	5	6	6	5	5	5
Komb. Mittel	46,1	46,2	46,2	46,2	46,3	46,4	46,3	46,3	46,3	46,5	46,5	46,3

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen für Kampenwand-Höhensteig.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	+1,1	+1,3	+0,8	+1,0	+1,4	+0,9	+1,2	+1,1	+1,3	+1,3	+1,0	+1,1
2	+0,6	+1,1	+0,4	+1,1	+0,9	+1,1	+1,2	+1,0	+0,8	+1,2	+1,1	+1,1
3	+0,6	+1,2	+1,1	+0,7	+1,1	+0,8	+0,9	+1,0	+0,8	+0,8	+0,5	+0,7
4	+0,8	+1,0	+0,7	+0,7	+0,8	+1,3	+1,0	+0,6	+0,7	+0,6	+0,7	+1,3
5	+0,3	−0,4	+0,4	+1,2	+1,2	+0,9	+1,0	+0,7	+1,4	+1,4	+0,8	+1,1
6	+0,8	+0,6		+0,7	+0,9	+0,5	+0,6	+1,2	+0,7	+1,0	+1,1	+0,8
7	+0,5	+0,4		+0,6	+0,4			+0,9	+0,1	+0,6	+0,9	
8								+0,3			+0,6	
Mittel	+0‘7	+0,7	+0,7	+0,9	+1,0	+0,9	+1,0	+0,8	+0,8	+1,0	+0,8	+1,0
Gewicht	7	7	5	7	7	6	6	8	7	7	8	6
Komb. Mittel	+0,7	+0,7	+0,8	+0,9	+1,0	+1,0	+0,9	+0,9	+0,9	+0,9	+0,9	+1,0

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	+1,1	+1,0	+1,5	+1,2	+0,8	+0,9	+1,2	+1,1	+1,2	+0,8	+1,1	+1,0
2	+0,9	+0,9	+1,2	+1,4	+1,2	+0,8	+0,8	+0,7	+0,8	+0,7	+1,0	+0,5
3	+0,8	+1,0	+1,3	+0,7	+0,9	+0,7	+1,0	+1,0	+1,2	+0,6	+1,0	+0,9
4	+1,0	+0,6	+0,8	+0,7	+1,0	+1,0	+0,8	+1,1	+0,3	+1,2	+0,9	+0,2
5	+1,4		+0,9	+1,0	+1,0	+1,1		+1,1	+1,1	+1,0	+0,1	+0,9
6	+0,8		+1,3	+1,0	+0,6	+0,5		+0,5	+0,5	+0,0	+0,8	+0,8
7			+0,5	+0,5							+1,0	
Mittel	+1,0	+1,0	+1,1	+0,9	+0,9	+0,8	+0,9	+0,9	+0,9	+0,7	+0,9	+0,5
Gewicht	6	4	7	7	6	6	4	6	6	6	7	6
Komb. Mittel	+1,0	+1,0	+1,0	+1,0	+0,9	+0,9	+0,9	+0,9	+0,9	+0,8	+0,8	+0,8

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	+0,7	+1,1	+0,4	+0,5	+0,3	+0,4	+0,3	−0,2	+0,5	+0,5	+0,2	+0,1
2	+1,1	+0,1	+0,7	+0,3	+0,9	+0,8	+0,4	+0,9	+0,9	+0,9	+0,8	+0,9
3	±0,0	+0,9	+1,0	+0,6	+0,1	+0,3	+0,6	+0,4	+0,4	+0,2	+0,4	+0,4
4	+0,9			+0,9	+0,6	+0,2	+0,4	+0,5	+0,2	−0,4	−0,2	−0,2
5	+0,8				+0,5	+0,5	+0,5	+0,8	+0,7	+0,8	+0,7	+0,8
6					+0,7	+0,5	+0,5	+0,3	+0,4	+0,3	+0,4	+0,2
7					+0,8	+0,7	+0,5		+0,5	+0,6	+0,5	+0,6
Mittel	+0,7	+0,7	+0,7	+0,6	+0,6	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5	+0,4	+0,4	+0,4
Gewicht	5	3	3	4	7	7	7	6	7	7	7	7
Komb. Mittel	+0,7	+0,7	+0,7	+0,6	+0,6	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5	+0,4	+0,4	+0,4

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	+0,3	+0,3	+0,7	+0,2	−0,2	+0,8	+1,1	+0,3	+0,5	+0,3	+0,4	+1,2
2	+0,4	+1,0	+0,8	+1,1	+0,9	+1,0	−0,3	+1,1	+1,1	+0,9	+1,1	+0,8
3	−0,3	+0,3	+0,1	−0,5	+0,2	+0,1	+0,4	+0,7	+0,2	+0,3	+0,9	+0,1
4	+0,4	+0,3	−0,3	+0,5	+0,4	+0,2	+0,7	−0,4	−0,1	±0,0	+0,5	+0,6
5	+0,5	−0,6	+0,3	−0,6	+0,1	±0,0	+0,5	+0,2	−0,6	−0,5	+0,5	+0,3
6	+0,5	+0,5	−0,4		−0,4		+0,6	+0,3	+0,5	+0,4		
7			+0,1						+0,1			
Mittel	+0,3	+0,3	+0,2	+0,1	+0,2	+0,4	+0,5	+0,4	+0,2	+0,2	+0,7	+0,6
Gewicht	6	6	7	5	6	5	6	6	7	6	5	5
Komb. Mittel	+0,3	+0,3	+0,2	+0,2	+0,2	+0,4	+0,5	+0,4	+0,3	+0,3	+0,6	+0,7

Tafel Nr 3.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Höhensteig und Irschenberg.

A. Beobachtet in Höhensteig.

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in H	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in H	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
1	16. Nm	7.30	714,7	286,8	49,2	44,8	44,5	—0,3	38	18. Nm	10.30	717,9	288,0	69,5	44,8	44,5	—2,0
2	„	8.—	714,7	286,8	66,1	44,8	44,5	—1,8	39	„	11.—	718,3	287,7	60,1	45,0	44,6	—1,3
3	„	8.30	714,7	286,7	62,0	44,8	44,5	—1,4	40	„	11.30	718,5	287,3	54,2	45,1	44,8	—0,7
4	„	9.—	714,7	285,8	67,7	45,1	44,8	—1,9	41	„	12.—	718,6	287,2	61,6	45,2	44,8	—1,4
5	„	9.30	714,5	285,8	59,3	45,1	44,8	—1,2	42	19. Vm	12.30	718,8	287,1	55,4	45,2	44,9	—0,8
6	„	11.—	714,3	285,4	70,5	45,2	44,9	—2,1	43	„	1.—	719,1	287,2	52,8	45,2	44,9	—0,6
7	„	11.30	714,0	285,4	70,4	45,2	44,8	—2,1	44	„	1.30	719,4	287,3	45,8	45,2	44,9	±0,0
8	„	12.—	713,9	285,7	65,0	45,1	44,7	—1,6	45	„	2.—	719,5	287,2	51,5	45,3	45,0	—0,5
9	17. Vm	12.30	713,9	285,4	69,3	45,2	44,8	—2,0	46	„	2.30	719,5	287,1	57,3	45,3	45,0	—1,0
10	„	1.—	713,5	285,9	64,2	44,9	44,6	—1,6	47	„	3.—	719,8	287,0	53,5	45,4	45,1	—0,7
11	„	1.30	713,2	285,9	66,0	44,9	44,6	—1,7	48	„	3.30	719,8	286,8	57,5	45,5	45,2	—1,0
12	„	2.—	712,9	285,6	72,1	45,0	44,6	—2,3	49	„	4.—	719,9	286,4	60,8	45,6	45,3	—1,3
13	„	2.30	712,5	285,4	73,8	45,0	44,6	—2,4	50	„	4.30	720,0	286,0	75,1	45,7	45,4	—2,5
14	„	3.—	712,3	285,3	79,7	45,0	44,6	—2,9	51	„	6.—	720,2	287,5	70,5	45,3	45,0	—2,1
15	„	3.30	711,8	285,6	70,7	44,8	44,5	—2,1	52	„	6.30	720,3	287,7	62,8	45,2	44,9	—1,4
16	„	4.—	711,4	285,9	76,5	44,7	44,4	—2,6	53	„	7.—	720,2	288,6	58,3	44,9	44,6	—1,9
17	„	5.—	711,2	285,9	73,6	44,7	44,3	—2,4	54	„	7.30	720,5	290,0	48,0	44,6	44,2	—0,3
18	„	6.—	710,7	285,8	72,9	44,6	44,3	—2,3	55	„	8.—	720,7	290,8	46,5	44,3	44,0	—0,2
19	18. Vm	7.—	712,6	285,8	55,4	44,9	44,5	—0,9	56	„	8.30	720,6	289,6	42,7	44,7	44,3	+0,2
20	„	7.30	712,6	287,4	59,0	44,4	44,0	—1,2	57	„	9.—	720,7	291,1	35,9	44,2	43,9	+0,7
21	„	8.—	712,4	288,7	45,7	43,9	43,6	—0,1	58	„	9.30	720,8	292,0	44,6	44,0	43,6	±0,0
22	„	11.—	713,7	287,3	49,4	44,5	44,2	—0,4	59	„	10.—	720,6	292,2	43,5	43,9	43,6	+0,1
23	„	11.30	713,7	288,2	45,3	44,3	43,9	—0,1	60	„	10.30	720,5	292,4	46,8	43,9	43,5	—0,2
24	„	12.—	713,6	288,4	45,3	44,2	43,8	—0,1	61	„	11.—	720,3	292,9	44,1	43,6	43,4	±0,0
25	18. Nm	12.30	713,0	290,7	44,4	43,4	43,1	—0,1	62	„	11.30	720,3	292,9	43,5	43,6	43,3	±0,0
26	„	1.—	712,9	290,8	40,5	43,4	43,0	+0,3	63	„	12.—	720,3	293,1	44,8	43,6	43,3	—0,1
27	„	1.30	712,8	290,9	46,1	43,3	43,0	—0,2	64	19. Nm	12.30	720,0	293,8	41,1	43,4	43,0	+0,2
28	„	3.—	712,7	291,0	48,2	43,3	43,0	—0,4	65	„	1.—	719,7	294,4	43,4	43,1	42,8	±0,0
29	„	3.30	712,9	291,6	54,7	43,1	42,8	—0,9	66	„	1.30	719,8	293,8	42,6	43,3	43,0	+0,1
30	„	4.—	713,3	290,7	58,1	43,5	43,1	—1,2	67	„	2.—	719,7	294,8	44,2	43,0	42,7	—0,1
31	„	4.30	713,7	289,8	52,3	43,8	43,4	—0,7	68	„	2.30	719,5	294,7	45,4	43,0	42,7	—0,2
32	„	5.—	714,3	290,9	51,5	43,5	43,2	—0,6	69	„	3.—	719,3	294,8	44,9	43,0	42,6	—0,1
33	„	8.—	715,5	288,4	50,3	44,4	44,1	—0,5	70	„	3.30	719,8	295,0	44,8	43,0	42,6	—0,1
34	„	8.30	715,9	288,4	49,5	44,5	44,1	—0,4	71	„	4.—	718,8	295,0	38,5	42,9	42,5	+0,4
35	„	9.—	716,4	287,8	57,7	44,7	44,4	—1,1	72	„	4.30	718,5	295,3	45,0	42,7	42,4	—0,2
36	„	9.30	716,5	287,8	55,9	44,7	44,4	—0,9	73	„	5.—	718,3	295,0	51,5	42,8	42,5	—0,8
37	„	10.—	716,9	287,9	57,9	44,7	44,4	—1,1	74	„	5.30	718,1	294,9	49,9	42,8	42,5	—0,6

Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in H	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in H	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ
	1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
75	19. Nm 6.—	717,8	294,0	49,5	43,0	42,7	—0,5	127	22. Nm 7.30	718,3	292,8	58,8	43,4	43,1	—1,3
76	„ 6.30	717,8	293,0	60,3	43,3	43,0	—1,4	128	„ 8.—	718,7	292,9	65,8	43,5	43,1	—1,8
77	„ 7.—	717,9	292,4	68,5	43,5	43,2	—2,1	129	„ 8.30	718,8	292,6	60,7	43,6	43,2	—1,4
78	„ 7.30	718,0	291,6	68,8	43,8	43,4	—2,1	130	„ 9.—	718,8	291,8	57,9	43,8	43,5	—1,2
79	„ 8.—	718,2	290,6	79,3	44,1	43,8	—2,9	131	„ 10.30	717,4	290,7	77,5	44,0	43,6	—2,8
80	„ 8.30	717,8	290,0	75,0	44,2	43,9	—2,6	132	„ 11.—	717,4	289,9	72,2	44,2	43,9	—2,3
81	„ 9.—	717,9	289,8	74,5	44,3	44,0	—2,5	133	„ 11.30	717,3	290,0	67,7	44,2	43,8	—2,0
82	„ 9.30	717,7	289,6	78,6	44,3	44,0	—2,8	134	„ 12.—	717,2	289,6	67,8	44,3	43,9	—2,0
83	„ 10.—	717,7	289,0	76,2	44,5	44,2	—2,6	135	23. Vm 12.30	717,2	289,3	65,6	44,4	44,0	—1,8
84	„ 10.30	717,9	289,4	79,5	44,4	44,1	—2,9	136	„ 1.—	718,0	289,0	87,2	44,5	44,2	—3,5
85	„ 11.—	717,7	288,2	84,3	44,8	44,4	—3,3	137	„ 1.30	718,2	289,0	75,5	44,6	44,2	—2,6
86	„ 11.30	718,0	288,8	78,5	44,6	44,3	—2,0	138	„ 3.30	718,5	289,0	77,6	44,6	44,3	—2,7
87	„ 12.—	717,6	288,9	91,0	44,5	44,2	—3,9	139	„ 4.—	718,4	289,0	79,0	44,6	44,3	—2,9
88	20. Vm 12.30	717,8	288,7	90,7	44,6	44,3	—3,8	140	„ 8.—	718,2	294,8	72,5	42,8	42,5	—2,5
89	„ 2.—	717,8	292,3	94,4	43,5	43,2	—4,2	141	„ 8.30	717,9	295,4	55,4	42,6	42,3	—1,0
90	„ 2.30	717,6	290,9	85,7	43,9	43,6	—3,5	142	„ 9.—	718,0	295,6	55,4	42,6	42,3	—1,1
91	„ 3.—	717,5	292,1	83,2	43,5	43,2	—3,3	143	„ 10.—	718,3	296,5	55,6	42,4	42,0	—1,1
92	„ 3.30	717,4	289,9	76,1	44,2	43,9	—2,6	144	„ 10.30	718,3	297,1	53,3	42,2	41,9	—0,9
93	„ 6.30	717,9	293,8	85,2	43,1	42,8	—3,5	145	„ 11.—	718,4	298,0	46,6	41,9	41,6	—0,4
94	„ 7.—	718,0	294,3	75,1	43,0	42,6	—2,7	146	„ 11.30	718,1	298,4	48,3	41,8	41,5	—0,5
95	„ 7.30	718,2	294,8	79,3	42,8	42,5	—3,0	147	„ 12.—	718,0	298,8	43,7	41,7	41,4	—0,1
96	„ 9.—	718,9	292,8	55,8	43,5	43,2	—1,0	148	23. Nm 12.30	717,7	299,8	44,3	41,4	41,0	—0,2
97	„ 9.30	718,9	293,6	61,2	43,3	42,9	—1,5	149	„ 1.—	717,5	300,4	45,9	41,2	40,9	—0,4
98	„ 10.30	719,6	293,2	55,0	43,5	43,2	—0,9	150	„ 1.30	717,3	300,5	44,6	41,0	40,8	—0,3
99	„ 11.—	719,6	293,1	51,3	43,5	43,2	—0,6	151	„ 2.—	716,9	300,8	44,0	41,0	40,7	—0,2
100	20. Nm 4.—	719,6	295,9	58,0	42,7	42,4	—1,3	152	„ 2.30	716,3	300,5	43,8	41,0	40,7	—0,2
101	„ 4.30	719,8	295,9	57,8	42,7	42,4	—1,2	153	„ 3.—	716,1	300,0	41,6	41,1	40,8	±0,0
102	22. Vm 6.30	720,7	289,7	73,0	44,7	44,3	—2,3	154	„ 3.30	715,8	299,8	51,1	41,1	40,8	—0,8
103	„ 7.—	720,8	289,8	61,7	44,7	44,3	—1,4	155	„ 4.—	715,9	299,5	50,9	41,2	40,9	—0,8
104	„ 7.30	720,8	290,0	61,6	44,6	44,3	—1,4	156	„ 4.30	715,6	299,6	41,8	41,2	40,9	±0,0
105	„ 8.—	720,7	291,7	64,1	44,1	43,7	—1,6	157	„ 5.—	715,5	299,0	50,3	41,3	41,0	—0,7
106	„ 8.30	721,0	292,7	55,9	43,8	43,5	—1,0	158	„ 5.30	715,3	298,8	49,5	41,4	41,0	—0,7
107	„ 9.—	720,9	293,6	48,9	43,5	43,2	—0,4	159	„ 6.—	714,8	297,8	53,4	41,6	41,3	—1 0
108	„ 9.30	720,8	293,8	44,9	43,4	43,1	—0,1	160	„ 6.30	714,4	296,2	59,3	42,0	41,7	—1,4
109	„ 10.—	720,6	294,6	46,2	43,2	42,9	—0,2	161	„ 7.30	713,6	295,4	64,0	42,1	41,8	—1,8
110	„ 10.30	720,5	294,8	44,7	43,1	42,8	—0,1	162	„ 8.—	713,6	294,6	86,3	42,4	42,0	—3,7
111	„ 11.—	720,3	295,0	43,0	43,0	42,7	±0,0	163	„ 8.30	713,5	294,5	95,6	42,4	42,0	—4,4
112	„ 11.30	720,3	294,8	46,7	43,1	42,8	—0,3	164	24. Vm 1.—	712,9	296,0	91,9	41,9	41,5	—4,2
113	„ 12.—	720,1	295,3	41,8	42,9	42,6	+0,1	165	„ 1.30	713,0	296,6	99,8	41,7	41,4	—4,8
114	22. Nm 12.30	719,9	296,2	46,5	42,6	42,3	—0,3	166	„ 2.—	712,9	295,4	99,6	42,0	41,7	—4,8
115	„ 1.—	719,6	296,3	49,4	42,6	42,2	—0,6	167	„ 2.30	713,1	295,8	81,0	42,0	41,6	—3,2
116	„ 1.30	719,6	296,3	38,9	42,6	42,2	+0,3	168	„ 3.—	713,7	294,3	77,0	42,5	42,0	—2,9
117	„ 2.—	719,7	295,8	40,7	42,7	42,4	+0,2	169	„ 3.30	714,3	292,6	69,2	43,0	42,7	—2,2
118	„ 2.30	719,2	297,0	42,8	42,3	42,0	±0,0	170	„ 4.—	714,5	291,1	77,3	43,5	43,2	—2,8
119	„ 3.—	718,9	296,8	44,7	42,3	42,0	—0,2	171	„ 4.30	714,4	290,9	72,2	43,5	43,2	—2,4
120	„ 3.30	718,4	296,9	51,8	42,3	41,9	—0,8	172	„ 6.—	716,3	290,9	63,8	43,8	43,4	—1,7
121	„ 4.—	718,2	296,8	54,9	42,3	41,9	—1,0	173	„ 6.30	716,4	291,5	46,6	43,6	43,3	—0,2
122	„ 4.30	718,5	296,8	45,9	42,3	42,0	—0,3	174	„ 7.—	716,9	292,1	49,0	43,5	43,1	—0,4
123	„ 5.—	718,7	295,3	51,3	42,7	42,4	—0,7	175	„ 8.—	717,5	292,7	44,2	43,4	43,0	—0,1
124	„ 6.—	718,7	295,0	45,6	42,8	42,5	—0,2	176	„ 8.30	717,8	292,8	50,5	43,4	43,0	—0,6
125	„ 6.30	718,8	294,5	54,4	43,0	42,7	—0,9	177	„ 9.—	717,8	293,0	45,2	43,3	43,0	—0,1
126	„ 7.—	719,2	293,7	56,1	43,3	43,0	—1,1	178	„ 9.30	718,2	293,6	47,4	43,2	42,9	—0,3

Nr	Zeit der Beobachtung		Luftdruck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in H	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luftdruck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in H	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
179	24. Vm	10.—	718,3	293,2	48,0	43,3	43,0	—0,4	221	26. Vm	9.30	719,0	292,4	55,5	43,6	43,3	—1,0
180	„	10.30	718,2	295,7	45,7	42,6	42,3	—0,2	222	„	10.—	718,7	294,1	52,8	43,1	42,8	—0,8
181	„	11.—	718,4	294,0	48,4	43,1	42,8	—0,4	223	„	10.30	718,6	294,8	48,5	42,9	42,6	—0,4
182	„	12.—	719,0	294,4	46,1	43,0	42,7	—0,2	224	„	11.—	718,5	295,4	44,7	42,7	42,4	—0,2
183	24. Nm	12.30	719,5	291,8	49,5	43,9	43,6	—0,5	225	„	11.30	718,2	295,8	45,8	42,6	42,2	—0,3
184	„	3.—	719,3	288,8	66,7	44,8	44,4	—1,8	226	„	12.—	718,2	296,6	58,9	42,3	42,0	—1,4
185	„	3.30	719,1	288,6	64,6	44,8	44,5	—1,6	227	26. Nm	12.30	718,0	296,8	46,0	42,2	41,9	—0,3
186	„	4.—	719,1	290,2	57,0	44,3	44,0	—1,0	228	„	1.—	717,8	297,0	47,7	42,2	41,8	—0,4
187	„	4.30	719,0	288,6	58,3	44,8	44,5	—1,1	229	„	1.30	717,6	288,0	44,6	41,8	41,5	—0,2
188	25. Vm	6.—	721,0	286,9	66,6	45,6	45,2	—1,7	230	„	2.—	717,2	298,7	49,0	41,6	41,3	—0,6
189	„	6.30	721,0	287,3	63,5	45,5	45,1	—1,5	231	„	2.30	717,2	297,9	50,6	41,8	41,5	—0,7
190	„	7.—	721,1	287,7	61,7	45,3	45,0	—1,4	232	„	3.—	716,9	297,9	53,5	41,8	41,5	—1,0
191	„	7.30	721,2	287,8	55,9	45,3	45,0	—0,9	233	„	3.30	716,5	298,2	48,0	41,7	41,4	—0,5
192	„	8.30	721,4	288,6	54,1	45,1	44,8	—0,7	234	„	4.30	716,3	298,3	46,8	41,6	41,3	—0,4
193	„	9.—	721,5	289,0	54,9	45,0	44,6	—0,8	235	„	5.—	715,9	298,1	49,3	41,6	41,3	—0,6
194	„	9.30	721,7	289,6	54,6	44,8	44,5	—0,8	236	„	5.30	715,8	297,8	51,7	41,7	41,4	—0,8
195	„	10.—	721,5	289,8	49,9	44,8	44,4	—0,4	237	„	6.—	715,6	296,8	52,0	42,0	41,6	—0,8
196	„	10.30	721,4	290,8	49,6	44,4	44,1	—0,4	238	„	6.30	715,6	296,4	54,0	42,1	41,8	—1,0
197	„	11.—	721,4	291,0	45,6	44,4	44,0	—0,1	239	„	7.—	715,6	294,8	61,2	42,5	42,2	—1,5
198	„	11.30	721,2	291,7	33,4	44,1	43,8	+0,9	240	„	7.30	715,6	294,6	62,9	42,6	42,3	—1,7
199	„	12.—	721,2	291,8	43,5	44,1	43,8	+0,1	241	„	8.—	715,6	293,8	72,8	42,8	42,5	—2,5
200	25. Nm	2.—	720,6	293,6	43,8	43,5	43,2	±0,0	242	„	8.30	715,6	292,7	90,0	43,1	42,8	—3,9
201	„	3.30	720,0	294,4	51,4	43,2	42,8	—0,7	243	„	9.—	715,7	291,8	87,5	43,4	43,1	—3,7
202	„	4.—	720,0	294,5	42,7	43,1	42,8	+0,1	244	„	9.30	715,8	291,2	80,8	43,6	43,3	—3,1
203	„	4.30	720,0	293,4	44,9	43,5	43,1	—0,1	245	27. Vm	1.—	715,7	288,2	81,7	44,5	44,2	—3,1
204	„	5.30	719,6	293,4	46,3	43,4	43,1	—0,2	246	„	2.—	715,5	288,7	75,6	44,3	44,0	—2,6
205	„	6.—	719,5	292,8	51,1	43,6	43,2	—0,6	247	„	3.—	714,9	286,9	83,7	44,8	44,5	—3,2
206	„	6.30	719,5	291,9	55,1	43,8	43,5	—0,9	248	„	4.—	714,6	287,4	79,5	44,6	44,3	—2,1
207	„	7.30	719,5	289,9	72,9	44,5	44,1	—2,4	249	„	6.—	714,4	289,6	80,9	43,9	43,6	—3,1
208	„	8.—	719,7	288,3	62,1	45,0	44,6	—1,4	250	„	6.30	714,0	291,3	86,9	43,4	43,0	—3,6
209	„	8.30	719,7	287,8	61,1	45,1	44,8	—1,3	251	„	7.—	714,0	290,8	88,8	43,5	43,2	—3,8
210	„	9.30	719,5	287,8	80,2	45,1	44,8	—2,9	252	„	7.30	713,9	290,3	73,3	43,6	43,3	—2,5
211	„	10.—	719,3	287,8	86,6	45,1	44,7	—3,5	253	„	8.—	713,9	293,4	73,0	42,7	42,4	—2,5
212	„	11.30	719,4	285,3	82,3	45,9	45,5	—3,0	254	„	8.30	713,6	294,8	62,1	42,3	42,0	—1,6
213	26. Vm	12.30	719,3	284,8	82,5	46,0	45,7	—3,0	255	„	9.—	713,6	294,4	59,1	42,4	42,1	—1,4
214	„	1.30	719,4	284,4	93,8	46,2	45,8	—4,0	256	„	9.30	713,5	294,8	53,0	42,3	42,0	—0,9
215	„	2.30	718,9	284,6	85,4	46,0	45,7	—3,3	257	„	10.—	713,6	296,6	50,4	41,8	41,5	—0,7
216	„	3.30	718,7	284,2	88,8	46,2	45,8	—3,5	258	„	10.30	713,5	296,8	53,0	41,7	41,4	—0,9
217	„	7.30	719,1	288,8	69,4	44,7	44,4	—2,0	259	„	11.—	713,4	297,8	46,9	41,4	41,1	—0,4
218	„	8.—	719,0	289,2	69,4	44,6	44,3	—2,1	260	„	11.30	713,1	298,0	51,2	41,3	41,0	—0,8
219	„	8.30	719,0	289,5	65,8	44,5	44,2	—1,8	261	„	12.—	713,3	298,0	47,6	41,3	41,0	—0,5
220	„	9.—	719,2	291,4	48,3	44,0	43,6	—0,3									

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der in Höhensteig nach Irschenberg beobachteten Refraktionen.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	72,9	62,8	55,4	59,0	45,7	42,7	35,9	44,6	43,5	46,8	49,4	45,3
2	70,5	85,2	58,3	48,0	46,5	55,9	55,8	61,2	46,2	55,0	44,1	43,5
3	63,8	73,0	75,1	79,3	64,1	55,4	48,9	44,9	55,6	44,7	51,3	46,7
4	66,6	46,6	61,7	61,6	72,5	50,5	55,4	47,4	48,0	53,3	43,0	48,3
5	80,9	63,5	49,0	55,9	44,2	54,1	45,2	54,6	49,9	45,7	46,6	33,4
6		86,9	61,7	69,4	69,4	65,8	54,9	55,5	52,8	49,6	48,4	45,8
7			88,8	73,3	73,0	62,1	48,3	53,0	50,4	48,5	45,6	51,2
8							59,1			53,0	44,7	
9											46,9	
Mittel	70,9	69,7	64,3	63,8	59,3	55,2	50,4	51,6	49,5	49,6	46,7	44,9
Gewicht	5	6	7	7	7	7	8	7	7	8	9	7
Komb. Mittel	71,3	68,7	65,5	62,8	59,4	55,0	51,9	50,8	50,1	48,9	47,0	45,8

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	45,3	44,4	40,5	46,1	44,2	45,4	48,2	54,7	58,1	52,3	51,5	49,9
2	44,8	41,1	43,4	42,6	40,7	42,8	44,9	44,8	38,5	45,0	51,5	49,5
3	41,8	46,5	49,4	38,9	44,0	43,8	44,7	51,8	58,0	57,8	51,3	46,3
4	43,7	44,3	45,9	44,6	43,8	50,6	41,6	51,1	54,9	45,9	50,3	51,7
5	46,1	49,5	47,7	44,6	49,0		66,7	64,6	50,9	41,8	49,3	
6	43,5	46,0					53,5	51,4	57,0	58,3		
7	58,9							48,0	42,7	44,9		
8	47,6									46,8		
Mittel	46,5	45,3	45,4	43,4	44,3	45,7	49,9	52,3	51,4	49,1	50,8	49,4
Gewicht	8	6	5	5	5	4	6	7	7	8	5	4
Komb. Mittel	45,8	45,6	44,9	44,1	44,4	46,4	49,5	51,5	51,1	50,1	50,0	50,0

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	49,5	60,3	68,5	49,2	66,1	62,0	67,7	59,3	57,9	69,5	70,5	70,4
2	45,6	54,4	56,1	68,8	50,3	49,5	57,7	55,9	76,2	79,5	60,1	54,2
3	53,4	59,3	61,2	58,8	79,3	75,0	74,5	78,6	86,6	77,5	84,3	78,5
4	51,1	55,1		64,0	65,8	60,7	57,9	80,2			72,2	67,7
5	52,0	54,0		72,9	86,3	95,6	87,5	80,8				82,3
6				62,9	62,1	61,1						
7					72,8	90,0						
Mittel	50,3	56,6	61,9	62,8	69,0	70,6	69,1	71,0	73,6	75,5	71,8	70,6
Gewicht	5	5	3	6	7	7	5	5	3	3	4	5
Komb. Mittel	51,7	56,4	60,8	64,1	67,9	69,8	70,0	71,2	73,4	74,1	72,4	71,0

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	65,0	69,3	64,2	66,0	72,1	73,8	79,7	70,7	76,5	75,1	73,6	
2	61,6	55,4	52,8	45,8	51,5	57,3	53,5	57,5	60,8	72,2		
3	91,0	90,7	87,2	75,5	94,4	85,7	83,2	76,1	79,0			
4	67,8	65,6	91,9	99,8	99,6	81,0	77,0	77,6	77,3			
5		82,5	81,7	93,8	75,6	85,4	83,7	69,2	79,5			
6								88,8				
Mittel	71,1	72,7	75,6	76,2	78,6	76,6	75,4	73,3	74,6	73,7	73,6	
Gewicht	4	5	5	5	5	5	5	6	5	2	1	
Komb. Mittel	71,4	73,0	75,0	76,7	77,5	76,8	75,2	74,2	74,1	73,9	73,0	

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Höhensteig aus Höhensteig-Irschenberg.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	44,6	45,2	44,9	44,4	43,9	44,7	44,2	44,0	43,9	43,9	44,5	44,3
2	45,3	43,1	44,9	44,6	44,3	43,8	43,5	43,3	43,2	43,5	43,6	43,6
3	44,2	44,7	43,0	42,8	44,1	42,6	43,5	43,4	42,4	43,1	43,5	43,1
4	43,8	44,0	44,7	44,6	42,8	43,4	42,6	43,2	43,3	42,2	43,0	41,8
5	43,9	43,6	43,5	43,2	43,4	45,1	43,3	44,8	44,8	42,6	41,9	44,1
6		43,4	43,5	44,7	44,6	44,5	45,0	43,6	43,1	44,4	43,1	42,6
7			43,5	43,6	42,7	42,3	44,0	42,3	41,8	42,9	44,4	41,3
8							42,4			41,7	42,7	
9											41,4	
Mittel	44,4	44,0	44,0	44,1	43,7	43,8	43,6	43,5	43,2	43,0	43,1	43,0
Gewicht	5	6	7	7	7	7	8	7	7	8	9	7
Komb. Mittel	44,3	44,1	44,0	44,0	43,8	43,7	43,6	43,5	43,2	43,1	43,1	43,0

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	44,2	43,4	43,4	43,3	43,0	43,3	43,3	43,1	43,5	43,8	43,5	43,7
2	43,6	43,4	43,1	43,3	42,7	43,0	43,0	43,0	42,9	42,7	42,8	42,8
3	42,9	42,6	42,6	42,6	41,0	42,3	42,3	42,3	42,7	42,7	42,7	43,4
4	41,7	41,4	41,2	41,0	43,5	41,0	41,1	41,1	42,3	42,3	43,5	41,7
5	43,0	43,9	42,2	41,8	41,6		43,3	44,8	41,2	41,2	41,6	
6	44,1	42,2					41,8	43,2	44,3	44,8		
7	42,3							41,7	43,1	43,5		
8	41,3								41,7	41,6		
Mittel	42,9	42,8	42,5	42,4	42,4	42,4	42,5	42,7	42,7	42,8	42,8	42,9
Gewicht	8	6	5	5	5	4	6	7	8	8	5	4
Komb. Mittel	42,9	42,8	42,6	42,4	42,4	42,4	42,5	42,7	42,7	42,8	42,8	42,9

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	43,9	44,1	44,3	44,8	44,8	44,8	45,1	45,1	44,7	45,2	45,2	45,2
2	43,0	43,3	43,5	43,8	44,4	44,5	44,7	44,7	44,5	44,8	45,0	45,1
3	42,8	43,0	43,3	43,4	44,1	44,2	44,3	44,3	42,8	44,4	44,8	44,6
4	43,6	43,8	44,2	42,1	43,5	43,6	43,8	42,4	45,1	44,0	44,2	44,2
5	42,0	42,1	42,5	44,5	42,4	42,4	42,4	45,1		43,8	41,9	42,0
6				42,6	45,0	45,1	43,4	43,6			45,7	45,9
7					42,8	43,1					44,4	
Mittel	43,1	43,3	43,6	43,5	43,9	44,0	43,9	44,2	44,3	44,4	44,4	44,5
Gewicht	5	5	5	6	7	7	6	6	4	5	7	6
Komb. Mittel	43,1	43,3	43,5	43,6	43,8	44,0	44,0	44,2	44,3	44,4	44,4	44,5

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	45,1	45,2	44,9	44,9	45,0	45,0	45,0	44,8	44,7	44,7	44,7	44,6
2	45,2	45,2	45,2	45,2	45,3	45,3	45,4	45,5	45,6	45,7	45,1	44,3
3	44,5	44,6	44,4	44,4	43,5	43,9	43,5	44,2	43,3	43,5	43,6	43,9
4	44,3	44,4	41,9	41,7	44,6	42,0	42,5	44,6	44,6	44,6	44,6	44,5
5	44,2	41,9	46,1	46,2	44,3	46,0	44,8	43,0	43,5	43,5	43,9	
6		46,0	44,5						44,6		44,5	
7		44,3										
Mittel	44,7	44,5	44,5	44,5	44,5	44,4	44,2	44,4	44,4	44,4	44,4	44,3
Gewicht	5	7	6	5	5	5	5	5	6	5	6	4
Komb. Mittel	44,6	44,6	44,5	44,5	44,5	44,4	44,3	44,4	44,4	44,4	44,4	44,4

D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Irschenberg aus Höhensteig-Irschenberg.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	44,3	44,9	44,5	44,0	43,6	44,3	43,9	43,6	43,6	43,5	44,2	43,9
2	45,0	42,8	44,6	44,2	44,0	43,5	43,2	42,9	42,9	43,2	43,4	43,3
3	43,9	44,3	42,6	42,5	43,7	42,3	43,2	43,1	42,0	42,8	43,2	42,8
4	43,4	43,7	44,3	44,3	42,5	43,0	42,3	42,9	43,0	41,9	42,7	41,5
5	43,6	43,3	43,2	42,9	43,0	44,8	43,0	44,5	44,4	42,3	41,6	43,8
6		43,0	43,1	44,4	44,3	44,2	44,6	43,3	42,8	44,1	42,8	42,2
7			43,2	43,3	42,4	42,0	43,6	42,0	41,5	42,6	44,0	41,0
8							42,1			41,4	42,4	
9											41,1	
Mittel	44,0	43,7	43,6	43,7	43,4	43,4	43,3	43,2	42,9	42,7	42,8	42,6
Gewicht	5	6	7	7	7	7	8	7	7	8	9	7
Komb. Mittel	43,9	43,8	43,7	43,6	43,5	43,4	43,3	43,2	42,9	42,8	42,7	42,7

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	43,8	43,1	43,0	43,0	42,7	43,0	43,0	42,8	43,1	43,4	43,2	43,2
2	43,3	43,0	42,8	43,0	42,4	42,7	42,6	42,6	42,4	42,4	42,5	42,5
3	42,6	42,3	42,2	42,2	40,7	42,0	42,0	41,9	42,4	42,4	42,4	43,1
4	41,4	41,0	40,9	40,8	43,2	40,7	40,8	40,8	41,9	42,0	43,1	41,4
5	42,7	43,6	41,8	41,5	41,3		43,0	44,5	40,9	40,9	41,3	
6	43,8	41,9					41,5	42,8	44,0	44,5		
7	42,0							41,4	42,8	43,1		
8	41,0								41,4	41,3		
Mittel	42,6	42,5	42,1	42,1	42,1	42,1	42,2	42,4	42,4	42,5	42,5	42,6
Gewicht	8	6	5	5	5	4	6	7	8	8	5	4
Komb. Mittel	42,6	42,4	42,2	42,1	42,1	42,1	42,2	42,4	42,4	42,5	42,5	42,6

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	43,4	43,6	43,8	44,5	44,5	44,5	44,8	44,8	44,4	44,9	44,9	44,8
2	42,7	43,0	43,2	43,4	44,1	44,1	44,4	44,4	44,2	44,5	44,6	44,8
3	42,5	42,7	43,0	43,1	43,8	43,9	44,0	44,0	42,5	44,1	44,4	44,3
4	43,2	43,5	43,8	41,8	43,1	43,2	43,5	42,1	44,7	43,6	43,9	43,8
5	41,6	41,8	42,2	44,1	42,0	42,0	42,1	44,8		43,5	41,6	41,7
6				42,3	44,6	44,8	43,1	43,3			45,4	45,5
7					42,5	42,8					43,7	
Mittel	42,7	42,9	43,2	43,2	43,5	43,6	43,7	43,9	44,0	44,1	44,1	44,2
Gewicht	5	5	5	6	7	7	6	6	4	5	7	6
Komb. Mittel	42,7	42,9	43,1	43,3	43,5	43,6	43,7	43,9	44,0	44,1	44,1	44,2

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	44,7	44,8	44,6	44,6	44,6	44,6	44,6	44,5	44,4	44,3	44,3	44,2
2	44,8	44,9	44,9	44,9	45,0	45,0	45,1	45,2	45,3	45,4	44,7	43,9
3	44,2	44,3	44,0	44,0	43,2	43,6	43,2	43,9	43,0	43,1	43,3	43,5
4	43,9	44,0	41,5	41,4	44,2	41,6	42,0	44,3	44,3	44,2	44,2	44,1
5	43,9	41,5	45,8	45,8	44,0	45,7	44,5	42,7	43,2	43,2	43,6	
6		45,7	44,2						44,3		44,1	
7		44,0										
Mittel	44,3	44,2	44,2	44,2	44,2	44,1	43,9	44,1	44,1	44,0	44,1	43,9
Gewicht	5	7	6	5	5	5	5	5	6	5	6	4
Komb. Mittel	44,3	44,2	44,2	44,2	44,2	44,1	44,0	44,1	44,1	44,1	44,0	44,0

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen für Höhensteig-Irschenberg.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	−2,3	−1,4	−0,9	−1,2	−0,1	+0,2	+0,7	±0,0	+0,1	−0,2	−0,4	−0,1
2	−2,1	−3,5	−1,9	−0,3	−0,2	−1,0	−1,0	−1,5	−0,2	−0,9	±0,0	±0,0
3	−1,7	−2,3	−2,7	−3,0	−1,6	−1,0	−0,4	−0,1	−1,1	−0,1	−0,6	−0,3
4	−1,7	−0,2	−1,4	−1,4	−2,5	−0,6	−1,1	−0,3	−0,4	−0,9	±0,0	−0,5
5	−3,1	−1,5	−0,4	−0,9	−0,1	−0,7	−0,1	−0,8	−0,4	−0,2	−0,4	+0,9
6		−3,6	−1,4	−2,0	−2,1	−1,8	−0,8	−1,0	−0,8	−0,4	−0,4	−0,3
7			−3,8	−2,5	−2,5	−1,6	−0,3	−0,9	−0,7	−0,4	−0,1	−0,8
8							−1,4			−0,9	−0,2	
9											−0,4	
Mittel	−2,2	−2,2	−1,8	−1,6	−1,3	−0,9	−0,6	−0,7	−0,5	−0,5	−0,3	−0,1
Gewicht	5	6	7	7	7	7	8	7	7	8	9	7
Komb. Mittel	−2,3	−2,1	−1,9	−1,6	−1,3	−0,9	−0,7	−0,6	−0,6	−0,5	−0,3	−0,2

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	−0,1	−0,1	+0,3	−0,2	−0,1	−0,2	−0,4	−0,9	−1,2	−0,7	−0,6	−0,6
2	−0,1	+0,2	±0,0	+0,1	+0,2	±0,0	−0,1	−0,1	+0,4	−0,2	−0,8	−0,7
3	+0,1	−0,3	−0,6	+0,3	−0,2	−0,2	−0,2	−0,8	−1,3	−1,2	−0,7	−0,2
4	−0,1	−0,2	−0,4	−0,3	±0,0	−0,7	±0,0	−0,8	−1,0	−0,3	−0,7	−0,8
5	−0,2	−0,5	−0,4	−0,2	−0,6		−1,8	−1,6	−0,8	±0,0	−0,6	
6	+0,1	−0,3					−1,0	−0,7	−1,0	−1,1		
7	−1,4							−0,5	+0,1	−0,1		
8	−0,5									−0,4		
Mittel	−0,3	−0,2	−0,2	−0,1	−0,1	−0,3	−0,6	−0,8	−0,7	−0,5	−0,7	−0,6
Gewicht	8	6	5	5	5	4	6	7	7	8	5	4
Komb. Mittel	−0,2	−0,2	−0,2	−0,1	−0,2	−0,3	−0,6	−0,7	−0,7	−0,6	−0,6	−0,6

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	−0,5	−1,4	−2,1	−0,3	−1,8	−1,4	−1,9	−1,2	−1,1	−2,0	−2,1	−2,1
2	−0,2	−0,9	−1,1	−2,1	−0,5	−0,4	−1,1	−0,9	−2,6	−2,9	−1,3	−0,7
3	−1,0	−1,4	−1,5	−1,3	−2,9	−2,6	−2,5	−2,8	−3,5	−2,8	−3,3	−2,0
4	−0,6	−0,9		−1,8	−1,8	−1,4	−1,2	−2,9			−2,3	−2,0
5	−0,8	−1,0		−2,4	−3,7	−4,4	−3,7	−3,1				−3,0
6				−1,7	−1,4	−1,3						
7					−2,5	−3,9						
Mittel	−0,6	−1,1	−1,6	−1,6	−2,1	−2,2	−2,1	−2,2	−2,4	−2,6	−2,2	−2,0
Gewicht	5	5	3	6	7	7	5	5	3	3	4	5
Komb. Mittel	−0,7	−1,1	−1,5	−1,7	−2,0	−2,2	−2,2	−2,2	−2,4	−2,5	−2,3	−2,1

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	— 1,6	— 2,0	— 1,6	— 1,7	— 2,3	— 2,4	— 2,9	— 2,1	— 2,6	— 2,5	— 2,4	
2	— 1,4	— 0,8	— 0,6	± 0,0	— 0,5	— 1,0	— 0,7	— 1,0	— 1,3	— 2,4		
3	— 3,9	— 3,8	— 3,5	— 2,6	— 4,2	— 3,5	— 3,3	— 2,6	— 2,9			
4	— 2,0	— 1,8	— 4,2	— 4,8	— 4,8	— 3,2	— 2,9	— 2,7	— 2,8			
5		— 3,0	— 3,1	— 4,0	— 2,6	— 3,3	— 3,2	— 2,2	— 2,1			
6								— 3,5				
Mittel	— 2,2	— 2,3	— 2,6	— 2,6	— 2,9	— 2,7	— 2,6	— 2,4	— 2,3	— 2,5	— 2,4	
Gewicht	4	5	5	5	5	5	5	6	5	2	1	
Komb. Mittel	— 2,2	— 2,4	— 2,5	— 2,7	— 2,8	— 2,7	— 2,6	— 2,4	— 2,4	— 2,4	— 2,4	

F. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der mittleren absoluten Temperaturen für Höhensteig-Irschenberg.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	286,3	287,4	287,7	287,4	286,6	288,2	288,0	288,1	289,3	290,1	290,8	291,0
2	285,4	285,0	286,2	287,4	287,8	288,0	288,1	288,5	289,7	289,7	290,6	290,9
3	286,8	287,3	288,2	289,9	287,5	289,8	286,2	286,2	285,4	286,7	287,3	292,9
4	291,8	293,8	294,1	296,0	290,8	292,3	290,9	291,4	291,8	292,0	292,4	292,9
5	290,1	292,0	289,6	290,8	294,3	293,0	293,8	293,1	291,9	293,0	293,5	294,9
6	291,6	290,9	292,8	293,6	292,4	295,4	294,2	293,8	295,1	294,9	295,2	297,8
7	286,7	287,1	291,5	292,3	294,1	292,3	296,6	294,9	295,1	296,6	297,5	293,5
8	289,8	287,5	287,3	287,3	291,8	288,0	292,4	293,4	292,9	293,8	292,7	291,4
9		291,8	288,5	289,8	287,5	291,2	288,5	289,4	289,5	290,6	290,9	296,0
10			292,2	292,9	290,8	295,0	292,6	293,4	294,0	295,0	295,2	297,1
11					293,0		295,4	295,3	296,5	296,9	297,2	
Mittel	288,6	289,2	289,8	290,7	290,6	291,3	291,5	291,6	291,9	292,7	293,0	293,8
Gewicht	8	9	10	10	11	10	11	11	11	11	11	10
Komb. Mittel	288,8	289,2	289,9	290,5	290,8	291,2	291,5	291,7	292,0	292,6	293,1	293,5

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	289,7	290,8	291,3	291,0	291,3	291,0	290,3	290,2	290,2	290,2	290,0	289,4
2	290,4	290,6	290,6	291,6	291,0	290,7	290,1	289,1	288,3	287,9	287,8	287,5
3	289,0	290,2	290,5	290,6	290,4	290,3	294,6	291,9	295,0	295,3	294,8	294,4
4	292,5	291,9	293,6	293,5	294,2	294,6	293,6	294,8	295,5	295,7	295,5	294,8
5	292,3	296,2	295,8	291,6	292,4	293,3	296,3	294,7	296,1	296,3	295,6	294,9
6	296,7	299,3	299,9	296,2	295,6	296,6	299,8	296,1	299,1	299,1	298,4	298,0
7	298,6	290,9	289,6	300,0	300,3	299,8	287,9	299,5	294,2	297,9	297,6	292,5
8	291,6	292,3	292,7	288,3	288,2	293,5	293,6	288,2	297,6			297,3
9	296,2	296,7	296,9	292,6	292,7	297,8	297,8	293,8				
10	297,0			297,3	297,8			298,0				
11	292,4											
Mittel	293,3	293,2	293,4	293,3	293,4	294,2	293,8	293,6	294,5	294,6	294,2	293,6
Gewicht	11	9	9	10	10	9	9	10	8	7	7	8
Komb. Mittel	293,4	293,3	293,3	293,4	293,6	293,9	293,9	293,9	294,3	294,5	294,2	293,8

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	288,5	287,9	286,8	286,3	286,6	286,5	286,1	285,9	285,6	285,7	285,6	285,6
2	293,4	292,4	292,3	291,7	291,2	290,3	289,8	289,7	289,4	288,9	288,3	289,1
3	293,9	293,4	295,0	294,6	294,0	293,9	295,3	295,7	295,5	291,3	297,4	297,2
4	295,2	295,6	290,1	289,6	288,8	288,5	291,8	288,4	288,4	296,2	287,3	287,1
5	297,1	290,9	295,1	294,7	293,8	292,8		291,4	291,1	287,4	292,9	
6	292,6	295,6		292,4						292,1		
7	296,2											
Mittel	293,8	292,6	291,9	291,6	290,9	290,4	290,8	290,2	290,0	290,3	290,3	289,8
Gewicht	7	6	5	6	5	5	4	5	5	6	5	4
Komb. Mittel	293,5	292,7	292,0	291,5	291,0	290,6	290,6	290,3	290,1	290,2	290,2	290,0

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	286,0	297,0	290,5	286,1	285,7	286,1	285,9	286,2	286,0	292,8	285,9	286,1
2	289,6	286,8	297,0	291,0	292,9	289,7	294,8	289,8	293,3	289,8	292,4	286,1
3	297,5	289,8	286,8	297,0	296,2	296,0	286,1	293,7	292,5	285,7	289,7	291,6
4	286,8		289,5				288,4	285,9	285,8		291,3	290,5
5									288,5		285,7	288,6
6											288,8	
Mittel	290,0	291,2	291,0	291,4	291,6	290,6	288,8	288,9	289,2	289,4	289,0	288,6
Gewicht	4	3	4	3	3	3	4	4	5	3	6	5
Komb. Mittel	290,3	290,9	291,2	291,4	291,3	290,4	289,3	289,0	289,2	289,3	289,0	289,0

Tafel Nr 4.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Irschenberg und Höhensteig.

A. Beobachtet in Irschenberg.

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
1	16. Nm	8.—	692,5	286,3	51,2	43,0	43,3	—0,7	38	19. Vm	2.—	696,8	285,8	51,3	43,7	44,0	—0,7
2	„	9.—	692,3	286,4	55,9	43,0	43,3	—1,1	39	„	2.30	697,1	285,3	52,2	43,9	44,2	—0,7
3	„	10.—	692,2	285,5	66,9	43,2	43,5	—2,0	40	„	3.—	697,2	285,6	51,9	43,8	44,1	—0,7
4	„	11.—	692,0	285,8	75,5	43,1	43,4	—2,8	41	„	3.30	697,2	284,8	54,5	44,1	44,4	—0,9
5	„	11.30	691,7	285,8	73,2	43,1	43,4	—2,6	42	„	4.—	697,4	284,8	55,4	44,1	44,4	—1,0
6	„	12.—	691,6	286,3	58,5	42,9	43,2	—1,4	43	„	4.30	697,4	284,8	54,3	44,1	44,4	—0,9
7	17. Vm	12.30	691,0	285,0	56,8	43,2	43,6	—1,2	44	„	5.—	697,5	284,8	59,5	44,1	44,4	—1,3
8	„	1.—	690,8	286,8	69,0	42,7	43,0	—2,3	45	„	7.—	698,1	287,8	50,4	43,3	43,6	—0,6
9	„	1.30	690,5	286,7	74,1	42,7	43,0	—2,7	46	„	7.30	698,4	289,8	40,9	42,7	43,0	+0,1
10	„	2.—	690,0	285,8	69,6	42,9	43,2	—2,3	47	„	8.—	698,5	290,8	35,5	42,4	42,7	+0,5
11	„	2.30	690,0	286,5	82,8	42,7	43,0	—3,4	48	„	8.30	698,5	290,0	34,6	42,6	43,0	+0,5
12	„	3.—	690,0	286,5	83,3	42,7	43,0	—3,4	49	„	9.—	698,3	290,7	36,8	42,4	42,7	+0,4
13	„	3.30	689,7	286,8	73,6	42,5	42,8	—2,6	50	„	9.30	698,4	290,8	38,3	42,4	42,7	+0,3
14	„	4.—	689,3	286,0	68,1	42,7	43,0	—2,2	51	„	10.—	698,1	291,4	37,5	42,2	42,5	+0,4
15	„	5.—	688,9	285,8	74,4	42,7	43,0	—2,7	52	„	10.30	698,2	291,6	37,4	42,2	42,5	+0,4
16	„	5.30	688,4	286,1	72,2	42,6	42,9	—2,5	53	„	11.—	698,1	291,8	37,2	42,1	42,4	+0,4
17	18. Vm	8.—	689,8	286,2	49,0	42,7	43,0	—0,6	54	„	11.30	697,9	292,8	34,7	41,8	42,1	+0,6
18	18. Nm	12.30	690,4	289,7	28,1	41,8	42,1	+1,1	55	„	12.—	697,8	291,8	37,4	42,0	42,4	+0,3
19	„	1.—	690,3	290,1	30,7	41,6	41,9	+0,9	56	19. Nm	12.30	697,7	293,5	38,4	41,5	41,9	+0,2
20	„	1.30	690,3	290,2	34,4	41,6	41,9	+0,6	57	„	1.—	697,6	292,8	37,8	41,7	42,1	+0,3
21	„	2.30	690,6	289,7	41,3	41,8	42,1	±0,0	58	„	1.30	697,6	293,1	43,2	41,6	42,0	—0,2
22	„	3.30	690,7	290,3	37,4	41,6	41,9	+0,3	59	„	2.—	697,4	293,5	39,6	41,5	41,8	+0,1
23	„	4.30	691,4	286,9	46,0	42,7	43,0	—0,3	60	„	2.30	697,3	294,4	40,4	41,2	41,6	±0,0
24	„	5.—	691,8	287,6	42,6	42,5	42,9	—0,1	61	„	3.—	697,2	294,4	40,8	41,2	41,6	±0,0
25	„	7.30	693,9	286,8	47,3	43,0	43,4	—0,4	62	„	3.30	697,1	294,6	39,5	41,2	41,5	+0,1
26	„	8.—	694,4	286,5	48,4	43,2	43,5	—0,5	63	„	4.—	696,9	295,0	38,0	41,0	41,3	+0,2
27	„	8.30	694,4	286,7	48,4	43,1	43,5	—0,5	64	„	4.30	696,8	295,3	35,4	40,9	41,2	+0,4
28	„	9.—	694,9	286,7	49,6	43,2	43,5	—0,6	65	„	5.—	696,6	294,6	41,4	41,1	41,4	—0,1
29	„	9.30	695,1	286,4	48,6	43,3	43,6	—0,5	66	„	5.30	696,3	293,9	39,7	41,3	41,6	+0,1
30	„	10.—	695,3	286,6	51,1	43,3	43,6	—0,7	67	„	6.—	696,2	292,8	41,6	41,6	41,9	—0,1
31	„	10.30	695,5	286,1	49,4	43,5	43,8	—0,5	68	„	7.—	696,0	292,1	46,5	41,7	42,1	—0,4
32	„	11.—	695,8	286,0	53,5	43,5	43,8	—0,9	69	„	7.30	696,1	291,8	56,6	41,8	42,1	—1,3
33	„	11.30	696,1	285,6	52,6	43,7	44,0	—0,8	70	„	8.—	696,3	291,8	60,9	41,9	42,2	—1,6
34	„	12.—	696,2	285,5	53,0	43,7	44,1	—0,8	71	„	8.30	696,1	290,6	64,7	42,2	42,5	—1,9
35	19. Vm	12.30	696,2	285,7	53,7	43,7	44,0	—0,9	72	„	9.—	696,0	289,8	67,0	42,4	42,7	—2,1
36	„	1.—	696,6	285,3	51,3	43,8	44,2	—0,7	73	„	9.30	695,7	289,8	74,8	42,4	42,7	—2,8
37	„	1.30	696,7	285,8	53,4	43,7	44,0	—0,9	74	20. Vm	12.30	696,2	290,8	88,4	42,1	42,5	—3,9

Nr	Zeit der Beobachtung		Luftdruck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luftdruck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
75	20. Vm	1.—	695,9	291,3	73,4	42,0	42,3	—2,7	127	23. Vm	7.—	696,1	293,3	78,9	41,4	41,7	—3,2
76	„	1.30	695,6	292,4	62,2	41,6	41,9	—1,8	128	„	7.30	696,0	293,3	69,5	41,4	41,7	—2,4
77	„	2.—	695,5	293,2	47,9	41,4	41,7	—0,6	129	„	8.—	696,5	293,3	64,9	41,5	41,8	—2,0
78	„	2.30	695,2	293,5	49,5	41,2	41,6	—0,7	130	„	8.30	696,3	295,4	55,2	40,9	41,2	—1,2
79	„	3.30	695,2	293,8	50,3	41,2	41,5	—0,8	131	„	9.—	696,2	297,6	49,2	40,2	40,5	—0,8
80	„	4.—	695,3	293,8	61,9	41,2	41,5	—1,8	132	„	10.—	696,2	293,6	41,9	41,3	41,7	—0,1
81	„	4.30	695,1	293,2	68,6	41,3	41,6	—2,3	133	„	10.30	696,2	296,1	45,0	40,6	41,0	—0,4
82	„	5.—	695,7	292,8	71,4	41,5	41,8	—2,5	134	„	11.—	696,2	297,0	41,2	40,4	40,7	—0,1
83	„	6.30	695,9	293,8	73,8	41,3	41,6	—2,8	135	„	11.30	695,9	297,2	43,2	40,3	40,6	—0,3
84	„	8.—	695,9	294,5	71,6	41,1	41,4	—2,6	136	„	12.—	696,0	298,3	37,7	40,0	40,3	+0,2
85	„	8.30	696,4	291,8	67,3	41,9	42,2	—2,2	137	23. Nm	12.30	695,6	298,8	37,9	39,8	40,1	+0,1
86	„	9.—	696,4	294,8	52,4	41,0	41,3	—1,0	138	„	1.—	695,5	299,3	35,1	39,7	40,0	+0,4
87	22. Vm	7.—	698,6	289,4	55,4	42,8	43,2	—1,1	139	„	1.30	695,4	299,4	34,0	39,7	40,0	+0,4
88	„	7.30	698,4	291,6	55,1	42,2	42,5	—1,1	140	„	2.—	695,2	299,7	36,5	39,6	39,9	+0,2
89	„	8.—	698,3	293,1	52,9	41,7	42,0	—1,0	141	„	2.30	694,7	299,0	35,6	39,7	40,0	+0,3
90	„	9.—	698,5	294,8	41,3	41,3	41,6	±0,0	142	„	3.—	694,4	299,5	35,2	39,5	39,8	+0,2
91	„	9.30	698,3	293,8	34,0	41,5	41,9	+0,6	143	„	3.30	694,3	299,1	31,5	39,6	39,9	+0,6
92	„	10.—	698,1	295,6	36,1	41,0	41,3	+0,4	144	„	4.—	694,4	298,6	39,4	39,8	40,1	±0,0
93	„	10.30	698,1	295,0	36,3	41,2	41,5	+0,4	145	„	4.30	694,0	298,5	39,5	39,8	40,1	±0,0
94	„	11.—	698,0	295,3	35,6	41,1	41,4	+0,4	146	„	5.—	693,4	297,8	42,0	39,9	40,2	—0,2
95	„	11.30	698,0	295,0	40,0	41,2	41,5	+0,1	147	„	5.30	693,5	297,1	42,0	40,1	40,4	—0,2
96	„	12.—	697,9	298,0	39,0	40,3	40,6	+0,1	148	„	6.—	693,1	296,4	46,4	40,2	40,5	—0,6
97	22. Nm	12.30	697,6	296,2	42,2	40,8	41,1	—0,2	149	„	6.30	692,8	294,9	45,2	40,6	40,9	—0,4
98	„	1.—	697,4	295,3	34,9	41,0	41,3	+0,3	150	„	7.—	692,4	294,1	55,1	40,8	41,1	—1,2
99	„	1.30	697,4	296,0	39,0	40,8	41,1	+0,1	151	„	7.30	692,5	293,8	65,7	40,8	41,2	—2,1
100	„	2.—	697,1	295,3	32,7	41,0	41,3	+0,7	152	„	12.—	691,9	298,9	71,0	39,4	39,7	—2,6
101	„	2.30	697,1	296,1	35,9	40,8	41,1	+0,4	153	24. Vm	12.30	691,9	297,9	60,8	39,7	40,0	—1,8
102	„	3.—	696,8	295,8	34,8	40,8	41,1	+0,5	154	„	1.—	691,9	297,9	63,5	39,7	40,0	—2,0
103	„	3.30	696,4	295,3	28,5	40,9	41,2	+1,0	155	„	1.30	692,0	297,3	75,3	39,8	40,1	—3,0
104	„	4.—	696,4	295,4	34,5	40,9	41,2	+0,5	156	„	2.—	691,9	297,0	79,2	39,9	40,2	—3,3
105	„	4.30	696,3	295,8	38,5	40,7	41,0	+0,1	157	„	2.30	692,1	296,2	71,5	40,1	40,4	—2,7
106	„	5.30	696,1	294,8	36,6	41,0	41,3	+0,3	158	„	3.—	692,4	295,3	66,1	40,4	40,7	—2,2
107	„	6.—	696,1	295,3	41,2	40,9	41,2	—0,1	159	„	3.30	692,8	294,8	61,2	40,6	40,9	—1,8
108	„	6.30	696,2	292,3	44,5	41,7	42,0	—0,3	160	„	4.—	692,9	293,8	64,2	40,9	41,2	—2,0
109	„	7.—	696,1	292,0	44,9	41,8	42,1	—0,3	161	„	4.30	693,2	293,5	69,1	41,0	41,3	—2,4
110	„	7.30	696,3	292,0	41,7	41,8	42,1	±0,0	162	„	5.—	693,4	292,8	73,1	41,2	41,5	—2,7
111	„	8.—	696,4	292,0	48,1	41,8	42,1	—0,6	163	„	5.30	694,0	291,0	71,0	41,8	42,1	—2,5
112	„	8.30	696,0	292,5	49,2	41,6	42,0	—0,7	164	„	6.30	694,3	290,2	41,6	42,1	42,4	±0,0
113	„	9.—	696,0	291,8	46,0	41,8	42,1	—0,4	165	„	7.—	695,2	290,8	36,9	42,0	42,3	+0,4
114	„	9.30	695,7	291,8	54,7	41,8	42,1	—1,1	166	„	8.—	695,6	291,0	42,5	42,0	42,3	+0,6
115	„	10.—	695,5	290,9	67,0	42,0	42,3	—2,1	167	„	8.30	695,7	291,7	43,5	41,8	42,1	—0,2
116	„	10.30	695,4	291,8	59,2	41,7	42,1	—1,5	168	„	9.—	696,0	291,8	42,6	41,8	42,1	—0,1
117	„	11.—	694,9	291,9	75,2	41,7	42,0	—2,9	169	„	9.30	696,5	293,1	42,2	41,5	41,8	—0,1
118	„	11.30	694,9	290,8	64,7	42,0	42,3	—1,9	170	„	10.—	696,5	292,6	42,7	41,7	42,0	—0,1
119	23. Vm	1.—	695,4	290,8	74,6	42,0	42,4	—2,8	171	„	10.30	696,6	291,8	41,3	41,9	42,2	±0,0
120	„	3.—	696,2	290,2	67,4	42,3	42,6	—2,1	172	„	11.—	696,6	291,3	40,8	42,0	42,4	+0,1
121	„	3.30	696,2	290,6	64,6	42,2	42,5	—3,2	173	„	11.30	697,1	293,0	36,3	41,6	41,9	+0,4
122	„	4.—	696,4	290,7	70,6	42,2	42,5	—2,4	174	„	12.—	697,3	290,4	43,4	42,4	42,7	—0,1
123	„	4.30	696,7	290,5	61,6	42,3	42,6	—1,7	175	24. Nm	12.30	697,5	289,9	43,2	42,6	42,9	—0,1
124	„	5.—	696,6	290,3	67,4	42,3	42,6	—2,1	176	„	1.—	698,3	289,3	40,6	42,8	43,2	+0,2
125	„	5.30	696,6	290,1	62,0	42,4	42,7	—1,7	177	„	3.30	697,5	287,8	49,5	43,2	43,5	—0,6
126	„	6.30	696,4	292,8	68,1	41,6	41,9	—2,3	178	„	4.—	697,8	287,5	51,4	43,3	43,6	—0,7

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in H	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
179	24. Nm	4.30	697,6	287,5	48,0	43,3	43,6	—0,4	218	26. Vm	5.—	696,1	287,7	67,0	43,0	43,4	—2,1
180	25. Vm	7.—	698,5	286,8	48,4	43,6	43,9	—0,4	219	„	9.30	696,0	294,4	46,7	41,1	41,4	—0,5
181	„	7.30	698,6	286,8	50,1	43,6	43,9	—0,6	220	„	10.—	695,9	293,8	39,5	41,3	41,6	+0,1
182	„	8.—	698,7	287,0	44,8	43,6	43,9	—0,1	221	„	10.30	695,8	295,1	37,1	40,9	41,2	+0,3
183	„	8.30	698,9	287,4	44,0	43,5	43,8	—0,1	222	„	11.—	695,7	294,9	38,9	40,9	41,2	+0,1
184	„	9.—	698,9	287,9	41,1	43,3	43,7	+0,1	223	„	11.30	695,6	296,1	37,3	40,6	40,9	+0,2
185	„	9.30	699,0	289,2	43,2	42,9	43,3	—0,1	224	„	12.—	695,9	295,8	37,4	40,7	41,0	+0,2
186	„	10.—	699,0	289,1	38,8	43,0	43,3	+0,3	225	26. Nm	12.30	695,8	296,6	37,2	40,5	40,8	+0,2
187	„	10.30	699,0	290,4	39,4	42,6	42,9	+0,2	226	„	1.—	695,7	296,7	37,3	40,4	40,7	+0,2
188	„	11.—	699,0	290,7	36,4	42,5	42,8	+0,5	227	„	1.30	695,7	296,6	37,5	40,4	40,8	+0,2
189	„	12.—	698,7	291,3	40,8	42,3	42,6	+0,1	228	„	2.—	695,4	296,8	39,2	40,4	40,7	+0,1
190	25. Nm	12.30	698,7	292,3	40,6	42,0	42,3	+0,1	229	„	2.30	695,1	297,7	41,0	40,1	40,4	—0,1
191	„	1.—	698,7	292,8	37,6	41,9	42,2	+0,3	230	„	3.—	695,0	297,7	38,3	40,1	40,4	+0,1
192	„	1.30	698,5	292,3	40,6	42,0	42,3	+0,1	231	„	3.30	694,7	297,7	38,2	40,0	40,3	+0,1
193	„	2.—	698,4	291,8	40,7	42,1	42,4	+0,1	232	„	4.—	694,5	297,1	39,8	40,2	40,5	±0,0
194	„	2.30	698,0	293,3	36,9	41,6	42,0	+0,4	233	„	4.30	694,4	297,5	39,4	40,1	40,4	±0,0
195	„	3.—	697,9	293,3	37,1	41,6	41,9	+0,3	234	„	5.—	694,2	297,0	40,8	40,2	40,5	—0,1
196	„	3.30	697,8	293,2	39,8	41,6	42,0	+0,1	235	„	5.30	694,1	296,7	43,6	40,2	40,5	—0,3
197	„	4.—	697,8	293,8	33,0	41,5	41,8	+0,7	236	„	6.—	693,9	295,5	47,4	40,5	40,9	—0,6
198	„	4.30	697,4	293,3	37,2	41,6	41,9	+0,3	237	„	6.30	693,7	294,8	48,1	40,7	41,0	—0,7
199	„	5.—	697,5	292,3	39,0	41,9	42,2	+0,2	238	„	7.—	693,8	295,3	47,7	40,6	40,9	—0,6
200	„	5.30	697,4	291,5	38,7	42,1	42,4	+0,2	239	„	7.30	693,7	294,8	43,3	40,7	41,0	—0,3
201	„	6.—	697,2	292,3	46,1	41,8	42,1	—0,4	240	„	8.—	693,8	293,8	54,7	41,0	41,3	—1,2
202	„	6.30	697,3	289,8	43,5	42,6	42,9	—0,1	241	„	8.30	693,8	292,8	55,6	41,3	41,6	—1,2
203	„	7.—	697,2	289,4	47,9	42,7	43,0	—0,5	242	„	9.—	693,9	291,8	68,1	41,6	41,9	—2,3
204	„	7.30	697,5	289,3	51,1	42,7	43,0	—0,8	243	„	9.30	694,0	291,6	78,9	41,6	42,0	—3,2
205	„	8.—	697,4	289,3	53,7	42,7	43,0	—1,0	244	„	10.—	693,8	291,4	82,6	41,7	42,0	—3,5
206	„	8.30	697,4	289,2	51,1	42,7	43,1	—0,7	245	„	10.30	693,8	293,8	88,4	41,0	41,3	—4,0
207	„	9.30	697,2	289,0	58,9	42,8	43,1	—1,4	246	27. Vm	2.—	693,4	289,8	95,7	42,1	42,4	—4,5
208	„	10.—	697,1	288,9	71,7	42,8	43,1	—2,5	247	„	3.30	692,5	289,8	100,5	42,0	42,3	—4,9
209	„	10.30	697,0	288,9	73,2	42,8	43,1	—2,6	248	„	4.—	692,4	289,6	92,0	42,0	42,3	—4,2
210	„	11.—	697,0	288,8	84,0	42,8	43,1	—3,5	249	„	4.30	692,4	289,8	86,3	42,0	42,3	—3,8
211	„	11.30	696,9	288,8	97,5	42,8	43,1	—4,6	250	„	7.—	691,7	293,5	73,9	40,8	41,1	—2,8
212	„	12.—	696,9	288,8	101,7	42,8	43,1	—5,0	251	„	7.30	691,4	295,5	72,2	40,3	40,6	—2,7
213	26. Vm	12.30	696,9	288,8	96,4	42,8	43,1	—4,5	252	„	8.—	691,5	294,3	68,4	40,6	40,9	—2,4
214	„	1.—	697,0	288,8	83,7	42,8	43,1	—3,5	253	„	9.30	691,4	295,8	49,2	40,2	40,5	—0,7
215	„	1.30	697,0	287,8	85,7	43,1	43,5	—3,6	254	„	10.30	691,3	296,9	39,4	39,9	40,2	±0,0
216	„	2.—	696,6	287,7	75,5	43,1	43,4	—2,8	255	„	11.—	691,2	296,5	38,6	40,0	40,3	+0,1
217	„	2.30	696,6	287,7	79,0	43,1	43,4	—3,0	256	„	12.—	691,3	296,0	37,2	40,1	40,4	+0,2

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der in Irschenberg nach Höhensteig beobachteten Refraktionen.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1		73,8	50,4	40,9	49,0	34,6	36,8	38,3	37,5	37,4	37,2	34,7
2		68,1	55,4	55,1	35,5	67,3	52,4	34,0	36,1	36,3	35,6	40,0
3		41,6	78,9	69,5	71,6	55,2	41,3	42,2	41,9	45,0	41,2	43,2
4			36,9	50,1	52,9	43,5	49,2	43,2	42,7	41,3	40,8	36,3
5			48,4	72,2	64,9	44,0	42,6	46,7	38,8	39,4	36,4	37,3
6			73,9		42,5		41,1	49,2	39,5	37,1	38,9	
7					44,8					39,4	38,6	
8					68,4							
Mittel		61,2	57,3	57,6	53,7	48,9	43,9	42,3	39,3	39,4	38,4	38,3
Gewicht		3	6	5	8	5	6	6	6	7	7	5
Komb. Mittel		59,5	58,4	56,6	53,5	48,9	44,8	42,0	40,1	39,1	38,6	38,5

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	37,4	28,1	30,7	34,4	39,6	41,3	40,8	37,4	38,0	46,0	42,6	39,7
2	39,0	38,4	37,8	43,2	32,7	40,4	34,8	39,5	34,5	35,4	41,4	36,6
3	37,7	42,2	34,9	39,0	36,5	35,9	35,2	28,5	39,4	38,5	42,0	42,0
4	43,4	37,9	35,1	34,0	40,7	35,6	37,1	31,5	51,4	39,5	39,0	38,7
5	40,8	43,2	40,6	40,6	39,2	36,9	38,3	49,5	33,0	48,0	40,8	43,6
6	37,4	40,6	37,6	37,5		41,0		39,8	39,8	37,2		
7	37,2	37,2	37,3					38,2		39,4		
Mittel	39,0	38,2	36,3	38,1	37,7	38,5	37,2	37,8	39,4	40,6	41,2	40,1
Gewicht	7	7	7	6	5	6	5	7	6	7	5	5
Komb. Mittel	38,6	37,9	37,2	37,6	38,0	38,0	37,7	38,1	39,3	40,5	40,8	41,5

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	41,6	44,5	46,5	47,3	51,2	48,4	55,9	48,6	66,9	49,4	75,5	73,2
2	41,2	45,2	44,9	56,6	48,4	64,7	49,6	74,8	51,1	59,2	53,5	52,6
3	46,4	43,5	55,1	41,7	60,9	49,2	67,0	54,7	67,0	73,2	75,2	64,7
4	46,1	48,1	47,9	65,7	48,1	51,1	46,0	58,9	71,7	88,4	84,0	97,5
5	47,4		47,7	51,1	53,7	55,6	68,1	78,9	82,6			
6				43,3	54,7							
Mittel	44,5	45,3	48,4	51,0	52,8	53,8	57,3	63,2	67,9	67,6	72,1	72,0
Gewicht	5	4	5	6	6	5	5	5	5	4	4	4
Komb. Mittel	43,6	45,9	48,3	50,8	52,6	54,4	57,9	62,9	66,7	68,8	71,0	71,8

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	58,5	56,8	69,0	74,1	69,6	82,8	83,3	73,6	68,1	54,3	74,4	72,2
2	53,0	53,7	51,3	53,4	51,3	52,2	51,9	54,5	55,4	68,6	59,5	62,0
3	71,0	88,4	73,4	62,2	47,9	49,5	67,4	50,3	61,9	61,6	71,4	71,0
4	101,7	60,8	74,6	75,3	79,2	71,5	66,1	64,6	70,6	69,1	67,4	
5		96,4	63,5	85,7	75,5	79,0		61,2	64,2	86,3	73,1	
6			83,7		95,7			100,5	92,0		67,0	
Mittel	71,1	71,0	69,2	70,1	69,9	67,0	67,1	67,4	68,7	68,0	68,8	68,4
Gewicht	4	5	6	5	6	5	4	6	6	5	6	3
Komb. Mittel	71,3	70,6	69,9	69,8	69,2	67,8	67,2	67,7	68,2	68,4	68,5	66,7

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Irschenberg aus Irschenberg-Höhensteig.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	41,5	41,3	42,8	42,7	42,7	42,6	42,4	42,4	42,2	42,2	42,1	41,8
2	42,4	41,6	41,4	40,4	42,4	41,9	41,0	41,5	41,0	41,2	41,1	41,2
3		42,1	42,0	42,2	41,1	40,9	41,3	41,5	41,3	40,6	40,4	40,3
4			40,8	41,4	41,7	41,8	40,2	41,1	41,7	41,9	42,0	41,6
5				43,6	41,5		41,8	40,2	41,3	42,6	42,5	40,6
6				40,3	42,0				40,0	40,9	40,9	
7					40,6					39,9	40,0	
Mittel	42,0	41,7	41,8	41,8	41,7	41,8	41,3	41,3	41,3	41,3	41,3	41,1
Gewicht	2	3	4	6	7	4	5	5	6	7	7	5
Komb. Mittel	42,0	41,8	41,8	41,8	41,8	41,7	41,4	41,3	41,3	41,3	41,3	41,2

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	42,0	41,8	41,6	41,6	41,5	41,8	41,2	41,6	41,0	42,7	42,5	41,3
2	40,3	41,5	41,7	41,6	41,0	41,2	40,8	41,2	40,9	40,9	41,1	41,0
3	40,0	40,8	41,0	40,8	39,6	40,8	39,5	40,9	39,8	40,7	39,9	40,1
4	42,4	39,8	39,7	39,7	42,1	39,7	41,6	39,6	43,3	39,8	41,9	42,1
5	42,3	42,0	41,9	42,0	40,4	41,6	40,1	43,2	41,5	43,3	40,2	40,2
6	40,7	40,5	40,4	40,4		40,1		41,6	40,2	41,6		
7	40,1							40,0		40,1		
Mittel	41,1	41,1	41,1	41,0	40,9	40,9	40,6	41,2	41,1	41,3	41,1	40,9
Gewicht	7	6	6	6	5	6	5	7	6	7	5	5
Komb. Mittel	41,1	41,1	41,1	41,0	40,9	40,8	40,8	41,0	41,2	41,2	41,1	41,0

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	41,6	41,7	41,7	43,0	43,0	43,1	43,0	43,3	43,2	43,5	43,1	43,1
2	40,9	40,6	41,8	41,8	43,2	42,2	43,2	42,4	43,3	41,7	43,5	43,7
3	40,2	42,6	40,8	41,8	41,9	42,6	42,4	41,8	42,0	42,8	41,7	42,0
4	41,8	40,7	42,7	40,8	41,8	41,0	41,8	40,0	39,7	41,0	42,8	42,8
5	40,5		40,6	42,7	41,0	42,7	40,2	42,8	42,8		40,4	40,4
6				40,7	42,7	41,3	42,8	41,6	41,7			
7					41,0		41,6					
Mittel	41,0	41,4	41,5	41,8	42,1	42,0	42,1	42,0	42,1	42,3	42,3	42,4
Gewicht	5	4	5	6	7	6	7	6	6	4	5	5
Komb. Mittel	41,1	41,3	41,6	41,8	42,0	42,1	42,1	42,1	42,1	42,3	42,3	42,4

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	42,9	43,2	42,7	42,7	42,9	42,7	42,7	42,5	42,7	44,1	42,7	42,6
2	43,7	43,7	43,8	43,7	43,7	43,9	43,8	44,1	44,1	41,3	44,1	41,6
3	42,8	42,1	42,0	41,6	41,4	41,2	42,3	41,2	41,2	42,3	41,5	42,4
4	40,4	42,8	42,0	43,1	43,1	43,1	40,4	42,2	42,2	41,0	42,3	41,8
5		41,8	42,8	42,0	42,1	42,0	43,1	40,6	40,9	43,1	41,2	42,0
6			41,8				42,0	42,0	43,1	42,0	43,0	
7									42,0		41,9	
Mittel	42,4	42,7	42,5	42,6	42,6	42,6	42,4	42,1	42,3	42,3	42,4	42,1
Gewicht	4	5	6	5	5	5	6	6	7	6	7	5
Komb. Mittel	42,5	42,6	42,6	42,6	42,6	42,6	42,4	42,2	42,3	42,3	42,3	42,2

D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Höhensteig aus Irschenberg-Höhensteig.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	41,8	41,6	43,2	43,0	43,0	43,0	42,7	42,7	42,5	42,5	42,4	42,1
2	42,8	41,9	41,7	40,7	42,7	42,2	41,3	41,9	41,3	41,5	41,4	41,5
3		42,4	42,3	42,5	41,4	41,2	41,6	41,8	41,7	41,0	40,7	40,6
4			41,1	41,7	42,0	42,1	40,5	41,4	42,0	42,2	42,4	41,9
5				43,9	41,8		42,1	40,5	41,6	42,9	42,8	40,9
6				40,6	42,3				40,3	41,2	41,2	
7					40,9					40,2	40,3	
Mittel	42,3	42,0	42,1	42,1	42,0	42,1	41,6	41,7	41,6	41,6	41,6	41,4
Gewicht	2	3	4	6	7	4	5	5	6	7	7	5
Komb. Mittel	42,3	42,1	42,1	42,1	42,1	41,9	41,8	41,7	41,6	41,6	41,6	41,5

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	42,4	42,1	41,9	41,9	41,8	42,1	41,6	41,9	41,3	43,0	42,9	41,6
2	40,6	41,9	42,1	42,0	41,3	41,6	41,1	41,5	41,2	41,2	41,4	41,3
3	40,3	41,1	41,3	41,1	39,9	41,1	39,8	41,2	40,1	41,0	40,2	40,4
4	42,7	40,1	40,0	40,0	42,4	40,0	41,9	39,9	43,6	40,1	42,2	42,4
5	42,6	42,3	42,2	42,3	40,7	42,0	40,4	43,5	41,8	43,6	40,5	40,5
6	41,0	40,8	40,7	40,8		40,4		42,0	40,5	41,9		
7	40,4							40,3		40,4		
Mittel	41,4	41,4	41,4	41,4	41,2	41,2	41,0	41,5	41,4	41,6	41,4	41,2
Gewicht	7	6	6	6	5	6	5	7	6	7	5	5
Komb. Mittel	41,4	41,4	41,4	41,4	41,3	41,2	41,2	41,4	41,5	41,5	41,4	41,3

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	41,9	42,0	42,1	43,4	43,3	43,5	43,3	43,6	43,5	43,8	43,4	43,4
2	41,2	40,9	42,1	42,1	43,5	42,5	43,5	42,7	43,6	42,1	43,8	44,0
3	40,5	42,9	41,1	42,1	42,2	42,0	42,7	42,1	42,3	43,1	42,0	42,3
4	42,1	41,0	43,0	41,2	42,1	41,3	42,1	40,3	40,0	41,3	43,1	43,1
5	40,9		40,9	43,0	41,3	43,1	40,5	43,1	43,1		40,7	40,7
6				41,0	43,0	41,6	43,1	42,0	42,0			
7					41,3		41,9					
Mittel	41,3	41,7	41,8	42,1	42,4	42,3	42,4	42,3	42,4	42,6	42,7	42,7
Gewicht	5	4	5	6	7	6	7	6	6	4	5	5
Komb. Mittel	41,4	41,6	41,9	42,1	42,3	42,4	42,4	42,4	42,4	42,6	42,7	42,7

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	43,2	43,6	43,0	43,0	43,2	43,0	43,0	42,8	43,0	44,4	43,0	42,9
2	44,1	44,0	44,2	44,0	44,0	44,2	44,1	44,4	44,4	41,6	44,4	42,0
3	43,1	42,5	42,3	41,9	41,7	41,6	42,6	41,5	41,5	42,6	41,8	42,7
4	40,7	43,1	42,4	43,5	43,4	43,4	40,7	42,5	42,5	41,3	42,6	42,1
5		42,1	43,1	42,3	42,4	42,3	43,4	40,9	41,2	43,4	41,5	42,4
6			42,1				42,3	42,3	43,4	42,3	43,4	
7									42,3		42,3	
Mittel	42,8	43,1	42,9	42,9	42,9	42,9	42,7	42,4	42,6	42,6	42,7	42,4
Gewicht	4	5	6	5	5	5	6	6	7	6	7	5
Komb. Mittel	42,9	43,0	43,0	42,9	42,9	42,9	42,7	42,5	42,6	42,6	42,6	42,5

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen für Irschenberg-Höhensteig.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1		−2,8	−0,6	+0,1	−0,6	+0,5	+0,4	+0,3	+0,4	+0,4	+0,4	+0,6
2		−2,3	−1,1	−1,1	+0,5	−2,2	−1,0	+0,6	+0,4	+0,4	+0,4	+0,1
3		±0,0	−3,2	−2,4	−2,6	−1,2	±0,0	−0,1	−0,1	−0,4	−0,1	−0,3
4			+0,4	−0,6	−1,0	−0,2	−0,8	−0,1	−0,1	±0,0	+0,1	+0,4
5			−0,4	−2,7	−2,0	−0,1	−0,1	−0,5	+0,3	+0,2	+0,5	+0,2
6			−2,8		+0,6		+0,1	−0,7	+0,1	+0,3	+0,1	
7					−0,1					±0,0	+0,1	
8					−2,4							
Mittel		−1,7	−1,3	−1,3	−0,9	−0,7	−0,2	−0,1	+0,2	+0,1	+0,2	+0,3
Gewicht		3	6	5	8	5	6	6	6	7	7	5
Komb. Mittel		−1,7	−1,4	−1,2	−1,0	−0,6	−0,3	−0,1	+0,1	+0,2	+0,2	+0,2

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	+0,3	+1,1	+0,9	+0,6	+0,1	±0,0	±0,0	+0,3	+0,2	−0,3	−0,1	+0,1
2	+0,1	+0,2	+0,3	−0,2	+0,7	±0,0	+0,5	+0,1	+0,5	+0,4	−0,1	+0,3
3	+0,2	−0,2	+0,3	+0,1	+0,2	+0,4	+0,2	+1,0	±0,0	+0,1	−0,2	−0,2
4	−0,1	+0,1	+0,4	+0,4	+0,1	+0,3	+0,3	+0,6	−0,7	±0,0	+0,2	+0,2
5	+0,1	−0,1	+0,2	+0,1	+0,1	+0,4	+0,1	−0,6	+0,7	−0,4	−0,1	−0,3
6	+0,2	+0,1	+0,3	+0,2		−0,1		+0,1	±0,0	+0,3		
7	+0,2	+0,2	+0,2					+0,1		±0,0		
Mittel	+0,1	+0,2	+0,4	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,3	+0,1	±0,0	−0,1	±0,0
Gewicht	7	7	7	6	5	6	5	7	6	7	5	5
Komb. Mittel	+0,2	+0,2	+0,3	+0,3	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,1	±0,0	±0,0	−0,1

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	— 0,1	— 0,3	— 0,4	— 0,4	— 0,7	— 0,5	— 1,1	— 0,5	— 2,0	— 0,5	— 2,8	— 2,6
2	— 0,1	— 0,4	— 0,3	— 1,3	— 0,5	— 1,9	— 0,6	— 2,8	— 0,7	— 1,5	— 0,9	— 0,8
3	— 0,6	— 0,1	— 1,2	± 0,0	— 1,6	— 0,7	— 2,1	— 1,1	— 2,1	— 2,6	— 2,9	— 1,9
4	— 0,4	— 0,7	— 0,5	— 2,1	— 0,6	— 0,7	— 0,4	— 1,4	— 2,5	— 4,0	— 3,5	— 4,6
5	— 0,6		— 0,6	— 0,8	— 1,0	— 1,2	— 2,3	— 3,2	— 3,5			
6				— 0,3	— 1,2							
Mittel	— 0,3	— 0,4	— 0,6	— 0,8	— 0,9	— 1,0	— 1,3	— 1,8	— 2,1	— 2,2	— 2,5	— 2,5
Gewicht	5	4	5	6	6	5	5	5	5	4	4	4
Komb. Mittel	— 0,3	— 0,4	— 0,6	— 0,8	— 0,9	— 1,1	— 1,4	— 1,8	— 2,1	— 2,3	— 2,4	— 2,5

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	— 1,4	— 1,2	— 2,3	— 2,7	— 2,3	— 3,4	— 3,4	— 2,6	— 2,2	— 0,9	— 2,7	— 2,5
2	— 0,8	— 0,9	— 0,7	— 0,9	— 0,7	— 0,7	— 0,7	— 0,9	— 1,0	— 2,3	— 1,3	— 1,7
3	— 2,6	— 3,9	— 2,7	— 1,8	— 0,6	— 0,7	— 2,1	— 0,8	— 1,8	— 1,7	— 2,5	— 2,5
4	— 5,0	— 1,8	— 2,8	— 3,0	— 3,3	— 2,7	— 2,2	— 3,2	— 2,4	— 2,4	— 2,1	
5		— 4,5	— 2,0	— 3,6	— 2,8	— 3,0		— 1,8	— 2,0	— 3,8	— 2,7	
6			— 3,5		— 4,5			— 4,9	— 4,2		— 2,1	
Mittel	— 2,4	— 2,5	— 2,3	— 2,4	— 2,4	— 2,1	— 2,1	— 2,4	— 2,3	— 2,2	— 2,2	— 2,2
Gewicht	4	5	6	5	6	5	4	6	6	5	6	3
Komb. Mittel	— 2,5	— 2,4	— 2,4	— 2,4	— 2,3	— 2,2	— 2,2	— 2,3	— 2,3	— 2,2	— 2,2	— 2,1

Tafel Nr 5.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Irschenberg und Kampenwand.

A. Beobachtet in Irschenberg.

Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in K	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in K	Höh Diffr Δ
	1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
1	17. Vm 5.—	688,9	285,8	84,4	82,3	80,5	—0,2	37	19. Nm 12.30	697,7	293,5	85,7	80,0	78,3	—0,8
2	18. Nm 1.—	690,3	290,1	83,6	80,2	78,4	—0,5	38	„ 1.—	697,6	292,8	88,0	80,4	78,6	—1,1
3	„ 1.30	690,3	290,2	88,1	80,1	78,4	—1,2	39	„ 1.30	697,6	293,1	87,6	80,2	78,5	—1,1
4	„ 2.30	690,6	289,7	86,9	80,5	78,7	—1,0	40	„ 2.—	697,4	293,5	88,1	79,9	78,2	—1,2
5	„ 7.—	693,7	286,6	91,8	83,0	81,2	—1,4	41	„ 2.30	697,3	294,4	87,1	79,4	77,7	—1,2
6	„ 7.30	693,9	286,8	93,2	82,9	81,1	—1,6	42	„ 3.—	697,2	294,4	89,8	79,4	77,7	—1,6
7	„ 8.—	694,4	286,5	89,4	83,2	81,4	—0,9	43	„ 3.30	697,1	294,6	83,1	79,3	77,7	—0,5
8	„ 8.30	694,4	286,7	93,2	83,1	81,3	—1,6	44	„ 4.—	696,9	295,0	89,6	79,0	77,6	—1,6
9	„ 9.—	694,9	286,7	89,1	83,2	81,4	—0,8	45	„ 4.30	696,8	295,3	90,0	78,8	77,3	—1,7
10	„ 9.30	695,1	286,4	91,8	83,4	81,6	—1,3	46	„ 5.—	696,6	294,6	94,9	79,2	77,5	—2,5
11	„ 10.—	695,3	286,6	88,8	83,3	81,5	—0,8	47	„ 5.30	696,3	293,9	95,3	79,5	77,8	—2,5
12	„ 10.30	695,5	286,1	92,5	83,7	81,9	—0,7	48	„ 6.30	696,2	291,8	101,4	80,6	78,9	—3,3
13	„ 11.—	695,8	286,0	92,7	83,8	82,0	—1,3	49	„ 7.30	696,1	291,8	107,8	80,6	78,8	—4,4
14	„ 11.30	696,1	285,6	89,4	84,1	82,3	—0,8	50	„ 8.—	696,3	291,8	106,4	80,6	78,9	—4,1
15	„ 12.—	696,2	285,5	93,7	84,2	82,4	—1,4	51	„ 8.30	696,1	290,6	115,9	81,2	79,5	—5,6
16	19. Vm 12.30	696,2	285,7	90,7	84,1	82,3	—1,0	52	„ 9.—	696,0	289,8	115,1	81,7	79,9	—5,4
17	„ 1.—	696,6	285,3	93,2	84,4	82,6	—1,3	53	„ 9.30	695,7	289,8	123,0	81,6	79,8	—6,7
18	„ 1.30	696,7	285,8	94,4	84,1	82,3	—1,6	54	„ 10.—	695,7	289,8	112,1	81,6	79,8	—4,9
19	„ 2.—	696,8	285,8	88,6	84,1	82,3	—0,6	55	„ 10.30	695,8	288,3	103,1	82,5	80,7	—3,3
20	„ 2.30	697,1	285,3	92,6	84,5	82,7	—1,2	56	„ 11.—	695,9	288,3	110,9	82,5	80,7	—4,6
21	„ 3.—	697,2	285,6	94,3	84,4	82,6	—1,5	57	„ 11.30	696,0	289,3	118,5	82,0	80,2	—5,9
22	„ 3.30	697,2	284,8	93,8	84,9	83,0	—1,4	58	„ 12.—	695,9	290,2	109,8	81,4	79,7	—4,6
23	„ 4.—	697,4	284,8	95,0	84,9	83,1	—1,5	59	20. Vm 12.30	696,2	290,8	97,4	81,2	79,4	—2,6
24	„ 4.30	697,4	284,8	90,5	84,9	83,1	—0,8	60	„ 1.—	695,9	291,3	97,6	80,8	79,1	—2,7
25	„ 5.—	697,5	284,8	94,4	84,9	83,1	—1,4	61	„ 3.30	695,2	293,8	88,6	79,3	77,6	—1,4
26	„ 6.30	698,1	286,9	93,6	83,8	82,0	—1,5	62	„ 4.—	695,3	293,8	88,7	79,3	77,6	—1,4
27	„ 7.30	698,4	289,8	90,0	82,2	80,5	+0,5	63	„ 4.30	695,1	293,2	94,7	79,6	77,9	—2,4
28	„ 8.—	698,5	290,8	88,4	81,7	79,9	—1,0	64	„ 5.—	695,7	292,8	93,5	79,9	78,2	—2,1
29	„ 8.30	698,5	290,0	84,7	82,2	80,4	—0,3	65	„ 5.30	695,6	292,3	94,5	80,2	78,5	—2,3
30	„ 9.—	698,3	290,7	90,5	81,7	79,9	—1,3	66	„ 6.30	695,9	293,8	90,0	79,4	77,7	—1,6
31	„ 9.30	698,4	290,8	83,5	81,7	79,9	—0,2	67	„ 7.—	695,9	293,8	95,6	79,4	77,7	—2,6
32	„ 10.—	698,1	291,4	87,9	81,3	79,5	—1,0	68	„ 7.30	696,0	297,1	94,2	77,7	76,0	—2,6
33	„ 10.30	698,2	291,6	85,8	81,2	79,4	—0,7	69	„ 8.—	695,9	294,5	91,4	79,1	77,4	—1,9
34	„ 11.—	698,1	291,8	89,0	81,1	79,3	—1,2	70	22. Vm 7.—	698,6	289,4	91,0	82,5	80,7	—1,3
35	„ 11.30	697,9	292,8	88,0	80,4	78,7	—1,1	71	„ 8.—	698,3	293,1	89,4	80,4	78,6	—1,4
36	„ 12.—	697,8	291,8	88,4	81,0	79,2	—1,1	72	„ 8.30	698,4	293,2	87,6	80,3	78,6	—1,1

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in K	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in I	Refraktion berechn in K	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
73	22. Vm	9.—	698,5	294,8	88,2	79,5	77,8	—1,3	125	23. Nm	3.30	694,3	299,1	86,8	76,3	74,7	—1,6
74	"	9.30	698,3	293,8	86,4	80,0	78,3	—1,0	126	"	4.—	694,4	298,6	92,1	76,6	74,9	—2,5
75	"	10.—	698,1	295,6	85,4	79,0	77,3	—1,0	127	"	4.30	694,0	298,5	93,8	76,5	74,9	—2,8
76	"	10.30	698,1	295,0	86,2	79,3	77,6	—1,0	128	"	5.—	693,4	297,8	99,4	76,8	75,1	—3,6
77	"	11.—	698,0	295,3	85,6	79,1	77,4	—1,0	129	"	5.30	693,5	297,1	97,1	77,2	75,5	—3,2
78	"	11.30	698,0	295,0	86,0	79,3	77,6	—1,0	130	"	6.—	693,1	296,4	99,0	77,4	75,8	—3,5
79	"	12.—	697,9	298,0	85,6	77,7	76,0	—1,2	131	"	8.—	692,4	293,3	112,7	78,9	77,2	—5,5
80	22. Nm	12.30	697,6	296,2	76,6	78,5	76,8	+0,4	132	"	8.30	692,5	293,3	105,5	78,9	77,2	—4,3
81	"	1.—	697,4	295,3	87,4	79,0	77,3	—1,3	133	"	9.—	692,5	296,1	102,7	77,5	75,8	—4,1
82	"	2.—	697,1	295,3	87,2	78,9	77,2	—1,3	134	"	9.30	692,5	296,8	96,1	77,1	75,4	—3,0
83	"	2.30	697,1	296,1	85,4	78,5	76,8	—1,0	135	"	10.—	692,3	297,8	94,3	76,5	74,9	—1,2
84	"	3.30	696,4	295,3	87,1	78,8	77,1	—1,3	136	"	10.30	692,3	299,6	95,3	75,6	74,0	—3,2
85	"	4.—	696,4	295,4	85,6	78,5	77,0	—1,0	137	"	11.—	692,2	299,0	91,9	75,9	74,3	—2,6
86	"	4.30	696,3	295,8	85,8	78,5	76,8	—1,1	138	"	11.30	692,1	298,6	98,6	76,1	74,4	—3,6
87	"	5.—	696,3	295,8	84,9	78,5	76,8	—1,0	139	"	12.—	691,9	298,9	89,5	75,9	74,2	—2,2
88	"	5.30	696,1	294,8	84,0	79,0	77,2	—0,7	140	24. Vm	12.30	691,9	297,9	99,6	76,4	74,7	—3,7
89	"	6.—	696,1	295,3	83,0	78,9	77,0	—0,6	141	"	1.—	691,9	297,9	84,4	76,4	74,7	—1,2
90	"	6.30	696,2	292,3	87,8	80,3	78,6	—1,1	142	"	1.30	692,0	297,3	90,5	76,7	75,1	—2,2
91	"	7.—	696,1	292,0	86,7	80,5	78,7	—0,9	143	"	2.—	691,9	297,0	96,5	76,8	75,2	—3,1
92	"	7.30	696,3	292,0	97,1	80,5	78,8	—2,6	144	"	2.30	692,1	296,2	100,4	77,3	75,6	—3,7
93	"	8.—	696,4	292,0	99,4	80,5	78,8	—3,0	145	"	4.30	693,2	293,5	114,8	79,0	77,3	—5,8
94	"	8.30	696,0	292,5	98,1	80,2	78,4	—2,9	146	24. Nm	3.30	697,5	287,8	93,4	83,2	81,4	—1,6
95	"	9.—	696,0	291,8	94,1	80,6	78,8	—2,1	147	25. Vm	7.30	698,6	286,8	92,4	84,0	82,2	—1,3
96	"	9.30	695,7	291,8	103,8	80,5	78,7	—4,7	148	"	8.—	698,7	287,0	91,9	83,9	82,1	—1,2
97	"	10.—	695,5	290,9	112,3	80,9	79,2	—5,1	149	"	8.30	698,9	287,4	90,0	83,7	81,9	—0,9
98	"	10.30	695,4	291,8	113,8	80,4	78,7	—5,4	150	"	9.—	698,9	287,9	90,6	83,4	81,6	—1,1
99	"	11.—	694,9	291,9	119,8	80,3	78,5	—6,4	151	"	9.30	699,0	289,2	91,8	82,7	80,9	—1,4
100	"	11.30	694,9	290,8	118,4	80,9	79,1	—6,1	152	"	10.—	699,0	289,1	89,7	82,8	81,0	—1,0
101	"	12.—	694,8	290,9	122,7	80,8	79,0	—6,8	153	"	10.30	699,0	290,4	84,8	82,0	80,3	—0,3
102	23. Vm	12.30	694,8	290,9	137,1	80,8	79,0	—9,2	154	"	11.—	699,0	290,7	81,5	81,9	80,1	+0,2
103	"	1.—	695,4	290,8	131,3	81,0	79,2	—8,2	155	"	12.—	698,7	291,3	82,8	81,5	79,7	—0 1
104	"	1.30	695,3	291,0	101,3	80,8	79,1	—3,3	156	25. Nm	1.30	698,5	292,3	84,9	80,9	79,1	—0,6
105	"	2.—	696,0	291,0	96,8	81,0	79,3	—2,5	157	"	2.—	698,4	291,8	84,1	81,1	79,4	—0,4
106	"	2.30	696,2	290,3	102,5	81,4	79,7	—3,4	158	"	2.30	698,0	293,3	84,1	80,2	78,5	—0,5
107	"	3.30	696,2	290,6	104,4	81,3	79,5	—3,7	159	"	3.30	697,8	293,2	85,4	80,2	78,5	—0,7
108	"	4.30	696,7	290,5	98,0	81,4	79,7	—2,6	160	"	4.—	697,8	293,8	90,8	79,9	78,2	—1,7
109	"	5.—	696,6	290,3	86,8	81,5	79,8	—0,8	161	"	4.30	697,4	293,3	86,9	80,1	78,4	—1,0
110	"	5.30	696,6	290,1	98,8	81,6	79,9	—2,7	162	"	6.30	697,3	289,8	92,9	82,0	80,2	—1,7
111	"	6.—	696,6	289,9	94,6	81,8	80,0	—2,0	163	"	7.—	697,2	289,4	97,2	82,2	80,4	—2,4
112	"	6.30	696,4	292,8	96,5	80,1	78,4	—2,6	164	"	7.30	697,5	289,3	95,3	82,3	80,5	—2,0
113	"	7.—	696,1	293,3	96,4	79,8	78,0	—2,6	165	"	8.—	697,4	289,3	97,8	82,3	80,5	—2,5
114	"	7.30	696,0	293,3	94,0	79,8	78,0	—0,6	166	"	8.30	697,4	289,2	105,5	82,3	80,6	—3,7
115	"	8.—	696,5	293,3	88,5	79,9	78,1	—1,3	167	"	9.—	697,2	289,0	98,8	82,4	80,6	—2,6
116	"	8.30	696,3	295,4	89,8	78,7	77,0	—1,7	168	"	9.30	697,2	289,0	98,9	82,4	80,6	—2,6
117	"	9.—	696,2	297,6	96,9	77,5	75,8	—3,1	169	"	10.—	697,1	288,9	104,9	82,4	80,6	—3,6
118	"	10.—	696,2	293,6	82,6	79,6	77,9	—0,4	170	"	10.30	697,0	288,9	107,2	82,4	80,6	—4,0
119	23. Nm	12.30	695,6	298,8	83,3	78,5	76,8	—1,0	171	"	11.—	697,0	288,8	114,2	82,5	80,7	—5,1
120	"	1.—	695,5	299,3	81,9	76,5	74,8	—0,8	172	"	11.30	696,9	288,8	115,5	82,5	80,7	—5,3
121	"	1.30	695,4	299,4	80,4	76,4	74,7	—0,6	173	"	12.—	696,9	288,8	112,0	82,5	80,7	—4,8
122	"	2.—	695,2	299,7	83,3	76,2	74,5	—1,1	174	26. Vm	12.30	696,9	288,8	112,2	82,5	80,7	—4,8
123	"	2.30	694,7	299,0	84,3	76,4	74,8	—1,2	175	"	1.—	697,0	288,8	117,3	82,5	80,7	—5,6
124	"	3.—	694,4	299,5	82,1	76,1	74,5	—0,9	176	"	1.30	697,0	287,8	122,6	83,1	81,3	—6,4

Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	berechn in I	berechn in K	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	berechn in I	berechn in K	Höh Diffr Δ
	1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
177	26. Vm 2.—	696,6	287,7	120,8	83,0	81,2	—6,1	205	26. Nm 7.—	693,8	295,3	92,2	78,2	76,5	—2,2
178	„ 2.30	696,6	287,7	108,5	83,0	81,3	—4,1	206	„ 7.30	693,7	294,8	95,1	78,4	76,7	—2,7
179	„ 3.—	696,4	287,7	110,5	82,9	81,2	—4,4	207	„ 8.—	693,8	293,8	100,2	79,0	77,3	—3,4
180	„ 4.—	696,1	287,6	107,2	83,0	81,2	—3,9	208	„ 8.30	693,8	292,8	105,7	79,5	77,8	—4,2
181	„ 5.—	696,1	287,7	110,7	82,9	81,1	—4,5	209	„ 9.—	693,9	291,8	108,3	80,1	78,3	—4,6
182	„ 6.30	696,1	288,3	105,7	82,6	80,8	—3,7	210	„ 9.30	694,0	291,6	103,2	80,2	78,5	—3,7
183	„ 7.—	696,1	289,4	101,7	82,0	80,2	—3,1	211	„ 10.—	693,8	291,4	93,7	80,3	78,5	—2,1
184	„ 7.30	696,1	290,8	100,5	81,1	79,4	—3,1	212	„ 10.30	693,8	293,8	104,2	79,0	77,3	—4,1
185	„ 8.—	696,2	292,3	95,2	80,3	78,6	—2,4	213	„ 11.—	693,8	295,9	101,7	77,8	76,2	—4,3
186	„ 8.30	696,1	292,9	94,4	80,0	78,2	—2,3	214	„ 11.30	693,6	295,8	104,8	77,8	76,2	—4,3
187	„ 9.—	696,2	293,7	92,4	79,6	77,8	—2,0	215	„ 12.—	693,6	295,8	104,9	77,8	76,2	—4,4
188	„ 9.30	696,0	294,4	91,5	79,1	77,4	—1,9	216	27. Vm 12.30	693,6	290,8	106,2	80,6	78,8	—4,1
189	„ 10.30	695,8	295,1	90,8	78,7	77,0	—1,9	217	„ 1.—	693,6	290,8	113,3	80,6	78,8	—5,3
190	„ 11.—	695,7	294,9	90,1	78,8	77,1	—1,8	218	„ 1.30	693,5	290,1	110,3	80,9	79,2	—4,7
191	„ 11.30	695,6	296,1	88,0	78,1	76,5	—1,5	219	„ 2.—	693,4	289,8	109,1	81,1	79,3	—4,5
192	„ 12.—	695,9	295,8	87,6	78,4	76,7	—1,4	220	„ 2.30	693,1	290,0	111,3	80,9	79,1	—4,9
193	26. Nm 12.30	695,8	296,6	88,5	77,9	76,2	—1,6	221	„ 3.—	692,8	289,8	109,5	80,9	79,2	—4,6
194	„ 1.—	695,7	296,7	84,2	77,9	76,2	—0,9	222	„ 3.30	692,5	289,8	121,1	80,9	79,1	—6,5
195	„ 1.30	695,7	296,6	89,7	77,9	76,2	—1,8	223	„ 5.—	692,3	289,8	114,6	80,8	79,1	—5,5
196	„ 2.—	695,4	296,8	87,5	77,7	76,1	—1,5	224	„ 7.30	691,4	295,5	98,2	77,5	75,8	—3,3
197	„ 3.—	695,0	297,7	90,2	77,2	75,5	—2,1	225	„ 8.30	691,4	295,1	104,0	77,7	76,1	—4,2
198	„ 3.30	694,7	297,7	84,0	77,1	75,4	—1,0	226	„ 9.—	691,2	296,3	100,5	77,1	75,4	—3,8
199	„ 4.—	694,5	297,1	92,2	77,4	75,7	—2,3	227	„ 9.30	691,4	295,8	100,3	77,4	75,7	—3,7
200	„ 4.30	694,4	297,5	93,2	77,1	75,5	—2,6	228	„ 10.—	691,3	296,4	96,7	77,0	75,4	—3,1
201	„ 5.—	694,2	297,0	90,8	77,4	75,7	—2,1	229	„ 10.30	691,3	296,9	84,2	76,8	75,1	—1,1
202	„ 5.30	694,1	296,7	89,0	77,5	75,8	—1,8	230	„ 11.—	691,2	296,5	87,2	77,0	75,3	—1,6
203	„ 6.—	693,9	295,5	93,8	78,1	76,4	—2,5	231	„ 11.30	691,2	296,2	82,5	77,1	75,4	—0,8
204	„ 6.30	693,7	294,8	91,8	78,4	76,7	—2,1	232	„ 12.—	691,3	296,0	86,3	77,2	75,6	—1,4

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der in Irschenberg nach Kampenwand beobachteten Refraktionen.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	94,6	93,6	95,6	90,0	88,4	84,7	90,5	83,5	87,9	85,8	89,0	88,0
2		90,0	91,0	94,2	91,4	87,6	88,2	86,4	85,4	86,2	85,6	86,0
3		96,5	96,4	94,0	89,4	89,8	96,9	91,8	82,6	84,8	81,5	88,0
4		105,7	101,7	92,4	88,5	90,0	90,6	91,5	89,7	90,8	90,1	82,5
5				100,5	91,9	94,4	92,4	100,3	96,7	84,2	87,2	
6				98,2	95,2	104,0	100,5					
Mittel	94,6	96,5	96,2	94,9	90,8	91,8	91,5	90,7	88,5	86,4	86,7	86,1
Gewicht	1	4	4	6	6	6	6	5	5	5	5	4
Komb. Mittel	95,6	96,0	96,0	94,0	92,1	91,5	91,4	90,4	88,5	87,0	86,4	86,3

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	88,4	85,7	83,6	88,1	88,1	86,9	89,8	83,1	89,6	90,0	94,9	95,3
2	85,6	76,6	88,0	87,6	87,2	87,1	82,1	87,1	85,6	85,8	84,9	84,0
3	82,8	83,3	87,4	80,4	83,3	85,4	90,2	86,8	92,1	93,8	99,4	97,1
4	87,6	88,5	81,9	84,9	84,1	84,3		93,4	90,8	86,9	90,8	89,0
5	86,3		84,2	89,7	87,5	84,1		85,4	92,2	93,2		
6								84,0				
Mittel	86,1	83,5	85,0	86,1	86,0	85,6	87,4	86,6	90,1	89,9	92,5	91,4
Gewicht	5	4	5	5	5	5	3	6	5	5	4	4
Komb. Mittel	85,4	84,5	84,9	85,8	85,9	86,2	86,8	87,7	89,2	90,6	91,6	91,8

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	83,0	101,4	91,8	93,2	89,4	93,2	89,1	91,8	88,8	92,5	92,7	89,4
2	99,0	87,8	86,7	107,8	106,4	115,9	115,1	123,0	112,1	103,1	110,9	118,5
3	93,8	92,9	97,2	97,1	99,4	98,1	94,1	109,8	112,3	113,8	119,8	118,4
4		91,8	92,2	95,3	112,7	105,5	102,7	96,1	94,3	95,3	91,9	98,6
5				95,1	97,8	105,5	98,8	98,9	104,9	107,2	114,2	115,5
6					100,2	105,7	108,3	103,2	93,7	104,2	104,7	104,8
Mittel	91,9	93,5	92,0	97,7	101,0	104,0	101,4	103,8	101,0	102,7	105,7	107,5
Gewicht	3	4	4	5	6	6	6	6	6	6	6	6
Komb. Mittel	92,2	92,7	93,8	97,1	100,9	102,6	102,7	102,5	102,1	103.0	105,4	106,5

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	93,7	90,7	93,2	94,4	88,6	92,6	94,3	93,8	95,0	90,5	84,4	94,5
2	109,8	97,4	97,6	101,3	96,8	102,5	110,5	88,6	88,7	94,7	94,4	98,8
3	122,7	137,1	131,3	90,5	96,5	104,0	109,5	104,4	107,2	98,0	93,5	
4	89,5	99,6	84,4	122,6	120,8	108,5		121,1		114,8	86,8	
5	112,0	112,2	117,3	110,3	109,1	111,3					110,7	
6	104,9	106,2	113,3								114,6	
Mittel	105,4	107,2	106,2	103,8	102,4	103,1	104,7	102,0	97,0	99,5	97,4	96,6
Gewicht	6	6	6	5	5	5	3	4	3	4	6	2
Komb. Mittel	106,4	106,5	105,9	104,1	102,9	103,3	103,6	101,4	98,9	98,4	97,7	96,3

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Irschenberg aus Irschenberg-Kampenwand.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	80,5	83,8	79,4	82,2	81,7	80,3	81,7	81,7	81,3	81,2	81,1	80,4
2		79,4	82,5	77,7	79,1	78,7	79,5	80,0	79,0	79,3	79,1	79,3
3		80,1	79,8	79,8	80,4	83,7	77,5	78,6	79,6	78,3	77,6	77,7
4		79,3	82,0	84,0	79,9	80,0	83,4	82,7	82,8	82,0	81,9	81,7
5			78,6	81,1	83,9	77,7	79,6	79,1	79,4	78,7	78,8	78,1
6				77,5	80,3		77,1	77,4	77,0	86,8	77,9	77,1
7					78,2							
Mittel	80,5	80,7	80,5	80,4	80,5	80,0	79,8	79,9	79,8	79,4	79,3	79,1
Gewicht	1	4	5	6	7	5	6	6	6	6	6	6
Komb. Mittel	80,6	80,6	80,5	80,5	80,4	80,1	79,9	79,9	79,7	79,5	79,3	79,2

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	80,6	80,4	80,2	80,2	79,9	80,5	79,4	79,3	79,0	78,8	79,2	79,5
2	81,0	80,0	80,4	79,0	78,9	79,4	78,7	78,8	78,5	78,5	78,5	79,0
3	77,7	78,5	79,0	76,4	76,2	78,5	80,2	80,2	79,9	80,1	80,5	81,0
4	77,1	78,5	76,5	80,9	81,1	76,4	77,2	77,1	77,4	77,1	77,4	77,5
5	81,5	77,9	77,9	77,9	77,7	80,2						
6	78,4					77,2						
7	77,2											
Mittel	79,1	79,1	78,8	78,9	78,8	78,7	78,9	78,9	78,7	78,6	78,9	79,3
Gewicht	7	5	5	5	5	6	4	4	4	4	4	4
Komb. Mittel	79,1	79,0	78,9	78,9	78,8	78,8	78,9	78,9	78,7	78,7	78,9	79,3

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	80,1	80,6	83,0	82,9	83,2	83,1	83,2	83,4	83,3	83,7	83,8	84,1
2	78,9	80,3	80,5	80,6	80,6	81,2	81,7	81,6	81,6	82,5	82,5	82,0
3	81,5	78,2	78,5	80,5	80,5	80,2	80,6	80,5	80,9	80,4	80,3	80,9
4	78,1	82,0	82,2	78,7	78,9	78,9	77,5	82,4	82,4	82,4	82,5	82,5
5		78,4	78,2	82,3	82,3	82,3	82,4	80,2	80,3	79,0	77,8	77,8
6				78,4	79,9	79,5						
Mittel	79,7	79,9	80,5	80,6	80,8	80,9	81,1	81,6	81,7	81,6	81,4	81,5
Gewicht	4	5	5	6	6	6	5	5	5	5	5	5
Komb. Mittel	79,7	80,0	80,4	80,6	80,8	80,9	81,2	81,5	81,7	81,6	81,5	81,4

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	84,2	84,1	84,4	84,1	84,1	79,4	81,5	79,3	79,3	79,6	82,3	80,2
2	81,4	81,2	80,8	80,3	79,9	81,4	77,9	81,3	78,8	81,4	79,9	81,6
3	80,8	80,8	81,0	80,8	81,0	83,0	82,9	78,2	83,0	79,0	81,5	80,4
4	82,5	82,5	82,5	83,1	83,0	80,9	80,9	83,0	80,9	83,0	79,4	
5	77,8	80,6	80,6	80,9	81,1			80,9		80,8	80,8	
Mittel	81,3	81,8	81,9	81,8	81,8	81,2	80,8	80,5	80,5	80,8	80,8	80,7
Gewicht	5	5	5	5	5	4	4	5	4	5	5	3
Komb. Mittel	81,5	81,7	81,9	81,8	81,7	81,3	80,8	80,6	80,6	80,7	80,8	80,7

D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Kampenwand aus Irschenberg-Kampenwand.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	78,8	82,0	77,7	80,5	79,9	78,6	79,9	79,9	79,5	79,4	79,3	78,7
2		77,7	80,7	76,0	77,4	77,0	77,8	78,3	77,3	77,6	77,4	77,6
3		78,4	78,0	78,0	78,6	81,9	75,8	76,9	77,9	76,6	76,1	76,0
4		77,6	80,2	82,2	78,1	78,2	81,6	80,9	81,0	80,3	80,1	79,9
5			77,0	79,4	82,1	76,1	77,8	77,4	77,7	77,0	77,1	76,5
6				75,8	78,6		75,4	75,7	75,4	75,1	75,3	75,4
7					76,5							
Mittel	78,8	78,9	78,7	78,7	78,7	78,4	78,1	78,2	78,1	77,7	77,6	77,4
Gewicht	1	4	5	6	7	5	6	6	6	6	6	6
Komb. Mittel	78,9	78,8	78,8	78,7	78,6	78,4	78,2	78,2	78,0	77,8	77,6	77,5

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	78,9	78,7	78,4	78,5	78,2	78,7	77,7	77,7	77,6	77,3	77,5	77,8
2	79,2	78,3	78,6	77,3	77,2	77,7	77,0	77,1	77,0	76,8	76,8	77,2
3	76,0	76,8	77,3	74,7	74,5	76,8	78,5	78,5	78,2	78,4	78,8	79,3
4	75,4	76,8	74,8	79,1	79,4	74,8	75,5	75,4	75,7	75,5	75,7	75,8
5	79,7	76,2	76,2	76,2	76,1	78,5						
6	76,7					75,5						
7	75,6											
Mittel	77,4	77,4	77,1	77,2	77,1	77,0	77,2	77,2	77,1	77,0	77,2	77,5
Gewicht	7	5	5	5	5	6	4	4	4	4	4	4
Komb. Mittel	77,4	77,3	77,2	77,2	77,1	77,1	77,2	77,2	77,1	77,1	77,2	77,5

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	78,3	78,9	81,2	81,1	81,4	81,3	81,4	81,6	81,5	81,9	82,0	82,3
2	77,0	78,6	78,7	78,8	78,9	79,5	79,9	79,8	79,8	80,7	80,7	80,2
3	79,8	76,5	76,8	78,8	78,8	78,4	78,8	78,7	79,2	78,7	78,5	79,1
4	76,4	80,2	80,4	77,0	77,2	77,2	75,8	80,6	80,6	80,6	80,7	80,7
5		76,7	76,5	80,5	80,5	80,6	80,6	78,5	78,5	77,3	76,2	76,2
6				76,7	77,3	77,8						
Mittel	77,9	78,2	78,7	78,8	79,0	79,1	79,3	79,8	79,9	79,8	79,6	79,7
Gewicht	4	5	5	6	6	6	5	5	5	5	5	5
Komb. Mittel	77,9	78,3	78,6	78,8	79,0	79,1	79,4	79,7	79,9	79,8	79,7	79,7

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	82,4	82,3	82,6	82,3	82,3	77,7	79,7	77,6	77,6	77,9	80,5	78,5
2	79,7	79,4	79,1	78,6	78,1	79,7	76,2	79,5	77,1	79,7	78,2	79,9
3	79,0	79,0	79,2	79,1	79,3	81,3	81,2	76,5	81,2	77,3	79,8	78,7
4	80,7	80,7	80,7	81,3	81,2	79,1	79,2	81,2	79,2	81,2	77,7	
5	76,2	78,8	78,8	79,2	79,3			79,1		79,1	79,1	
Mittel	79,6	80,0	80,1	80,1	80,0	79,5	79,1	78,8	78,8	79,0	79,1	79,0
Gewicht	5	5	5	5	5	4	4	5	4	5	5	3
Komb. Mittel	79,7	79,9	80,1	80,1	79,9	79,5	79,1	78,9	78,9	79,0	79,1	79,0

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen für Irschenberg-Kampenwand.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	— 2,0	— 1,5	— 2,6	+ 0,5	— 1,0	— 0,3	— 1,3	— 0,2	— 1,0	— 0,7	— 1,2	— 1,1
2		— 1,6	— 1,3	— 2,6	— 1,9	— 1,1	— 1,3	— 1,0	— 1,0	— 1,0	— 1,0	— 1,0
3		— 2,6	— 2,6	— 0,6	— 1,4	— 1,7	— 3,1	— 1,4	— 0,4	— 0,3	+ 0,2	— 1,5
4		— 3,7	— 3,1	— 1,3	— 1,3	— 0,9	— 1,1	— 1,9	— 1,0	— 1,9	— 1,8	— 0,8
5				— 3,1	— 1,2	— 2,3	— 2,0	— 3,7	— 3,1	— 1,1	— 1,6	
6				— 3,3	— 2,4	— 4,2	— 3,8					
Mittel	— 2,0	— 2,4	— 2,4	— 1,7	— 1,5	— 1,8	— 2,1	— 1,6	— 1,3	— 1,0	— 1,1	— 1,1
Gewicht	1	4	4	6	6	6	6	5	5	5	5	4
Komb. Mittel	— 2,2	— 2,3	— 2,2	— 1,6	— 1,6	— 1,8	— 1,9	— 1,7	— 1,3	— 1,1	— 1,1	— 1,1

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	— 1,1	— 0,8	— 0,5	— 1,2	— 1,2	— 1,0	— 1,6	— 0,5	— 1,6	— 1,7	— 2,5	— 2,5
2	— 1,2	+ 0,4	— 1,1	— 1,1	— 1,3	— 1,2	— 0,9	— 1,3	— 1,0	— 1,1	— 1,0	— 0,7
3	— 0,1	— 1,0	— 1,3	— 0,6	— 1,1	— 1,0	— 2,1	— 1,6	— 2,5	— 2,8	— 3,6	— 3,2
4	— 1,4	— 1,6	— 0,8	— 0,6	— 0,4	— 1,2		— 1,6	— 1,7	— 1,0	— 2,1	— 1,8
5	— 1,4		— 0,9	— 1,8	— 1,5	— 0,5		— 0,7	— 2,3	— 2,6		
6								— 1,0				
Mittel	— 1,1	— 0,8	— 0,9	— 1,1	— 1,1	— 1,0	— 1,5	— 1,1	— 1,8	— 1,8	— 2,3	— 2,1
Gewicht	5	8	5	5	5	5	3	6	5	5	4	4
Komb. Mittel	— 1,0	— 0,9	— 0,9	— 1,1	— 1,1	— 1,2	— 1,3	— 1,4	— 1,6	— 1,9	— 2,1	— 2,2

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	— 0,6	— 3,3	— 1,4	— 1,6	— 0,9	— 1,6	— 0,8	— 1,3	— 0,8	— 0,7	— 1,3	— 0,8
2	— 3,5	— 1,1	— 0,9	— 4,4	— 4,1	— 5,6	— 2,1	— 6,7	— 4,9	— 3,3	— 4,6	— 5,9
3	— 2,5	— 1,7	— 2,4	— 2,6	— 3,0	— 2,9	— 4,1	— 4,7	— 5,1	— 5,4	— 6,4	— 6,1
4		— 2,1	— 2,2	— 2,0	— 5,5	— 4,3	— 2,6	— 3,0	— 1,2	— 3,2	— 2,6	— 3,6
5			—	— 2,7	— 2,5	— 3,7	— 4,6	— 2,6	— 3,6	— 4,0	— 5,1	— 5,3
6					3,4	— 4,2	— 5,4	— 3,7	— 2,1	— 4,1	— 4,3	— 4,3
Mittel	— 2,2	— 2,1	— 1,7	— 2,7	— 3,2	— 3,7	— 3,3	— 3,7	— 2,9	— 3,4	— 4,1	— 4,3
Gewicht	3	4	4	5	6	6	6	6	6	6	6	6
Komb. Mittel	— 2,2	— 2,0	— 2,1	— 2,6	— 3,2	— 3,5	— 3,5	— 3,4	— 3,2	— 3,5	— 4,0	— 4,2

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	— 1,4	— 1,0	— 1,3	— 1,6	— 0,6	— 1,2	— 1,5	— 1,4	— 1,5	— 0,8	— 0,2	— 2,3
2	— 4,6	— 2,6	— 2,7	— 3,3	— 2,5	— 3,4	— 4,4	— 1,4	— 1,4	— 2,4	— 1,4	— 2,7
3	— 6,8	— 9,2	— 8,2	— 2,2	— 3,1	— 3,7	— 4,6	— 3,7	— 3,9	— 2,6	— 2,1	
4	— 2,2	— 3,7	— 1,2	— 6,4	— 6,1	— 4,1		— 6,5		— 5,8	— 0,8	
5	— 4,8	— 4,8	— 5,6	— 4,7	— 4,5	— 4,9					— 4,5	
6	— 4,4	— 4,1	— 5,3								— 5,5	
Mittel	— 4,0	— 4,2	— 4,1	— 3,6	— 3,4	— 3,5	— 3,5	— 3,3	— 2,3	— 2,9	— 2,4	— 2,5
Gewicht	6	6	6	5	5	5	3	4	3	4	6	2
Komb. Mittel	— 4,1	— 4,1	— 4,0	— 3,7	— 3,5	— 3,5	— 3,5	— 3,1	— 2,7	— 2,6	— 2,6	— 2,4

F. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der mittleren absoluten Temperaturen für Irschenberg-Kampenwand.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	283,8	284,0	284,5	282,7	285,4	285,6	284,2	283,8	284,2	285,4	286,2	286,1
2	282,4	282,7	283,6	285,2	282,3	282,8	285,0	285,1	286,0	281,8	287,4	287,5
3	289,9	290,4	290,6	293,1	285,6	285,2	281,5	286,4	287,0	287,2	282,3	288,0
4	287,4	289,3	285,7	287,3	291,4	290,0	285,9	290,2	289,5	291,3	287,5	289,6
5	290,7	288,1	290,8	290,5	288,7	290,0	291,0	290,1	291,3	293,5	290,1	291,3
6	285,2	286,1	283,3	287,8	290,7	291,9	293,7	291,7	291,6	288,6	291,4	294,5
7	288,7	290,1	286,8	283,3	288,1	288,7	289,2	289,0	288,2	285,5	294,4	286,4
8			290,9	287,6	283,2	283,4	289,4	284,3	284,4	291,0	288,5	291,9
9				292,1	288,5	288,8	293,3	289,8	289,9	294,4	285,7	293,3
10					291,7	292,4		293,5	294,2		291,1	
11											293,9	
Mittel	286,9	287,3	287,7	287,7	287,6	287,9	288,1	288,4	288,6	288,9	289,0	289,8
Gewicht	7	7	8	9	10	10	9	10	10	9	11	9
Komb. Mittel	287,1	287,3	287,6	287,7	287,7	287,9	288,1	288,4	288,6	288,9	289,2	289,5

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	285,7	287,0	285,9	286,6	287,5	287,5	287,0	286,6	286,1	286,1	285,4	284,3
2	287,2	288,0	286,7	297,6	286,9	286,4	284,5	285,4	285,2	291,5	291,2	290,3
3	283,7	295,6	284,4	284,5	284,9	285,0	290,6	290,8	292,5	291,6	291,3	290,9
4	288,0	287,3	289,0	289,2	289,9	290,6	292,5	291,7	291,2	292,9	292,4	291,2
5	288,8	287,5	291,5	291,9	291,6	292,2	296,1	295,9	292,7	295,7	295,0	294,7
6	293,1	292,7	295,6	296,2	296,3	296,3	284,6	285,0	295,4	284,6	284,5	287,6
7	296,1		286,7	285,1	284,9	284,9	289,0	288,8	284,8	289,1	288,2	295,5
8	286,8		288,3	288,5	287,8	288,9	294,4	294,4	289,6	295,5	295,6	
9	291,8		293,0	293,0	293,6	294,2			295,2			
10	292,7											
11	288,1											
Mittel	289,3	289,7	289,0	289,2	289,3	289,6	289,8	289,8	290,3	290,9	290,5	290,6
Gewicht	11	6	9	9	9	9	8	8	9	8	8	7
Komb. Mittel	289,5	289,4	289,2	289,2	289,4	289,6	289,8	289,9	290,3	290,7	290,6	290,5

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	283,6	283,1	292,9	292,6	288,2	287,9	287,5	287,3	287,3	282,8	282,6	282,6
2	289,6	289,0	285,8	285,5	288,9	289,2	288,6	288,4	287,7	288,6	288,9	287,8
3	289,7	289,1	292,0	291,6	292,4	292,5	294,1	294,3	294,8	295,7	295,4	288,5
4	291,1	293,4			285,3	285,2	285,1	285,1	285,1	285,1	285,0	285,0
5	294,2	286,4			291,1	290,6	289,8	289,5	289,4	291,4	291,7	291,7
6	287,8	292,1										
7	294,4											
Mittel	290,1	288,9	290,2	289,0	289,2	289,1	289,0	288,9	288,9	288,7	288,7	287,1
Gewicht	7	6	3	3	5	5	5	5	5	5	5	5
Komb. Mittel	289,9	289,5	289,6	289,4	289,1	289,1	289,0	288,9	288,9	288,8	288,3	287,8

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	283,0	282,4	283,3	283,5	283,0	283,5	283,7	283,6	283,1	289,2	283,2	283,4
2	288,3	288,8	289,0	289,7	290,1	290,2	290,1	290,1	290,3	287,8	289,1	289,2
3	288,9	289,1	289,5	289,6	289,2	288,0	287,8	288,1	288,1	285,0	287,7	289,9
4	285,1	285,1	285,2	285,1	284,9	284,8	284,8	284,8	284,9	288,5	291,6	285,1
5	291,6	289,0	288,8	288,5	288,3	288,4	288,3	288,3	288,3		285,0	288,3
6											288,5	
Mittel	287,4	286,9	287,2	287,3	287,1	287,0	286,9	287,0	286,9	287,6	287,5	287,2
Gewicht	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	6	5
Komb. Mittel	287,2	287,1	287,2	287,2	287,1	287,0	287,0	287,0	287,1	287,4	287,5	287,2

Tafel Nr 6.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Kampenwand und Irschenberg.

A. Beobachtet auf Kampenwand.

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
1	16. Vm	10.30	629,6	280,6	68,0	75,2	76,9	+1,0	41	19. Vm	10.30	633,0	282,6	66,2	74,9	76,6	+1,3
2	16. Nm	9.—	628,1	279,6	79,0	75,4	77,1	—0,8	42	„	11.—	632,9	283,2	67,5	74,7	76,4	+1,0
3	„	9.30	628,0	279,7	85,7	75,3	77,0	—1,9	43	„	11.30	633,4	283,2	71,0	74,6	76,3	+0,4
4	17. Vm	4.—	626,0	280,2	81,1	74,6	76,3	—1,3	44	„	12.—	633,4	284,1	70,6	74,2	76,0	+0,4
5	„	4.30	626,0	280,3	77,7	74,5	76,2	—0,7	45	19. Nm	1.—	633,2	285,1	71,2	73,7	75,4	+0,2
6	„	5.—	625,9	280,6	67,0	74,3	76,0	+1,0	46	„	1.30	633,1	285,2	71,2	73,6	75,3	+0,2
7	18. Nm	12.30	625,9	278,6	67,8	75,4	77,1	+1,1	47	„	2.—	633,0	286,3	70,8	73,0	74,7	+0,2
8	„	1.—	625,9	278,7	66,3	75,3	77,1	+1,3	48	„	4.—	633,1	289,9	74,2	72,9	74,6	—0,4
9	„	1.30	626,0	278,7	65,5	75,4	77,1	+1,4	49	„	4.30	633,1	287,9	72,6	72,2	73,9	—0,2
10	„	3.—	626,1	279,9	67,8	74,7	76,5	+1,0	50	„	8.—	633,3	284,6	76,5	74,0	75,7	—0,6
11	„	3.30	626,0	279,4	69,3	75,0	76,7	+0,8	51	„	8.30	633,3	285,2	78,4	73,7	75,3	—1,0
12	„	4.30	625,8	278,2	72,6	75,6	77,3	+0,3	52	„	9.—	633,2	285,1	77,2	73,7	75,4	—0,8
13	„	5.—	626,2	278,3	73,1	75,6	77,3	+0,2	53	„	9.30	633,3	284,8	72,1	73,9	75,6	+0,1
14	„	8.30	628,8	278,6	72,4	76,1	77,8	+0,4	54	„	10.—	633,3	284,8	74,1	73,9	75,6	—0,2
15	„	9.—	629,0	278,4	69,2	76,2	78,0	+1,0	55	„	10.30	633,4	285,3	75,6	73,6	75,3	—0,5
16	„	9.30	629,3	278,6	72,3	76,2	78,0	+0,5	56	„	11.—	633,1	285,8	71,2	73,3	75,0	+0,2
17	„	10.—	629,6	278,6	70,5	76,3	78,0	+0,8	57	„	11.30	633,3	286,3	71,6	73,1	74,8	+0,1
18	„	10.30	629,8	278,5	72,0	76,4	78,1	+1,5	58	„	12.—	633,2	286,4	72,7	73,0	74,7	—0,1
19	„	11.—	629,8	278,6	70,9	76,3	78,1	+0,7	59	20. Vm	12.30	633,5	286,8	77,1	72,9	74,6	—0,9
20	„	11.30	630,0	278,8	72,0	76,3	78,0	+0,5	60	„	1.—	633,7	286,6	79,3	73,0	74,7	—1,2
21	„	12.—	629,8	278,4	74,1	76,4	78,2	+0,2	61	„	2.30	633,4	286,9	71,5	72,8	74,5	+0,0
22	19. Vm	12.30	630,0	278,3	71,8	76,5	78,3	+0,6	62	„	3.30	633,4	286,3	78,5	73,1	74,8	—1,1
23	„	1.—	630,3	278,3	72,4	76,6	78,4	+0,5	63	„	4.—	633,0	286,8	77,3	72,8	74,4	—0,9
24	„	1.30	630,6	278,2	73,4	76,7	78,5	+0,4	64	„	4.30	632,7	285,2	77,3	73,5	75,2	—0,8
25	„	2.—	631,2	278,3	71,6	76,8	78,6	+0,7	65	„	5.—	633,2	285,4	67,6	73,5	75,2	+0,8
26	„	2.30	631,5	278,3	69,7	76,9	78,7	+1,0	66	„	5.30	633,0	286,1	64,4	73,1	74,8	+1,3
27	„	3.—	631,6	278,1	67,7	77,0	78,8	+1,3	67	„	7.—	632,9	287,3	67,3	72,5	74,2	+0,7
28	„	3.30	631,6	278,2	68,8	77,0	78,8	+1,2	68	„	7.30	632,9	289,1	66,7	71,6	73,2	+0,7
29	„	4.—	631,8	278,2	71,7	77,0	78,8	+0,7	69	20. Nm	4.—	634,5	287,4	67,6	72,8	74,5	+0,7
30	„	4.30	632,6	278,2	67,7	77,2	79,0	+1,4	70	22. Vm	7.30	634,0	282,9	69,9	75,0	76,7	+0,7
31	„	5.—	632,6	278,2	69,1	77,2	79,0	+1,2	71	„	8.30	633,9	286,8	71,9	73,0	74,7	+0,0
32	„	5.30	632,6	278,2	68,2	77,2	79,0	+1,3	72	„	9.30	633,9	286,3	70,8	73,2	74,9	+0,2
33	„	6.—	632,8	278,6	71,7	77,0	78,8	+0,7	73	„	10.—	633,8	286,9	72,3	72,9	74,6	—0,1
34	„	6.30	632,9	278,7	67,3	77,0	78,8	+1,4	74	„	10.30	633,7	287,5	72,8	72,6	74,2	—0,2
35	„	7.—	633,1	279,4	69,1	76,7	78,4	+1,1	75	„	11.—	633,6	287,5	71,2	72,6	74,2	—0,1
36	„	7.30	633,0	280,6	70,4	76,0	77,7	+0,7	76	„	11.30	633,4	287,5	70,7	72,5	74,2	+0,1
37	„	8.—	633,2	280,3	70,7	76,2	78,0	+0,7	77	„	12.—	633,9	288,2	70,5	72,3	73,9	+0,1
38	„	8.30	633,2	280,3	68,8	76,2	78,0	+1,0	78	22. Nm	1.—	633,8	287,6	69,8	72,5	74,2	+0,3
39	„	9.—	633,1	281,1	67,2	75,7	77,5	+1,2	79	„	1.30	633,6	287,8	71,1	72,4	74,1	+0,0
40	„	10.—	633,0	282,6	66,8	74,9	76,6	+0,2	80	„	2.—	633,5	287,8	68,0	72,4	74,1	+0,6

Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung	Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ
	1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August	mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
81	22. Nm. 2.30	633,4	288,2	67,0	72,2	73,8	+0,7	133	23. Nm 9.—	631,4	292,1	66,0	69,8	71,4	+0,5
82	„ 3.—	633,3	289,1	71,0	71,7	73,3	—0,1	134	„ 9.30	631,1	291,7	67,0	69,9	71,5	+0,3
83	„ 3.30	633,3	288,8	69,1	71,8	73,5	+0,1	135	„ 10.—	631,3	291,7	66,3	70,0	71,6	+0,4
84	„ 4.—	633,2	289,9	70,3	71,3	72,9	±0,0	136	„ 10.30	631,1	291,8	66,3	69,9	71,5	+0,4
85	„ 4.30	633,2	289,9	67,3	71,3	72,9	+0,5	137	„ 11.—	631,0	291,8	66,4	69,8	71,5	+0,4
86	„ 5.—	633,1	288,9	68,6	71,7	73,4	+0,3	138	„ 11.30	630,0	291,4	67,8	69,8	71,4	+0,2
87	„ 5.30	633,2	287,6	71,7	72,4	74,1	—0,1	139	„ 12.—	630,0	291,9	71,6	69,6	71,2	—0,5
88	„ 6.30	633,2	285,9	69,1	73,3	75,0	+0,5	140	24. Vm 12.30	629,5	291,7	73,0	69,6	71,2	—0,8
89	„ 7.30	633,4	285,9	69,6	73,3	75,0	+0,4	141	„ 1.—	629,6	291,7	69,6	69,6	71,2	—0,2
90	„ 8.—	633,6	285,8	71,2	73,4	75,1	+0,2	142	„ 1.30	630,6	291,9	69,7	69,5	71,1	—0,2
91	„ 9.—	633,6	285,4	74,7	73,6	75,3	—0,4	143	„ 2.—	630,4	291,9	74,0	69,7	71,3	—0,9
92	„ 9.30	633,2	284,9	77,4	73,8	75,5	—0,8	144	„ 2.30	630,6	291,4	72,3	69,9	71,6	—0,6
93	„ 10.—	632,8	284,4	86,3	74,0	75,7	—2,2	145	„ 3.—	630,6	291,1	73,6	70,1	71,7	—0,8
94	„ 10.30	632,7	285,3	87,8	73,5	75,2	—2,6	146	„ 3.30	630,8	290,6	70,7	70,4	72,0	—0,2
95	„ 11.—	632,5	285,8	88,9	73,2	74,8	—2,8	147	„ 6.—	631,8	289,1	74,8	71,3	73,0	—0,7
96	„ 11.30	632,5	286,2	97,1	73,0	74,6	—4,2	148	24. Nm 3.30	633,3	282,1	64,9	75,3	77,0	+1,5
97	„ 12.—	632,4	286,8	101,3	72,6	74,3	—4,9	149	25. Vm 7.30	634,2	279,8	67,8	76,7	78,5	+1,3
98	23. Vm 12.30	632,5	287,2	92,4	72,5	74,1	—3,5	150	„ 8.—	634,2	279,4	68,7	77,0	78,7	+1,2
99	„ 1.—	633,0	288,1	80,8	72,1	73,8	—1,6	151	„ 8.30	634,4	279,4	66,5	77,0	78,8	+1,6
100	„ 1.30	633,2	288,2	74,5	72,1	73,8	—0,6	152	„ 9.—	634,4	279,3	71,9	77,1	78,8	+0,7
101	„ 2.—	633,5	287,4	74,1	72,6	74,2	—0,4	153	„ 9.30	634,4	279,4	68,1	77,0	78,8	+1,3
102	„ 3.—	633,6	285,3	76,3	73,7	75,4	—0,6	154	„ 10.—	634,5	279,4	66,2	77,0	78,8	+1,6
103	„ 4.—	633,6	285,4	69,8	73,6	75,3	+0,4	155	„ 10.30	634,3	279,9	67,4	76,7	78,5	+1,3
104	„ 4.30	633,5	285,1	70,1	73,7	75,4	+0,4	156	„ 11.—	634,4	280,7	65,6	76,3	78,1	+1,6
105	„ 5.—	633,4	285,1	67,2	73,7	75,4	+0,9	157	„ 11.30	634,4	281,7	66,1	75,8	77,5	+1,4
106	„ 5.30	633,4	285,2	68,2	73,7	75,4	+0,7	158	„ 12.—	634,3	282,3	66,3	75,4	77,1	+1,3
107	„ 6.—	633,4	284,8	69,6	73,9	75,6	+0,5	159	25. Nm 1.30	634,3	284,6	66,4	74,2	75,9	+1,1
108	„ 6.30	633,5	285,7	66,0	73,4	75,1	+1,1	160	„ 2.—	634,2	283,8	69,6	74,6	76,3	+0,7
109	„ 7.—	633,1	288,2	68,1	72,1	73,7	+0,5	161	„ 2.30	634,1	284,4	72,7	74,3	76,0	+0,1
110	„ 7.30	633,1	287,7	68,6	72,3	74,0	+0,4	162	„ 3.—	634,0	284,6	68,3	74,1	75,8	—0,2
111	„ 8.—	633,4	288,1	66,5	72,2	73,9	+0,8	163	„ 3.30	633,7	284,3	65,6	74,2	75,9	+0,2
112	„ 8.30	633,3	288,4	68,6	72,0	73,7	+0,4	164	„ 4.—	633,5	285,3	64,3	73,6	75,3	+1,4
113	„ 10.—	633,0	286,7	68,7	71,3	73,0	+0,3	165	„ 7.—	633,5	282,1	71,7	75,3	77,1	+0,4
114	„ 10 30	633,3	290,9	70,2	70,8	72,4	—0,1	166	„ 7.30	633,6	281,7	73,0	75,6	77,3	+0,2
115	„ 11.—	633,3	291,7	68,7	70,4	72,0	+0,1	167	„ 8.—	633,5	281,2	73,9	75,8	77,6	+0,1
116	„ 11.30	633,7	291,8	70,5	70,4	72,1	—0,2	168	„ 8.30	633,6	281,1	74,3	75,9	77,6	±0,0
117	„ 12.—	633,5	293,8	70,4	69,4	71,0	—0,3	169	„ 9.—	633,3	281,1	72,3	75,8	77,6	+0,4
118	23. Nm 1.—	633,0	691,8	65,4	70,3	71,9	+0,6	170	„ 9.30	633,4	281,1	78,5	75,8	77,6	—0,6
119	„ 1.30	632,9	292,9	66,1	69,7	71,4	+0,4	171	„ 10.—	633,3	281,2	74,1	75,8	77,5	+0,1
120	„ 2.—	632,9	292,8	65,0	69,7	71,4	+0,6	172	„ 10.30	633,3	281,2	71,6	75,8	77,5	+0,5
121	„ 2.30	632,7	293,6	67,0	69,4	71,0	+0,2	173	„ 11.—	633,3	281,2	77,1	75,8	77,5	—0,4
122	„ 3.—	632,4	292,6	68,9	69,7	71,4	±0,0	174	„ 11.30	633,5	281,2	77,0	75,8	77,5	—0,4
123	„ 3.30	632,3	292,7	75,0	69,7	71,3	—1,1	175	„ 12.—	633,3	281,4	78,5	75,7	77,4	—0,7
124	„ 4.—	632,6	292,2	74,9	70,0	71,6	—1,0	176	26. Vm 12.30	633,3	281,4	79,5	75,7	77,4	—0,8
125	„ 5.—	632,2	292,2	72,8	69,9	71,5	—0,7	177	„ 1.—	633,2	281,5	83,2	75,6	77,3	—1,5
126	„ 5.30	632,0	292,2	74,7	69,9	71,5	—1,0	178	„ 1.30	633,2	282,3	77,0	75,1	76,9	—0,5
127	„ 6.—	631,7	291,9	73,5	70,0	71,5	—0,8	179	„ 2.—	633,2	282,1	75,9	75,3	77,0	—0,3
128	„ 6.30	631,4	291,9	75,4	69,9	71,5	—1,1	180	„ 2.30	633,0	281,9	74,3	75,3	77,0	±0,0
129	„ 7.—	631,4	291,7	70,2	70,0	71,6	—0,2	181	„ 3.—	632,9	281,9	73,5	75,3	77,0	+0,1
130	„ 7.30	631,4	291,4	70,9	70,1	71,7	—0,3	182	„ 3.30	632,9	282,0	70,3	75,2	77,0	+0,6
131	„ 8.—	631,4	291,4	68,9	70,1	71,7	±0,0	183	„ 4.—	632,7	282,1	71,1	75,1	76,9	+0,5
132	„ 8.30	631,2	291,6	68,1	70,0	71,6	+0,1	184	„ 4.30	632,6	282,4	68,3	74,9	76,7	+0,9

Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ	Nr	Zeit der Beobachtung		Luft-druck	Absol Temp	Refraktion beob	Refraktion berechn in K	Refraktion berechn in I	Höh Diffr Δ
	1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m		1881, August		mm	°C	Sec	Sec	Sec	m
185	26. Vm	5.—	632,4	282,4	70,2	74,9	76,6	+0,6	214	26. Nm	9.—	632,1	287,7	67,6	72,1	73,8	+0,6
186	„	5.30	632,6	282,6	70,5	74,8	76,6	+0,5	215	„	9.30	632,1	287,4	66,5	72,2	73,9	+0,8
187	„	6.—	632,7	282,7	68,3	74,8	76,5	+0,9	216	„	10.—	632,0	287,3	70,0	72,3	73,9	+0,2
188	„	6.30	632,8	283,8	70,1	74,3	76,0	+0,5	217	„	10.30	631,8	288,9	69,6	71,4	73,1	+0,1
189	„	7.—	632,8	284,1	70,6	74,1	75,8	+0,4	218	„	11.—	631,7	287,4	72,6	72,2	73,8	−0,3
190	„	8.30	632,9	284,7	67,4	73,8	75,5	+0,9	219	„	11.30	631,7	287,6	71,9	72,1	73,7	−0,2
191	„	9.—	633,0	285,1	67,0	73,6	75,3	+0,9	220	„	12.—	631,7	287,3	77,1	72,2	73,9	−1,0
192	„	9.30	632,9	285,2	70,3	73,6	75,3	+0,4	221	27. Vm	12.30	631,6	287,1	81,6	72,3	74,0	−1,7
193	„	10.30	632,8	286,9	67,1	72,7	74,3	+0,7	222	„	1.—	631,7	286,7	74,6	72,5	74,2	−0,5
194	„	11.—	632,8	287,3	69,8	72,5	74,1	+0,3	223	„	1.30	631,5	286,8	74,2	72,4	74,1	−0,5
195	„	11.30	633,0	287,6	70,4	72,4	74,0	+0,1	224	„	2.—	631,6	286,8	70,2	72,4	74,1	+0,2
196	„	12.—	633,0	287,8	72,2	72,3	73,9	−0,2	225	„	2.30	631,3	286,8	70,2	72,4	74,0	+0,2
197	26. Nm	12.30	632,9	288,8	70,7	71,7	73,4	±0,0	226	„	3.—	631,1	286,8	75,4	72,3	74,0	−0,7
198	„	1.—	632,9	289,2	72,9	71,5	73,2	−0,4	227	„	3.30	631,1	286,8	71,2	72,3	74,0	±0,0
199	„	1.30	632,9	289,3	70,9	71,5	73,1	−0,1	228	„	4.—	630,8	286,8	71,4	72,3	73,9	±0,0
200	„	2.—	632,8	290,4	69,1	70,9	72,6	+0,1	229	„	4.30	630,5	287,1	74,5	72,0	73,7	−0,6
201	„	2.30	632,5	290,6	71,2	70,7	72,4	−0,2	230	„	5.—	630,2	287,1	69,4	72,0	73,6	+0,2
202	„	3.—	632,5	291,1	70,2	70,5	72,1	−0,1	231	„	5.30	630,0	287,1	74,8	71,9	73,6	−0,7
203	„	3.30	632,5	291,1	70,0	70,5	72,1	−0,1	232	„	6.—	629,8	287,3	71,1	71,8	73,4	−0,1
204	„	4.—	632,4	293,2	67,8	69,5	71,1	+0,1	233	„	6.30	629,7	287,8	70,1	71,5	73,2	+0,1
205	„	4.30	632,3	293,4	67,8	69,4	71,0	+0,1	234	„	7.—	629,7	288,2	67,5	71,3	72,9	+0,5
206	„	5.—	632,1	294,2	68,1	69,0	70,5	±0,0	235	„	7.30	629,5	288,7	70,7	71,0	72,7	−0,1
207	„	5.30	631,7	294,2	68,8	68,9	70,4	−0,2	236	„	8.—	629,6	289,1	70,8	70,8	72,5	−0,2
208	„	6.—	631,8	293,2	69,5	69,4	70,9	−0,2	237	„	8.30	629,5	289,7	70,5	70,5	72,1	−0,2
209	„	6.30	631,8	289,3	65,5	71,2	72,9	+0,8	238	„	9.—	629,4	290,2	63,1	70,3	71,9	+1,0
210	„	7.—	631,9	288,7	64,9	71,6	73,2	+0,8	239	„	9.30	629,1	291,2	70,4	69,7	71,3	+0,7
211	„	7.30	631,9	288,3	65,8	71,8	73,4	+0,8	240	„	10.—	629,3	291,9	67,5	69,4	71,0	+0,2
212	„	8.—	631,9	288,4	65,5	71,7	73,4	+0,9	241	„	10.30	629,3	291,8	72,0	69,5	71,1	−0,6
213	„	8.30	632,0	288,3	64,4	71,8	73,4	+1,1	242	„	11.—	629,0	291,2	69,8	69,7	71,3	−0,2

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der auf Kampenwand nach Irschenberg beobachteten Refraktionen.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	71,7	67,3	69,1	70,4	70,7	68,8	67,2	70,8	66,8	68,0	67,5	71,0
2	69,6	66,0	67,3	66,7	66,5	71,9	71,9	68,1	72,3	66,2	71,2	70,7
3	74,8	70,1	68,1	69,9	68,7	68,6	67,0	70,3	68,7	72,8	68,7	70,5
4	68,3	70,1	70,6	68,6	70,8	66,5	63,1	70,4	66,2	70,2	65,6	66,1
5	71,1		67,5	67,8		67,4			67,5	67,4	69,8	70,4
6				70,7		70,5				67,1	69,8	
7										72,0		
Mittel	71,1	68,4	68,5	69,0	69,2	69,0	67,3	69,9	68,3	69,1	68,8	69,7
Gewicht	5	4	5	6	4	6	4	4	5	7	6	5
Komb. Mittel	70,0	69,1	68,6	68,9	69,1	68,6	68,4	68,9	68,9	68,8	69,1	69,6

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	70,6	67,8	66,3	65,5	69,1	71,2	71,0	69,1	74,2	72,6	73,1	71,7
2	70,5	70,7	71,2	71,2	70,8	67,0	68,9	75,0	76,6	72,6	68,6	74,7
3	70,4		69,8	71,1	68,0	67,0	68,3	64,9	70,3	67,3	72,8	68,8
4	66,3		65,4	66,1	65,0	72,7	70,2	65,6	74,9	67,8	68,1	
5	72,2		72,9	66,4	69,6		67,8	70,0	64,3			
6				70,9				69,3	67,8			
Mittel	70,0	69,3	69,1	68,5	68,5	69,5	69,2	69,0	69,9	70,1	70,7	71,1
Gewicht	5	2	5	6	5	4	5	6	6	4	4	3
Komb. Mittel	69,8	69,4	69,0	68,7	68,8	69,2	69,2	69,3	69,7	70,2	70,7	71,1

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	73,5	69,1	70,2	69,6	76,5	72,4	79,0	85,7	70,5	72,0	70,9	72,0
2	69,5	75,4	71,7	70,9	71,2	78,4	69,2	72,3	74,1	75,6	71,2	71,6
3		65,5	64,9	73,0	68,9	68,1	77,2	72,1	86,3	87,8	88,9	97,1
4				65,8	73,9	74,8	74,7	77,4	66,3	66,3	66,4	67,8
5					65,5	64,4	66,0	67,0	74,1	71,6	77,1	77,0
6							72,3	78,5	70,0	69,6	72,6	71,9
7							67,6	66,5				
Mittel	71,5	70,0	68,9	69,8	71,2	71,6	72,3	74,2	73,6	73,8	74,5	76,2
Gewicht	2	3	3	4	5	5	7	7	6	6	6	6
Komb. Mittel	71,0	70,1	69,4	69,9	70,7	71,7	72,6	73,6	73,8	73,9	74,8	76,5

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	74,1	71,8	72,4	73,4	71,6	69,7	67,7	68,8	81,1	77,7	67,0	68,2
2	72,7	77,1	79,3	74,5	74,1	71,5	76,3	78,5	71,7	67,7	69,1	64,4
3	101,3	92,4	80,8	69,7	74,0	72,3	73,6	70,7	77,3	77,3	67,6	68,2
4	71,6	73,0	69,6	77,0	75,9	74,3	73,5	70,3	69,8	70,1	67,2	70,5
5	78,5	79,5	83,2	74,2	70,2	70,2	75,4	71,2	71,1	68,3	70,2	74,8
6	77,1	81,6	74,6						71,4	74,5	69,4	
Mittel	79,2	79,2	67,7	73,8	73,2	71,6	73,3	71,9	73,7	72,6	68,4	69,2
Gewicht	6	6	6	5	5	5	5	5	6	6	6	5
Komb. Mittel	78,5	78,6	76,6	74,4	73,2	72,4	72,5	72,7	73,0	71,8	69,7	69,5

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Kampenwand aus Kampenwand-Irschenberg.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	77,0	77,0	72,5	71,6	76,2	76,2	75,7	73,2	74,9	74,9	74,7	74,6
2	73,9	73,4	76,7	76,0	72,2	73,0	71,5	73,6	72,9	72,6	72,6	72,5
3	71,3	74,3	72,1	75,0	73,8	72,0	73,6	69,7	71,3	70,8	70,4	70,4
4	74,8	71,5	74,1	72,3	70,8	73,8	70,3		73,2	72,7	72,5	72,4
5	71,8		71,3	74,0		70,5			69,4	69,5	69,7	
6				71,0								
Mittel	73,7	74,1	73,3	73,3	73,3	73,1	72,8	72,2	72,3	72,1	72,0	72,5
Gewicht	5	4	5	6	4	5	4	3	5	5	5	4
Komb. Mittel	73,8	73,8	73,5	73,3	73,3	73,1	72,7	72,4	72,2	72,1	72,2	72,3

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	74,2	72,4	73,7	73,6	73,0	72,2	74,4	75,0	72,8	75,6	75,6	72,9
2	72,3	71,7	72,5	72,4	72,4	69,4	72,8	72,6	72,9	72,2	72,3	72,4
3	69,4		70,3	69,7	69,7	74,3	71,7	71,8	71,3	71,3	71,7	69,9
4	72,3		71,5	74,2	74,6	70,7	69,7	69,7	70,0	69,4	69,0	
5				71,5	70,9		74,1	74,2	73,6		69,9	
6							70,5	70,5	69,5			
Mittel	72,1	72,1	72,0	72,3	72,1	71,7	72,3	72,3	71,7	72,1	71,7	71,7
Gewicht	4	2	4	5	5	4	6	6	6	4	5	3
Komb. Mittel	72,2	72,1	72,1	72,2	72,1	72,0	72,2	72,2	72,0	71,9	71,8	71,8

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	73,0	73,2	73,3	73,3	74,0	76,1	75,4	75,3	76,3	76,4	76,3	76,3
2	73,0	73,3	70,0	70,1	73,4	73,7	76,2	76,2	73,9	73,6	73,3	73,1
3	70,0	71,2	75,3	75,6	70,1	70,0	73,7	73,9	74,0	73,5	73,2	73,0
4			71,6	71,8	75,8	75,9	73,6	73,8	70,0	75,8	75,8	75,8
5					71,7	71,8	69,8	69,9	75,8	71,4	72,2	72,1
6							75,8	75,8	72,3			
7							72,1	72,2				
Mittel	72,0	72,6	72,6	72,7	73,0	73,5	73,8	73,9	73,7	74,1	74,2	74,1
Gewicht	3	3	4	4	5	5	7	7	6	5	5	5
Komb. Mittel	72,1	72,5	72,5	72,8	73,1	73,5	73,8	73,8	73,9	74,0	74,2	74,1

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	76,4	76,5	76,6	76,7	76,8	76,9	77,0	77,0	74,6	74,5	74,3	74,3
2	73,0	72,9	73,0	73,0	72,9	72,8	73,2	73,1	77,0	73,5	73,5	73,1
3	72,6	72,5	72,1	72,1	72,6	72,8	73,7	70,4	72,8	73,7	73,7	73,7
4	75,7	75,7	75,6	75,1	75,3	75,3	70,1	75,2	73,6	74,9	74,9	74,8
5	72,2	72,3	72,5	72,4	72,4	72,4	75,3	72,3	70,5	72,0	72,0	71,9
6							72,3		75,1			
7									72,3			
Mittel	74,0	74,0	74,0	73,9	74,0	74,0	73,6	73,6	73,7	73,7	73,7	73,6
Gewicht	5	5	5	5	5	5	6	5	7	5	5	5
Komb. Mittel	74,0	74,0	74,0	74,0	74,0	73,9	73,7	73,6	73,7	73,7	73,7	73,7

D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen in Irschenberg aus Kampenwand-Irschenberg.

Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	78,8	78,8	74,2	73,2	78,0	78,0	77,5	74,9	76,6	76,6	76,4	76,3
2	75,6	75,1	78,4	77,7	73,9	74,7	73,3	75,3	74,6	74,2	74,2	74,2
3	73,0	76,0	73,7	76,7	75,5	73,7	75,3	71,3	73,0	72,4	72,0	72,1
4	76,5	73,2	75,8	74,0	72,5	75,5	71,9		74,9	74,3	74,1	74,0
5	73,4		72,9	75,7		72,1			71,0	71,1	71,3	
6				72,7								
Mittel	75,5	75,8	75,0	75,0	75,0	74,8	74,5	73,8	74,0	73,7	73,6	74,3
Gewicht	5	4	5	6	4	5	4	3	5	5	5	4
Komb. Mittel	75,5	75,5	75,2	75,0	75,0	74,8	74,4	74,0	73,9	73,8	73,8	74,0

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	76,0	74,0	75,4	75,3	74,7	73,8	76,5	76,7	74,5	77,3	77,3	74,5
2	73,9	73,4	74,2	74,1	74,1	71,0	74,5	74,3	74,6	73,9	74,0	74,1
3	71,0		71,9	71,4	71,4	76,0	73,3	73,5	72,9	72,9	73,4	71,5
4	73,9		73,2	75,9	76,3	72,4	71,4	71,3	71,6	71,0	71,5	
5				73,1	72,6		75,8	75,9	75,3		70,5	
6							72,1	72,1	71,1			
Mittel	73,7	73,7	73,7	73,9	73,8	73,3	73,9	74,0	73,3	73,8	73,3	73,4
Gewicht	4	2	4	5	5	4	6	6	6	4	5	3
Komb. Mittel	73,9	73,7	73,8	73,8	73,7	73,6	73,8	73,8	73,6	73,6	73,5	73,4

Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	74,7	74,9	75,0	75,0	75,7	78,8	77,1	77,0	78,0	78,1	78,1	78,0
2	74,5	75,0	71,6	71,7	75,1	75,3	78,0	78,0	75,6	75,3	75,0	74,8
3	71,5	72,9	77,1	77,3	71,7	71,6	75,4	75,6	75,7	75,2	74,8	74,6
4			73,2	73,4	77,6	77,6	75,3	75,5	71,6	77,5	77,5	77,5
5					73,4	73,4	71,4	71,5	77,5	73,1	73,8	73,7
6							77,6	77,6	73,9			
7							73,8	73,9				
Mittel	73,6	74,3	74,2	74,4	74,7	75,2	75,5	75,6	75,4	75,8	75,8	75,7
Gewicht	3	3	4	4	5	5	7	7	6	5	5	5
Komb. Mittel	73,7	74,1	74,3	74,4	74,8	75,2	75,5	75,5	75,6	75,7	75,8	75,7

Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	78,2	78,3	78,4	78,5	78,6	78,7	78,8	78,8	76,3	76,2	76,0	76,0
2	74,7	74,6	74,7	74,7	74,6	74,5	74,9	74,8	78,8	75,2	75,2	74,8
3	74,3	74,1	73,8	73,8	74,2	74,4	75,4	72,0	74,4	75,4	75,4	75,4
4	77,4	77,4	77,3	76,9	77,0	77,0	71,7	77,0	75,3	76,7	76,6	76,6
5	73,9	74,0	74,2	74,1	74,1	74,0	77,0	74,0	72,2	73,7	73,6	73,6
6							74,0		76,9			
7									73,9			
Mittel	75,7	75,7	75,7	75,6	75,7	75,7	75,3	75,3	75,4	75,4	75,4	75,3
Gewicht	5	5	5	5	5	5	6	5	7	5	5	5
Komb. Mittel	75,7	75,7	75,7	75,7	75,7	75,6	75,4	75,3	75,4	75,4	75,4	75,4

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen für Kampenwand-Irschenberg.

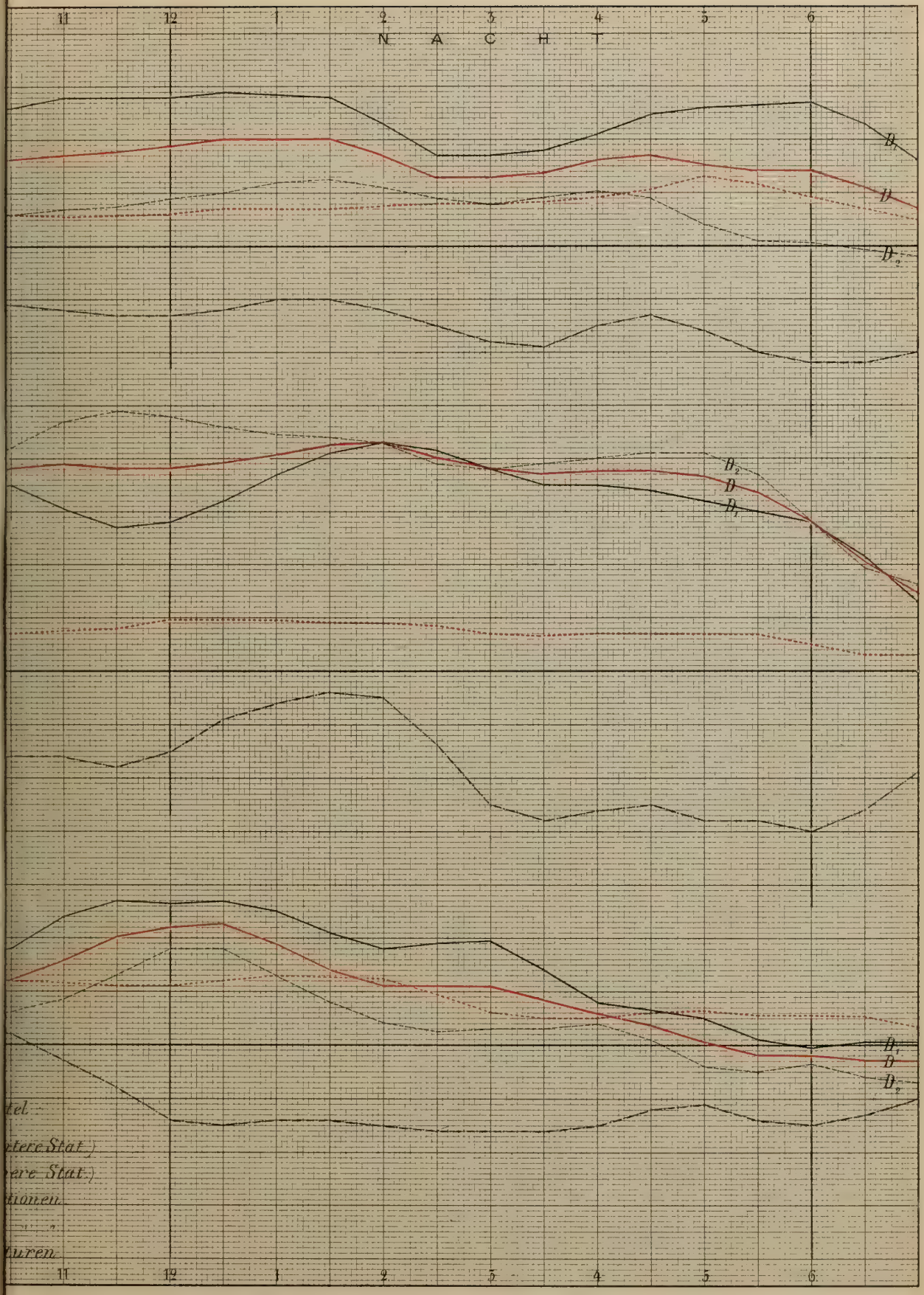
Nr	Vormittag											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	+0,7	+1,4	+1,1	+0,7	+0,7	+1,0	+1,2	+0,2	+0,2	+1,0	+1,0	+0,4
2	+0,5	+1,1	+0,7	+0,7	+0,8	±0,0	+0,7	+1,3	−0,1	+1,3	+0,1	+0,1
3	−0,7	+0,5	+0,5	+0,7	+1,2	+0,4	+0,9	+0,4	+0,3	−0,2	+0,1	−0,2
4	+0,9	+0,1	+0,4	+0,4	−0,2	+1,6	+1,0	+0,7	+1,6	−0,1	+1,6	+1,4
5	−0,1		+0,5	+1,3		+0,9			+0,2	+1,3	+0,3	+0,1
6				−0,1		−0,2				+0,7	−0,2	
7										−0,6		
Mittel	+0,3	+0,8	+0,6	+0,6	+0,6	+0,6	+1,0	+0,6	+0,4	+0,5	+0,5	+0,4
Gewicht	5	4	5	6	4	6	4	4	5	7	6	5
Komb. Mittel	+0,5	+0,6	+0,7	+0,6	+0,6	+0,7	+0,8	+0,7	+0,5	+0,5	+0,5	+0,4

*

Nr	Nachmittag											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	+ 0,4	+ 1,1	+ 1,3	+ 1,4	+ 0,2	+ 0,7	+ 1,0	+ 0,8	— 0,4	+ 0,3	+ 0,2	— 0,1
2	+ 0,1	± 0,0	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,6	+ 0,2	— 0,1	+ 0,1	+ 0,7	— 0,2	+ 0,3	— 1,0
3	— 0,3		+ 0,3	± 0,0	+ 0,6	+ 0,1	± 0,0	— 1,1	± 0,0	+ 0,5	— 0,7	— 0,2
4	+ 1,3		+ 0,6	+ 0,4	+ 0,7	— 0,2	— 0,2	+ 1,5	— 1,0	+ 0,1	± 0,0	
5	— 0,2		— 0,4	+ 1,1	+ 0,1		— 0,1	+ 0,2	+ 1,4			
6				— 0,1				— 0,1	+ 0,1			
Mittel	+ 0,3	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,2	+ 0,1	+ 0,2	+ 0,1	+ 0,2	± 0,0	— 0,4
Gewicht	5	2	5	6	5	4	5	6	6	4	4	3
Komb. Mittel	+ 0,4	+ 0,4	+ 0,5	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,1	± 0,0	— 0,3

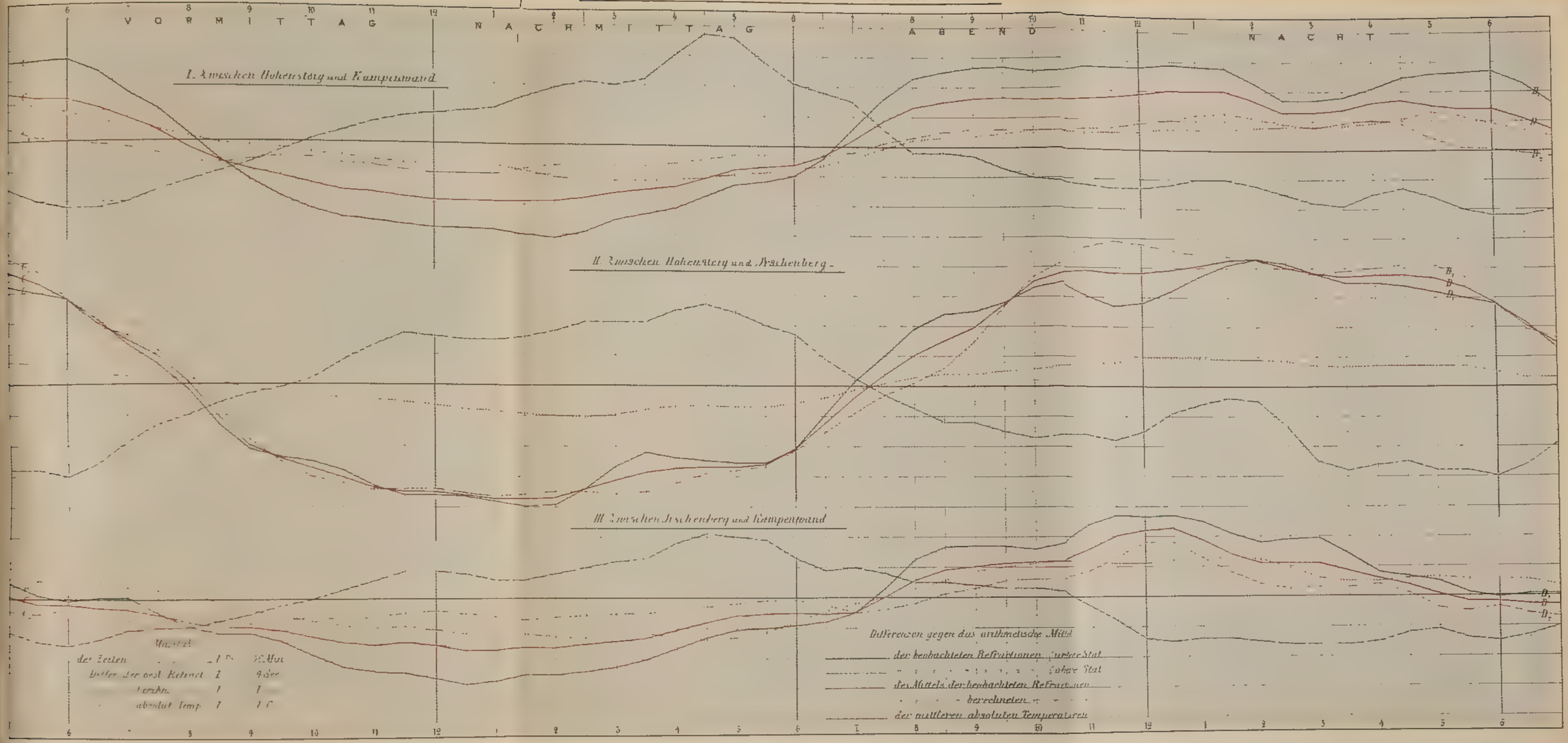
Nr	Abends											
	6	6½	7	7½	8	8½	9	9½	10	10½	11	11½
1	— 0,8	+ 0,5	— 0,2	+ 0,4	— 0,6	+ 0,4	— 0,8	— 1,9	+ 0,8	+ 1,5	+ 0,7	+ 0,5
2	— 0,2	+ 1,1	+ 0,4	— 0,3	+ 0,2	— 1,0	+ 1,0	+ 0,5	— 0,2	— 0,5	+ 0,2	+ 0,1
3		+ 0,8	+ 0,8	+ 0,2	± 0,0	+ 0,1	— 0,8	+ 0,1	— 2,2	— 2,6	— 2,8	— 4,2
4				+ 0,8	+ 0,1	± 0,0	— 0,4	— 0,8	+ 0,4	+ 0,4	+ 0,4	+ 0,2
5					+ 0,9	+ 1,1	+ 0,5	+ 0,3	+ 0,1	+ 0,5	— 0,4	— 0,4
6							+ 0,4	— 0,6	+ 0,2	+ 0,1	— 0,3	— 0,2
7							+ 0,6	+ 0,8				
Mittel	— 0,5	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,3	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,1	— 0,2	— 0,2	— 0,1	— 0,4	— 0,7
Gewicht	2	3	3	4	5	5	7	7	6	6	6	6
Komb. Mittel	— 0,3	± 0,0	+ 0,3	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	± 0,0	— 0,1	— 0,2	— 0,2	— 0,4	— 0,8

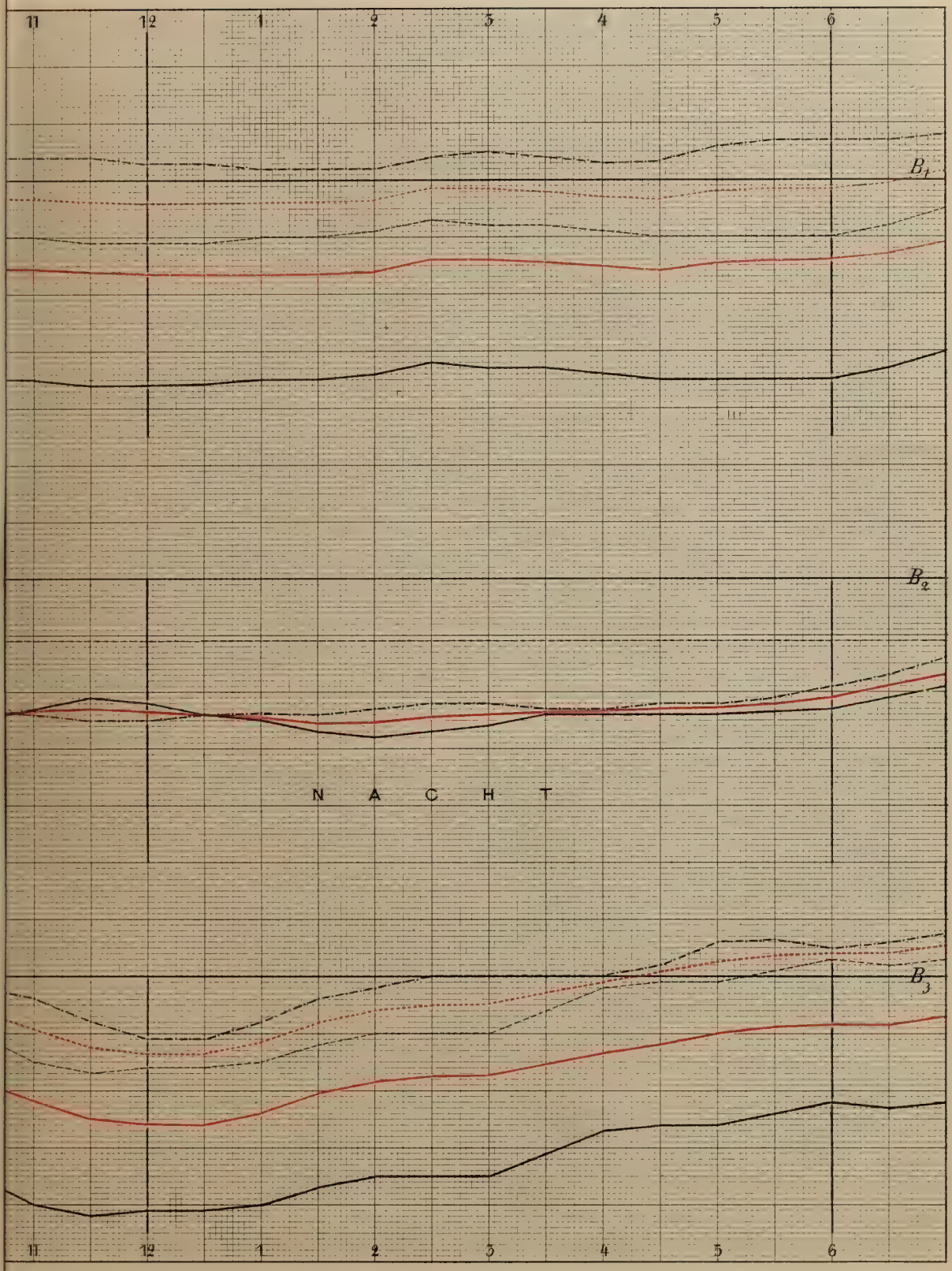
Nr	Morgens											
	12	12½	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½
1	+ 0,2	+ 0,6	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,7	+ 1,0	+ 1,3	+ 1,2	— 1,3	— 0,7	+ 1,0	+ 1,3
2	— 0,1	— 0,9	+ 1,2	— 0,6	— 0,4	± 0,0	— 0,6	— 1,1	+ 0,7	+ 1,4	+ 1,2	+ 1,3
3	— 4,9	— 3,5	— 1,6	— 0,2	— 0,9	— 0,6	— 0,8	— 0,2	— 0,9	— 0,8	+ 0,8	+ 0,7
4	— 0,5	— 0,8	— 0,2	— 0,5	— 0,3	± 0,0	+ 0,1	+ 0,6	+ 0,4	+ 0,4	+ 0,9	+ 0,5
5	— 0,7	— 0,8	— 1,5	— 0,5	+ 0,2	+ 0,2	— 0,7	± 0,0	+ 0,5	+ 0,9	+ 0,6	— 0,7
6	— 1,0	— 1,7	— 0,5						± 0,0	— 0,6	+ 0,2	
Mittel	— 1,2	— 1,2	— 0,8	— 0,3	— 0,2	+ 0,1	— 0,1	+ 0,1	— 0,1	+ 0,1	+ 0,8	+ 0,6
Gewicht	6	6	6	5	5	5	5	5	6	6	6	5
Komb. Mittel	— 1,1	— 1,1	— 0,8	— 0,4	— 0,2	± 0,0	± 0,0	± 0,0	± 0,0	+ 0,2	+ 0,6	+ 0,6



tel
tere Stat.)
ere Stat.)
tionen
turen

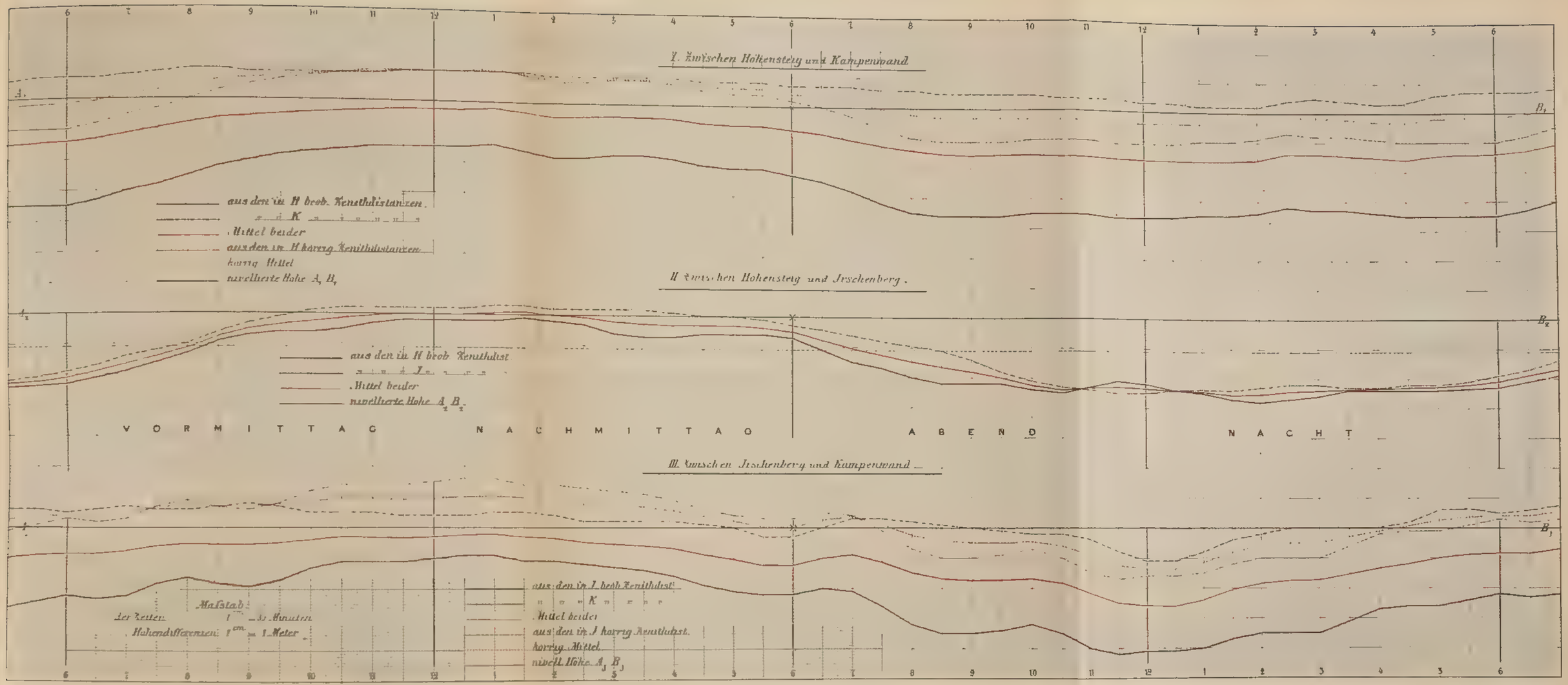
Durch Zenithdistanzen bestimmte Refractionen





Gezeichnet v. K. Oertel

Trigonometrisch bestimmte Höhendifferenzen



Ueber

neue Exemplare von jurassischen Medusen

von

Ludwig von Ammon.

Mit fünf Tafeln.

Einleitung.

Zu den merkwürdigsten Versteinerungen gehören ohne Zweifel die Abdrücke fossiler Medusen. In der That ist es geradezu wunderbar, dass von solchen zarten Geschöpfen, wie es die Quallen sind, deren Körpermasse durch besondere Weichheit sich auszeichnet und äusserst leicht der Zerstörbarkeit ausgesetzt ist, Reste in fossilem Zustande sich haben erhalten können. Man kennt übrigens zur Zeit nur wenig fossile Formen aus dieser Gruppe der Coelenteraten. Fast sämmtliche Arten (eine oder wenige Species aus der Kreide ausgenommen) sind in dem feinkörnigen oberjurassischen Kalkschiefer der Gegend von Solenhofen und Eichstädt aufgefunden worden, welche Ablagerung noch so manche andere zart gebaute Organismen der Jurazeit in deutlich erhaltenen Abdrücken uns überliefert hat. Gleichwohl bilden diese Reste von Schirmquallen in der reichen Fauna des Solenhofener Plattenkalkes nur vereinzelte Erscheinungen, so dass Exemplare von jurassischen Medusen zu den seltensten und werthvollsten paläontologischen Objekten gehören. Vor Kurzem ist es mir nun geglückt, zwei besonders schöne Abdrücke von versteinerten Quallen für die hiesigen Museen zu erwerben. Die beiden vorliegenden Stücke sind zugleich die besterhaltenen Reste von fossilen Medusen überhaupt. Es sind an denselben manche Einzelheiten zu beobachten, die an den bisher beschriebenen Stücken entweder gar nicht oder nicht in solcher Deutlichkeit zu erkennen waren, so dass durch die Untersuchung der neuen Exemplare die Kenntniss dieser alten Vertreter der in fossilen Repräsentanten bis vor nicht langer Zeit fast kaum bekannten, gegenwärtig dagegen in so grosser Mannigfaltigkeit entwickelten Ordnung der Scheibenquallen unter den Hydromedusen in mehrfacher Hinsicht eine Ergänzung erfährt.

Da es sich daher wohl verlohnen dürfte, die interessanten Versteinerungen einem weiteren Kreise von Paläontologen vorzuführen, habe ich dieselben abbilden lassen und zwar geschah diess, um eine möglichst getreue Darstellung der Originale geben zu können, auf photographischem Wege (Lichtdruck). Zugleich habe ich versucht, den Abbildungen eine ausführlichere Beschreibung der Stücke, welche den Inhalt der folgenden Zeilen bildet, beizufügen. Die Herstellung der Lichtdruck-Tafeln hat das rühmlichst bekannte photographische Atelier von Bruckmann in München übernommen. Dem in dieser Kunstanstalt beschäftigten Techniker Herrn Ferdinand Renner, welcher sich hauptsächlich um die hübsche Ausstattung der Tafeln verdient machte, möchte ich an dieser Stelle für seine Bemühungen meinen lebhaften Dank ausdrücken.

Beschreibung der neuen Exemplare.

Betrachten wir zunächst im Allgemeinen die Stücke, so kann die Deutung derselben als die Reste von Quallen oder Medusen keinem Zweifel unterworfen sein. Der deutliche Abdruck der fast kreisrunden Medusenscheibe, die Ausbildung verschiedener Zonen an derselben, die lappigen Fortsätze am äusseren Rande, die ausgesprochene Viertheilung in der Anordnung der einzelnen Organe, welche Tetramerie hauptsächlich in der Beschaffenheit der mittleren Parthie zum Ausdrucke kommt, geben den bestimmtesten Beweis für die Medusennatur der Versteinerungen ab. Mit den vorliegenden Exemplaren im Habitus völlig übereinstimmende Formen sind bereits von berufenster Seite, nämlich von Ernst Haeckel und später von Alex. Brandt, als ächte fossile Medusen bestimmt und beschrieben worden. Die Arten, mit welchen die neuen Stücke specifisch unmittelbar sich vergleichen lassen, sind *Rhizostomites admirandus* und *Rhizostomites lithographicus*. Die beiden Species wurden im Jahre 1866 von Ernst Haeckel[1]) aufgestellt und ausführlich beschrieben. Die

1) Dr. Ernst Haeckel: Ueber zwei neue fossile Medusen aus der Familie der Rhizostomiden in dem kgl. mineralog. Museum zu Dresden. Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie, Jahrg. 1866. S. 257—292. Taf. V und VI. Ferner E. Haeckel: Ueber die fossilen Medusen der Jura-Zeit. Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. XIX. Bd. Leipzig 1869, S. 557 u. 558.

Originale, die 3 Individuen auf zwei Gesteinsstücken (einfacher Abdruck bei Rhizostom. admirandus, Doppelplatte bei Rh. lithographicus) darstellen, gehören dem Dresdner Museum an. Sie sind gleichfalls im Plattenkalke der Eichstädter Gegend aufgefunden worden. Einige Jahre später (1870) erfuhren die gleichen Exemplare eine nochmalige Beschreibung und Abbildung und zwar Seitens des Petersburger Zoologen Alexander Brandt.[2])

Der specielle Fundplatz der in Rede stehenden Versteinerungen ist der Pfahlspeuntner Steinbruch im Waltinger Forst bei Eichstädt. Der Ort Pfahlspeunt an der Altmühl liegt 14 Kilometer östlich von Eichstädt an der Strasse nach Kipfenberg. Der genannte Steinbruch, $^3/_4$ Stunden von Pfahlspeunt in südlicher Richtung entfernt, befindet sich oberhalb (O) des Ortes Walting auf dem Plateau. Dasselbe wird wie überhaupt die Höhen der Juraplatte in dieser Gegend aus den Lagen des Plattenkalkes (lithographischer Schiefer, Stufe des *Ammonites steraspis*) zusammengesetzt, welchem Schichtencomplex auch der in dem Pfahlspeuntner Bruche aufgeschlossene Werkstein (Boden- und Dachplatten) angehört. Ueber dem Jurakalk breitet sich strichweise eine mehr oder weniger starke Decke von zähem, gelbem Lehm (eluviales Deckgebilde der Alb) aus. Unter dem Plattenkalk ist in normaler Weise Dolomit (Frankendolomit, Stufe des *Pterocera Oceani*) gelagert, aus welchem die Gehänge des Altmühlthales auf grosse Strecken hin fast allein bestehen. Bei Walting und Pfahlspeunt schneidet das Hauptthal noch in tiefere (ältere) Schichten der Weissjuraformation ein, indem hier ein gelber, schwammführender, grobbankiger, harter Kalkstein, der sogen. normale Schwammkalk (die Stufe des *Ammon. Eudoxus* und *pseudomutabilis,* welche in diesem Theile des Frankenjura mit den oberen Tenuilobatenschichten untrennbar verbunden ist, vertretend), den Sockel des darüber in pittoresken Felsen sich erhebenden Dolomites bildet, während unmittelbar bei Pfahlspeunt in einem schmalen Streifen am südlichen und einem etwas breiteren am nördlichen Altmühlufer (bei Rieshofen) der weiche graue Mergelkalk der mittleren Tenuilobatenschichten (mit *Ammonites tenuilobatus, polyplocus*) in der Thalsohle zu Tage tritt.

---

2) Dr. Alexander Brandt: Ueber fossile Medusen. Mémoires de l'Académie imperiale des sciences de St.-Pétersbourg, VII. Série, Tome XVI, Nr. 11. Petersbg. 1871, S. 1—18. Taf. I.

Rhizostomites lithographicus E. Haeckel.

Taf. I und Taf. III.

Von dieser Versteinerung sind Platte und Gegenplatte vorhanden. Die Abbildung (Taf. I) stellt den Reliefabdruck in natürlicher Grösse dar. Das Gesteinsstück, auf welchem sich das Fossil befindet, besitzt die ungefähre Form eines Rechteckes von 26 cm Länge und 21 cm Breite. Fast die ganze Fläche des Steines wird vom Abdrucke eingenommen. Am oberen Rande desselben hat sich auf der Reliefplatte ein Theil der äusseren Zone losgelöst und bildet am Gegenabdruck eine erhabene Parthie. An der unteren Seite ist der randliche Theil weggebrochen. Im Uebrigen ist der Abdruck prächtig erhalten, so dass unter den grösseren fossilen Medusenarten das vorliegende Stück die bis jetzt bekannten Exemplare an Vollständigkeit und Deutlichkeit in der Ausbildung der einzelnen Theile weitaus übertrifft.

Vom Medusenkörper ist nur die untere (orale) Fläche des Schirmes (die Subumbrella) zum Abdruck gelangt. An der breitesten Stelle misst der Durchmesser des Schirmes 25 Centimeter. Die Dimensionsverhältnisse unserer Meduse sind nahezu die gleichen wie beim *Hexarhizites insignis,* einer gleichfalls von Haeckel[3]) aufgestellten, dem neu erworbenen Exemplare höchst ähnlichen, aber sechszähligen Solenhofener Medusenform (Durchm. 27 cm.) Das von Haeckel und Brandt beschriebene Exemplar von *Rhizost. lithographicus* ist etwas kleiner (Durchmesser circa 20 cm) als das unserige. *Rhizostom. admirandus* dagegen zeichnet sich durch eine stattlichere Grösse aus; beim Dresdner Stück beträgt der Schirmdurchmesser 40 cm.

Haeckel hat an seinem *Hexarhizites insignis* und den beiden *Rhizostomites*-Arten ein Mittelfeld und mehrere dasselbe umgebende, durch concentrische Linien umschriebene Ringfelder oder Zonen unterschieden. Dieselbe Eintheilung der Schirmfläche kann der bequemen Beschreibung halber auch für unsere analog gebaute Meduse Anwendung finden; für die einzelnen Hauptfelder habe ich die Haeckel'schen Bezeichnungen

---

3) E. Haeckel. Ueber eine sechszählige fossile Rhizostomee und eine vierzähl. foss. Semäostomee. Jenaische Zeitschrift für Naturw. VIII. Bd. 1874, S. 308—323. Taf. X.

im Ganzen beibehalten; nur für eine der concentrischen Zonen, für diejenige Region, welche das Mittelfeld unmittelbar umgibt, schien mir eine andere als die von dem genannten Autor gewählte Benennung geeigneter.

Es lassen sich auf der Schirmfläche folgende Theile unterscheiden:

a) Ein annähernd kreisrundes Mittelfeld, welches durch ein vom Mittelpunkte ausstrahlendes und sich vergabelndes Furchen-Kreuz in acht Felder abgetheilt ist. Von diesen schliessen sich je 4, die sich paarweise gegenüberstehen, zu einer Maltheser-Kreuz-ähnlichen Figur zusammen.

b) Ein unmittelbar darum befindliches Ringfeld, von welchem aus an vier Stellen ovale plattenförmige Gebilde nach auswärts vorspringen. Die Oberfläche dieser Zone besitzt eine rauhe, höckerige Beschaffenheit, wesshalb ich dieselbe im Gegensatz zu der folgenden glatten Zone als höckerigen Ring (HR) bezeichnen möchte. Dieses erste innerste Ringfeld ist identisch mit der Genitalzone Haeckel's am Hexarhizites insignis und Rhiz. lithographicus sowie mit den beiden vereinigten Zonen des tiefen Ringes (Genitalhöhlenfeld) und viergetheilten Ringes (sichelförmige Genitalwülste) am Rhizost. admirandus.

c) Ein zwischen dem höckerigen Ring und der Randzone gelegenes breites Ringfeld, welches im Allgemeinen eine glatte Oberfläche zeigt, der glatte Ring (GR). Auf diesem Felde befindet sich eine wallartige ringförmige Erhebung, der Ringwall, welche auf der Platte als eine der markantesten Parthieen des Abdruckes hervortritt (w).

d) Ein peripherisches Ringfeld, ausgezeichnet durch viele darauf befindliche concentrische Furchen und Wülste — der gefurchte Ring (FR). Sein äusserer Rand ist mit einem deutlichen Lappenkranz besetzt.

Die Randzone in ihrem mittleren Theile bildet mit einigen Stellen in den Dreiecken des Mittelfeldes und dem Ringwall im grösseren Theil seiner Erstreckung die höheren Parthieen im Relief, während die glatte Zone (den Ringwall mit der nächsten Umgebung ausgenommen) mit dem höckrigen Ring die tiefer gelegenen Theile des Abdruckes einnehmen.

Die innere Gränze der **Randzone**, des gefurchten Ringes, ist durch eine ziemlich scharfe Linie (cc) markirt, die durch die ganze Platte, soweit das Stück erhalten ist, verfolgt werden kann. Es dürfte dieselbe den Verlauf des Ringcanales andeuten. In der Gegend dieser Linie, namentlich gegen die glatte Zone hinein, senkt sich das Niveau der Platte

etwas, nur auf eine kurze Strecke hin erhebt sich der randliche Theil des glatten Ringfeldes bis zum Niveau, welches die Randzone in ihrem mittleren Theil einnimmt, so dass die beide Ringfelder trennende Kreislinie (cc) auf der Höhe der peripherischen Zone fortläuft (im linken Theil der Figur, nächst den abgewetzten, im photographischen Bilde weiss erscheinenden Stellen).

Die Breite des gefurchten Ringes schwankt nach den Messungen von 15 bis zu 30 mm. Im Durchschnitt mag sie ungefähr 25 mm betragen.

Ueber die Fläche der äusseren (distalen) Hälfte der Randzone laufen deutliche concentrische Furchen, die mit ein wenig breiteren Ringwülsten abwechseln. Die Beschreibung, die Haeckel von den Ringwülsten am *Rhizostomites admirandus* gibt, kann auch bei unsrer Meduse volle Anwendung finden; nur sind dieselben hier entsprechend den geringeren Dimensionsverhältnissen der letzteren denen des Rhizostom. admirandus an Zahl und Breite nachstehend. Haeckel schildert (loc. cit. S. 279) sie als „niedrige, dreikantig-prismatische Rippen, welche über die Oberfläche des Ringes vorspringen und ebenso viele tiefe und scharfe Furchen zwischen sich lassen."

Die Ringwülste (mc) sind fast allein in der äusseren, peripherischen Hälfte des Ringfeldes ausgebildet. Auf der inneren, glatten Region desselben lässt sich nur eine einzige feine, streckenweise mehr oder minder deutliche Furche constatiren, welche sich über die ganze Zone in grobwelligem Verlaufe zu ziehen scheint (z). Einige der Ringwülste erreichen die Breite eines Millimeters. Ihre Zahl lässt sich auf fünfzehn bis zwanzig schätzen. Sie sind in voller Deutlichkeit noch dicht über dem Lappenkranz wahrzunehmen (im Gegensatz zu Rhizost. admirandus). Die Ringstreifen sind unzweifelhaft als die Muskelringe der Subumbrella aufzufassen und zwar gehören sie dem Kranzmuskel *(M. coronarius)* an.

Vor dem Muskelring, von diesem scharf abgesetzt, findet man an den besser erhaltenen Theilen der Versteinerung noch eine weitere Region vertreten, welche als schmales äusserstes Ringfeld den peripherischen Abschluss der Medusen-Scheibe bildet. Diese Region ist durch kurze breite Furchen in eine grössere Zahl von Abschnitten getheilt. Ohne Bedenken wird man in den letzteren die Reste von Randlappen (l) erkennen, die

die Schirmfläche an der Peripherie rings umgeben. Betreffs ihrer Contouren und sonstigen Beschaffenheit möchte ich auf die Abbildung verweisen. Da wo die Furchen des Lappenkranzes an die Muskelschicht treten, bilden sie in derselben kleine Ausbuchtungen, setzen aber nicht weiter nach oben in die mit den Muskelreifen bedeckte Region fort. Die Lappen zeigen eine nur geringe Länge (5 mm), wodurch die Breite des ganzen Lappenrandes gegeben ist. Die Breite einzelner Randlappen beträgt 10 mm. Ausser diesen breiteren Abschnitten lassen sich an einigen Stellen noch schmälere lappenartige Ausschnitte (ll) erkennen, so dass anzunehmen ist, dass jeder Randlappen durch weitere Einschnitte in einzelne Nebenlappen zerspalten war. Die Breite der schmäleren Lappen beträgt 3 mm.

Ausserdem bemerkt man, dass der Rand an einigen Stellen etwas eingezogen ist. Es folgt daraus, dass die Scheibe mit einigen wenigen breiten und schwach vorspringenden Hauptlappen versehen war. Häeckel nahm für Rhizost. admirandus acht solche grössere Randlappen an (loc. cit. Restaurirtes Bild im Text, S. 265 und 277). Wir möchten für unsere Meduse lieber deren vier annehmen, da an den interradialen Randstellen, welche in der Verlängerung der grösseren Felder des Mittelstückes liegen, Einziehungen zu fehlen scheinen.

Auf der einen Seite (der rechten unserer Figur) breitet sich vor den Randlappen ein glatter Streifen aus (auf dem photograph. Bild durch den dunkleren Ton hervorgehoben). Die Entstehung dieser der Versteinerung nicht mehr angehörigen glatten Parthie ist in der Weise zu erklären, dass die Meduse, nachdem sie auf den schlammigen Boden zu liegen kam, nachträglich sich etwas zusammenzog und so auf dem ihrem Rande zunächst gelegenen Theile des Kalkschlammes eine glatte Oberfläche herstellte.

Als zweite Hauptzone an unserem Stück macht sich ein breites, bis zu einem mittleren Durchmesser von 4,5 bis 5 cm sich ausdehnendes Ringfeld geltend, welches durch die Linie des Ringcanales nach aussen, durch mehr oder weniger regelmässige concentrische Furchen vom höckerigen Ring mit den in die Region unserer Zone vorspringenden vier ovalen Platten nach innen abgegränzt ist. Wir bezeichnen dasselbe nach dem Vorgange Haeckels als **glatten Ring** (GR), da mit Ausnahme einiger Muskelstreifen im peripherischen Theil und des eigenthümlichen

Ringwalles keine weitere Skulptur auf seiner Fläche ausgeprägt ist. Die Oberfläche ist vielmehr eben und glatt. Es lassen sich innerhalb der Zone zwei Regionen unterscheiden: eine äussere, welche vom Ringcanal bis zum Ringwall reicht und auf welcher sich die concentrischen Muskelwülste befinden, und eine innere mit völlig glatter Oberfläche.

Die concentrischen Ringwülste (m), welche offenbar von der subumbrellaren Musculatur herrühren, treten erst in einiger Entfernung vom Ringcanal auf, nur an jenen Stellen, wo Theile der glatten Zone auf die äussere Randzone hinaufgeschoben sind (durch ungleiches Ausbreiten oder Verschiebung der Gallertmasse des Schirmes entstanden), stehen die Muskelstreifen unmittelbar neben dem Ringcanal (auf der linken Hälfte der Figur).

Als einer der markantesten und am leichtesten in die Augen fallenden Theile der Versteinerung gibt sich jener eigenthümliche kreisförmige Streifen zu erkennen, welchen wir als Ringwall (w) bezeichnet haben. Derselbe tritt in der Region der glatten Zone als ziemlich stark vorspringende wallartige Erhöhung auf und lässt sich in seinem Verlaufe durch das ganze Ringfeld deutlich verfolgen. In manchen Parthien seiner Erstreckung hebt er sich zu den im Relief am meisten vorstehenden Theilen des Abdruckes herauf, an anderen ist seine Höhe eine geringere. Nach Aussen hin geht der Ringwall mit sanfter Abdachung allmählich in die äussere Region der glatten Zone über; centralwärts dagegen ist ein steilerer Absturz vorhanden. Die Linie des Walles beschreibt keinen eigentlichen Kreis, sondern ist mehrfach mit abgerundeten Ecken versehen. Einzelne Theile der Walllinie sind etwas nach einwärts gebogen (offenbar durch nachträgliche Verschiebung der Gallertmasse im Medusenschirm entstanden). An den Ecken, sowie an den in der Mitte dazwischen befindlichen Punkten sind in ungefähr gleichem Abstand von einander Unterbrechungen in dem scharfen Contour des Ringwalles zu bemerken. Es sind diess ohne Zweifel Stellen, wo Kanäle von Radiärgefässen durchzogen (cp, ci u. ca).

Ausserdem ist die ebene Fläche des glatten Ringes noch durch eine Furche (br) unterbrochen. Ihr oberer Theil, in mehrere unregelmässig wellig verlaufende und wenig vertiefte Linien aufgelöst, nimmt seitwärts einer der vier nierenförmigen Platten seinen Anfang; ihr mittlerer Theil

bildet einen mit dem benachbarten Ringwall parallel laufenden theils schmalen, theils breiteren und dann mit Längskanten versehenen, deutlich eingeschnittenen Streifen; der untere Theil geht in ein in den Stein tiefer eingesenktes, spatelartig verbreitertes Ende über, das mit dem Abdruck eines quastenförmigen Körpers verglichen werden kann. Die Oberfläche des eingedrückten walzenförmigen Endstückes ist rauh und körnelig. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die ganze Furche den Abdruck eines Armes der Meduse darstellt. Die Verbreiterung unten dürfte dann einem quastenförmigen Zottenbüschel am Ende desselben entsprechen.

Die nun nach Innen folgende, dritte Zone ist der **höckerige Ring** (HR). Haeckel hat die correspondirenden Parthieen an seinen Exemplaren als Genitalring, beziehungsweise tiefen Ring und viergetheilten Ring bezeichnet. Nach unserer Ansicht entspricht diese Zone wenigstens der Hauptsache nach jenem Theile des Medusenschirmes, an welchem die die Arm- oder Mundscheibe tragenden Gallertstützen, die Pfeiler oder Armwurzeln, angebracht waren.

Die Breite des höckrigen Ringfeldes lässt sich ungefähr auf 15 bis 20 mm angeben; an den Stellen, wo nach Aussen die ovalen Platten vorgelagert sind, kann dieselbe bis zu 30 mm betragen. Der äussere Rand des Ringes ist ziemlich deutlich markirt. An den vier von den nierenförmigen oder ovalen Platten eingenommenen Stellen fällt derselbe mit der peripherischen Begränzung der letzteren zusammen. An den dazwischen liegenden Parthien wird die äussere Gränze der Zone von einer weiter gegen das Centrum zurückgeschobenen, weniger scharf umschriebenen aber in ihrem Contour noch deutlich wahrnehmbaren Furche gebildet (p), die theils in einfachem concentrischen Bogen, theils in einer welligen oder zickzackförmigen Linie verläuft. Nach Innen zu ist die Begränzung keine scharfe, und wenn auch als Peripherie des centralen Theiles ungefähr ein Kreis angenommen werden kann, setzen doch einzelne Felder des Mittelstückes, nämlich die grösseren oder interradialen (namentlich am oberen und rechten zu beobachten, s. Figur), eine Strecke weit in den höckerigen Ring fort. Die Anlagerung dieser Zone an das Mittelstück ist daher eine unregelmässige. Was das Aussehen des Gesteines innerhalb des höckerigen Ringfeldes betrifft, so zeichnet sich dasselbe durch die unregelmässig körnelige und rauhe Oberflächen-Beschaffenheit aus,

wesshalb wir die angeführte Bezeichnung für diese Zone gewählt haben. Es tritt dieses Merkmal nur auf denjenigen Theilen des Ringes zurück, welche als Fortsetzungen der grösseren Felder des Mittelstückes in den ersteren hineinreichen. Ausserdem erkennt man auf der Zone an mehreren meist der centralen Parthie genäherten Stellen ganz feine, concentrische Runzeln (rh). Ueber weitere Einzelheiten, die sich auf die Ausbildung dieser Region beziehen, geben die vielen unregelmässigen und verwaschenen Linien, welche das Ringfeld durchsetzen, leider keinen näheren Aufschluss. Die Furchen verlaufen theils in radialer Richtung (f), theils gehen sie schräg über den Ring (f) oder ziehen sich selbst in concentrischen und gewellten Linien durch. Betreffs der Details in der Ausbildungsweise dieser unruhigen Furchen und Vertiefungen verweisen wir auf die Abbildung.

Die vier nierenförmigen Platten (n) sind an keinem der bis jetzt bekannten Exemplare in solcher Vollständigkeit erhalten, wie auf unserem Abdruck. Alex. Brandt[4]) machte zuerst auf diese Theile aufmerksam, deutete dieselben als Decken der Genitalhöhlen und gab ihnen obigen Namen. Seine Zeichnungen hievon auf den abgebildeten beiden Dresdner Exemplaren sind jedoch, wie er im Uebrigen selbst zugibt, zu schematisch gehalten. Er stellt sie beide Male als nierenförmige Körper mit doppeltem Rande dar. Der innere Rand (seine ovalen Contouren i, loc. cit. S. 9) soll den Eingängen in die Genitalhöhlen (den ovalen Fenstern) entsprechen. Wir können an den Platten diese doppelte Contouren nicht in solcher Schärfe nachweisen. Die besagten Gebilde stellen ovale, der Quere nach verlängerte plattenförmige Körper vor von 20 bis 25 mm Länge und 12—18 mm Breite. Das Niveau der Platten ist etwas über ihre Nachbarschaft erhaben. Nach der Peripherie zu wölben sie sich etwas vor, doch zeigen sie zugleich an einer Stelle ihres äusseren Randes eine leichte Einbuchtung. Ein zweiter dem äusseren Rande paralleler Contour, wie es Brandt schematisch dargestellt hat, ist etwa nur bei einer Platte (der oberen) theilweise angedeutet. Dagegen findet sich unterhalb der Stelle, wo die schwache Einbuchtung aussen wahrgenommen werden kann, nach innen zu ein zipfelartiger Vorsprung vor, der durch eine erhöhte Linie begränzt ist. An der rechten Platte ist

4) loc. cit. S. 8.

die innere Begränzung dieses Umschlages als eine leicht geschwungene Linie, an der unteren und namentlich der linken als ein spitz nach einwärts gerichtetes Eck erkennbar. Der Contour der Platten an ihrem axialen Rande ist nur an der oberen und linken in schwachem Umriss erhalten. Er scheint entsprechend dem des distalen Randes eine mässig gewölbte Bogenlinie zu bilden. An der unteren und rechten Platte ist dieser Theil durch höckerige Auflagerungen und unregelmässige Furchung verdeckt. In der Mitte der Platten tritt in mehr oder minder guter Ausprägung (am besten an der oberen zu beobachten) eine breit furchenartige Vertiefung auf. Eine andere vom axialen Rande gegen die Mitte hin sich ziehende Furche bemerkt man auf dem linken ovalen Körper.

Mit grosser Wahrscheinlichkeit kann man die nierenförmigen Platten für die Abdrücke der Subgenitalklappen halten, eine Meinung, welche, wie oben erwähnt, bereits Brandt geäussert hat, indem er sie als Decken der Genitalhöhlen bezeichnete. Die Subgenitalklappen stellen (meist nierenförmige) Gallertplatten vor, welche zapfenartig vom Rande der Eingänge in die Subgenitalhöhlen vorspringen (Haeckel).[5]) Letztere die *Demnia* (Respirations-, Athem- oder Genitalhöhlen der Autoren) sind bekanntlich taschenförmig nach dem Scheibencentrum eingestülpte, interradial gestellte Höhlungen in der Gallertmasse der Subumbrella, auf deren innerem Boden sich diejenige Membran befindet, welche die in die centrale Magenöffnung nach einwärts fallenden Sexualprodukte liefert.

Von zweien der ovalen Platten reichen in die grossen Felder des Mittelstückes unregelmässig wulstige Streifen vor. Es sind diess aller Wahrscheinlichkeit nach erhärtete Kalkschlammparthien, welche durch die Ostien der Subgenitalhöhlen nach den mittleren Theilen der Scheibe hin eingedrungen sind. Nach Verwesung der Gallerte kamen sie auf den Abdruck der Armscheibe zu liegen. (Kalkige Auflagerungen, v der Figur).

Die an den Platten zunächst unten seitlich gelegenen Parthien sind durch regellos gewundene Furchen und höckerige Streifen ausgezeichnet. Es steht nichts im Wege, darin die Eindrücke von den obersten Theilen

---

5) E. Haeckel. Das System der Medusen. Jena 1879. Generelle Charakteristik der Diskomedusen p. 471.

der Arme zu erblicken, welche nach der Analogie mit lebenden Formen gerade von diesen (adradialen) Stellen aus am Rande der Armscheibe nach unten sich abzweigen mussten. Möglicherweise waren auch bei den gestrandeten Exemplaren, wie solche in den fossilen Abdrücken zweifellos vorliegen, die Arme, die wir uns lang und dünn vorstellen, bereits zum grössten Theile abgestossen. An unserem Stück scheint einer davon erhalten geblieben zu sein, derselbe breitete sich flach auf der Oberfläche des Schlammes aus und bedingte so die Furche (br) mit der Endquaste (sb) auf der glatten Zone.

Das **Mittelfeld** ist annähernd kreisförmig und besteht aus acht durch Furchen geschiedenen dreieckigen Feldern, von welchen je vier, kreuzförmig gestellt, sich vollkommen entsprechen. Sie fügen sich in der Art zusammen, dass eine regelmässige Figur entsteht, welche einem doppelten Maltheserkreuze gleicht, dessen breite Arme miteinander alterniren. Offenbar ist das ganze Mittelfeld als der Abdruck der Mund- oder Armscheibe, des *Stomodiscus* Haeckel's, von der oralen Seite aufzufassen.

Im Centrum des Mittelstückes, wo die vier Theile des einen Felderkreuzes zusammentreten, bemerkt man eine 4 mm lange, etwa 1 mm breite vertiefte Linie, die Mittelnaht (aa), welche als Rest des centralen offenen Mundes gedeutet werden kann. Von den beiden Enden der Mittelnaht gehen je zwei unter rechtem Winkel zu einander gerichtete, breite, nicht besonders tiefe Furchen mit etwas verwischten Rändern (a^1) ab. In einer Entfernung von etwa 7 oder 8 mm vergabeln sie sich. Die durch diese Spaltung hervorgerufenen Furchen (a^2, im Ganzen acht) treten als schärfer eingegrabene Linien mit zackigen Ausfranzungen auf, deren deutlicher Verlauf am Rande des Mittelfeldes endigt, wo sich die Furchen noch einmal zu theilen scheinen (y).

Es laufen sonach von der Mittelnaht, durch diese etwas auseinandergeschoben und desshalb nicht von einem Punkte der Mitte ausstrahlend, vier Hauptfurchen (a^1) aus, welche zusammen die primären Schenkel des Mundnahtkreuzes, die *Sutura staurostomalis* Haeckel's[6]) bilden. Die kreuzförmige Mundnaht mit der centralen Verbindungslinie sind die Ueberreste eines ursprünglich offenen Mundes, durch Verwachsung der faltigen

6) E. Haeckel. Syst. d. Medus. S. 464, 581, 615.

Ränder des letzteren entstanden. Die primären Schenkel des Mundnahtkreuzes, also die vier Hauptfurchen (a^1) sind stets perradial bei den lebenden Formen gestellt. Ihre Richtungen laufen in den Radien erster Ordnung. Damit ergibt sich die Orientirung für die übrigen Theile am Medusenschirm.

Die nur durch die Spaltäste (a^2) der primären Furchen des Mundkreuzes und die Kreislinien des Randes eingeschlossenen Parthien des Mittelfeldes (dp) haben von Haeckel die Bezeichnung der concav-gleichschenkeligen Dreiecke erhalten. Ihre Lage ist perradial, da ihre Mittellinien in die Verlängerung der Hauptfurchen der Mundkreuznaht fallen. Die Länge der perradialen Felder (dp) beträgt 24 mm, ihre Breite an der Peripherie ungefähr die gleiche Millimeterzahl. Die Linien, welche die concav-gleichschenkeligen Dreiecke seitwärts begränzen, die secundären Furchen (a^2) des Mundnahtkreuzes, sind tief eingeschnitten, nach aussen etwas concav gebogen und erscheinen in ihrem Verlaufe leicht gewellt und mit zackigen Ausläufern versehen. Es waren daher die Mundnähte mit krausen Anhängen besetzt (x), welche nach dem unruhigen Charakter der Eindrücke zu schliessen, an den Spitzen der Dreiecke büschelförmig gehäuft standen. An der Peripherie des Mittelfeldes glaubt man an einigen Punkten noch eine Vergabelung der secundären Aeste wahrzunehmen (y). Die Oberfläche der perradialen Dreiecke ist im Allgemeinen glatt, nur durch einige ziemlich grobe concentrische Falten unterbrochen. Was ihr Relief betrifft, so sind die Flächen der Dreiecke convex, mit mässiger Wölbung in ihren peripherischen Theilen. In ihrer Mitte oder auch etwas mehr gegen die Spitze zu tritt eine stärkere Erhöhung auf, welche theils gleichmässig sich abdacht (Dreiecke der rechten Seite), theils stärker hervorspringend durch die concentrischen Falten schärfer abgebrochen ist (Dreiecke der linken Seite, namentlich das untere). Die vorgewölbten Parthien bilden zugleich die höchst gelegenen Theile des ganzen Abdruckes (h). Dieses Verhalten steht im Gegensatz zu den Beobachtungen von Haeckel und Brandt am *Rhizostom. admirandus*, bei welchem innerhalb der interradialen Felder die höchsten Stellen sich befinden. Doch ist selbstverständlich darauf kein Gewicht für die Speciesunterscheidung zu legen, da durch flache Ausbreitung der Armscheibe die Höcker verschwinden und

sämmtliche Felder des Mittelstückes eine gleichmässige Wölbung erhalten können (wie an unserem Exemplare von Rhiz. admirandus, Taf. II Fig. II).

Die vier übrigen grösseren Felder des Mittelstückes, welche mit den vier kleineren, den concav-gleichschenkeligen Dreiecken, alterniren, hat Häckel die convex-gleichschenkeligen Dreiecke benannt (di). Sie stehen interradial, da ihre Mittellinien in der Mitte zwischen den perradialen Richtungen sich befinden und mit letzteren alterniren. Die Breite der interradialen Felder beträgt an den peripherischen Stellen des Mittelstückes 18 bis 25 mm, an ihren mittleren Theilen 17 mm. Die vier in Rede stehenden Dreiecke berühren sich fast mit ihren Spitzen im Mittelpunkte der Scheibe und sind eine Strecke weit von den primären Kreuzfurchen begränzt, während sie im längeren Theile ihrer Erstreckung durch die secundären Furchen von den concav gleichschenkeligen Dreiecken geschieden sind. Die mittelste Parthie der Scheibe, wo die vier interradialen Felder zusammentreten, ist auf unserem Abdruck etwas verwischt, da an dieser Stelle eine feine zerreibliche Kalkmasse statt härteren Kalksteines auf der Platte sich ausbreitet. Doch ist gerade diese Region an dem gleich näher zu besprechenden kleineren Exemplar, das nur das Mundstück von Rhizostomites lithographicus darstellt und eine mit unserem Stück völlig analoge Ausbildung zeigt, trefflich erhalten; wir werden desshalb die Details für den centralsten Theil weiter unten aufführen. Die mässig und gleichförmig gewölbte Oberfläche der convex-gleichschenkeligen Dreiecke, die etwas tiefer liegen als die concav-gleichschenkeligen, ist fast ganz glatt; nur wenige schwach angedeutete concentrische Furchen durchziehen hie und da die Felder. Eine wulstartige Hervorragung fehlt. An einigen Stellen sind offenbar erst später nach dem Abdrucke des Schirmes erfolgte streifige Auflagerungen von Kalkmasse zu beobachten. Im peripherischen Theile der Felder und von da noch etwas in die anstossende Zone hineinreichend ist eine ganz feine, mit der Lupe jedoch deutlich hervortretende concentrische Fältelung wahrnehmbar. Die Fältchen (r) sind äusserst schmal, aber ziemlich scharf und von gleichfalls sehr feinen Furchen getrennt. Vielleicht dürften diese Streifen als die Reste von Muskelsträngen auf der Armscheibe zu deuten sein.

Die Begränzung des Mittelstückes nach aussen ist an den perradialen

Feldern durch eine ziemlich deutliche Kreisfurche gegeben, die an einigen Stellen eckig vorspringt, von welchen aus undeutliche Furchen in den höckerigen Ring sich ziehen. Die Gränze zwischen dem letzteren und den interradialen Feldern dagegen ist eine unregelmässige. Am linken Feld bildet dieselbe einen den Grundlinien der beiden benachbarten concav-gleichschenkeligen Dreiecke entsprechenden Bogen. Die übrigen interradialen Felder setzen aber, indem sie sich zugleich verschmälern, in mehr oder minder deutlicher Weise noch eine Strecke weit in das höckerige Ringfeld fort. So reicht beispielsweise das obere Feld bis nahe an die nierenförmige Platte heran. Seitwärts dieser Verlängerungen der grösseren Felder schieben sich auf dieselben die Auflagerungen des höckerigen Rings herüber, an den ersteren mit bogenförmigen Contouren oder in schrägen Streifen endigend (rechte und obere Seite).

Endlich sei noch des Eindruckes einiger zarter Streifen Erwähnung gethan, welche sich auf dem convex-gleichschenkeligen Dreieck der rechten Seite befinden. Sie sind auf dem photographischen Bild bei der gewählten Beleuchtung nicht recht zum Ausdruck gekommen, wurden aber auf der schematischen Tafel (III, ov) getreu nach dem Original aufgetragen. Man nimmt zunächst eine sehr feine, schräg über das Feld laufende Furche wahr, von welcher sich nach oben seitwärts unter spitzem Winkel mehrere zu einander parallel stehende Streifchen abzweigen. Die hiedurch entstandene Figur hat einige Aehnlichkeit mit der Anordnung der Falten in der Gastrogenitalmembran gewisser Rhizostomen z. B. bei *Crambessa Tagi* Haeckel (s. Abbildung Fig. VIII [Taf. V]. Mgg in der Abhandlung von Grenacher und Noll.[7]) Wir hätten darnach in diesen Streifen Reste der Gonaden oder Geschlechtsdrüsen zu erblicken. Doch wollen wir uns hier, ohne die letztere Ansicht bestimmter zu vertreten, nur darauf beschränken auf die Aehnlichkeit jener Zeichnung mit den erwähnten Organen hinzuweisen.

Lager und Fundort der Versteinerung: Plattenkalk der Solenhofener Schichten. Steinbruch von Pfahlspeunt bei Eichstädt in Mittelfranken. Aufbewahrung: Sammlung des paläontologischen Museums in München.

---

7) H. Grenacher und F. C. Noll. Beiträge zur Anatomie und Systematik der Rhizostomeen. Mit 8 Tafeln. Abhandlungen der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft. X. Bd. Frankfurt 1876. S. 119—179.

Rhizostomites lithographicus Haeckel. (Mundstück.)

Taf. II, Fig. I. Taf. IV, Fig. III.

Das vorliegende Stück, welches sich durch besonders gute Erhaltung der Mundregion (Armscheibe) auszeichnet, befindet sich schon seit einiger Zeit im Besitze des paläontologischen Museums in München. Herr Prof. und Conservator Zittel hatte die Güte, mir dasselbe zur Beschreibung zu überlassen. Es sei mir gestattet, an dieser Stelle meinen ergebensten Dank Herrn Professor Zittel auszudrücken. Der Stein, der das Fossil trägt, besitzt die Form einer nahezu quadratischen Platte, dessen Seiten ungefähr einen Decimeter messen. Die Oberfläche derselben ist bis auf die schmalen Ränder und die Ecken mässig gewölbt und wird fast ganz allein vom Abdruck der Arm- oder Mundscheibe eines Rhizost. lithographicus eingenommen.

Von der Mitte strahlen die vier perradialen primären Schenkel (a^1) des Mundnahtkreuzes aus. Ihre Furchen sind ziemlich tief eingeschnitten, nehmen einen leicht welligen Verlauf und sind (wenigstens die der einen Seite) mit kurzen krausen Anhängen besetzt. Die vier Nähte (primäre Schenkel a^1) des Furchenkreuzes, unter rechtem Winkel zu einander stehend, treffen übrigens in der Mitte nicht in einem einzigen Punkt zusammen, sondern nehmen von den Ecken eines kleinen rhombischen Feldchens (aa) ihren Ausgang. Dasselbe misst in der längeren Diagonale 4 mm, in der kürzeren 3 mm; seine kürzeren Seiten sind 2 mm, die beiden anderen 3 mm lang. Das rhombische Mittelfeldchen kann als der Rest eines offenen Mundes angesehen werden. Die vier primären Furchen (a) spalten sich in einer Entfernung von circa 8 mm von den Ecken des rhombischen Feldchens. Die durch die Theilung entstandenen sekundären Schenkel (a^2) des Mundnahtkreuzes, die Armnähte, sind gleichfalls scharf eingeschnittene Furchen. Sie beschreiben einen leichten Bogen nach auswärts (von den perradialen Mittellinien aus gedacht), sind etwas wellig gewunden und mit seitlichen spitzen Ausläufern und Auszackungen, die sich auf den Feldern verflachen, versehen. Es waren daher die vorstehenden Nähte mit krausen Anhängseln besetzt. Gegen den Rand der Scheibe hin hört der deutliche Verlauf der Nähte auf. An einigen Stellen scheinen sie sich hier noch zu vergabeln (y). Die Länge der sekundären Schenkel kann auf ungefähr 30 mm geschätzt werden.

Die vier in der Verlängerung der Hauptfurchen liegenden perradialen Felder, die sogen. concav-gleichschenkeligen Dreiecke, welche die Figur eines Ordenssternes zusammensetzen, entsprechen sich in ihrer Ausbildung vollkommen, wie auch andrerseits die dazwischen befindlichen vier interradialen Felder einen einheitlichen Charakter tragen. Die Breite der perradialen Felder (dp) beträgt in ihrem unteren Theile 33 mm, die der interradialen 22 mm. Während die letzteren ganz glatt sind, zeigen die concav-gleichschenkeligen Dreiecke eine unebene Oberflächenbeschaffenheit. Ihr oberster, an der Spitze gelegener Theil ist etwas eingesenkt, höckerig und uneben. Wirre Streifchen und warzige Erhebungen, die mit schwachen Auszackungen gegen die interradialen Felder hin verbunden sind, treten in den spitzen Ecken auf, so dass man vermuthen darf, dass an diesen Stellen starke Krausenbüschel (Saugkrausen x) an den Mundnähten standen. Mit Ausnahme der eingesenkten Spitze wölbt sich der obere Theil der Dreiecke ziemlich stark hervor. Nach ersterer zu dachen sich die Wülste allmählich ab, nach auswärts fallen sie dagegen ziemlich rasch ab. Diess ist ungefähr oberhalb der Mitte der Dreiecke der Fall, wo sich zugleich die höchsten Theile der Versteinerung befinden. Die äussere Begränzung der Wülste geht mit der peripherischen Grundlinie der Felder parallel, zeigt jedoch in der Mitte einen schwachen Sinus. Im unteren peripherischen Theil der Felder sind concentrische Furchen vorhanden, von welchen einige etwas schärfer ausgebildet sind und ihren Rand wulstartig hervorspringen lassen. Die peripherische Gränze der Dreiecke ist nicht in bestimmter Weise ausgeprägt. Etwa 40 mm vom Mittelpunkt entfernt, hört die gewölbte Parthie der Platte auf und hier mag ungefähr die concentrische Grundlinie der perradialen Felder zu suchen sein. Darüber hinaus sind noch einige Furchen und Streifen auf dem flachen Theile der Platte (in den Ecken derselben) zu sehen. Diese Parthien entsprechen der Region der Pfeiler und dürften vielleicht die Abdrücke derselben darstellen (p).

Die vier interradialen Felder (di), die convex-gleichschenkeligen Dreiecke, treten nicht so stark wie die perradialen im Relief hervor. Ihre Oberfläche ist mit Ausnahme einiger undeutlicher Furchen ganz glatt und gleichmässig gewölbt. In ihrem mittleren und unteren Theile sind sie von den sekundären Furchen begränzt, welche sich etwas nach einwärts

biegen. In ihrem oberen Theile spitzen sich die Felder zu und stossen, durch das primäre Furchenkreuz von einander geschieden, in der Mitte zusammen. Sie berühren sich im Centrum jedoch nicht in einem Punkte, sondern enden an den Seiten des rhombischen Mittelfeldchens. Da das letztere aus je einem Paar kürzerer und längerer Seiten besteht, sind auch die centralen Theile aller vier Interradialfelder nicht völlig gleich gestaltet, sondern bei dem einen der gegenüberliegenden Paare (di II) ist die Spitze stärker, bei dem anderen (di I) weniger stark abgeschnitten. Es ist in diesem Verhalten streng genommen eine kleine Abweichung von der Regulärstruktur und andrerseits eine Hinneigung zur sogen. bilateralen Symmetrie gegeben. Haeckel[8]) bezeichnet diese Ausbildung des Mundnahtkreuzes, welche sich auch bei manchen lebenden Rhizostomen findet, als die amphitecte Form desselben, ohne ihr eine besondere morphologische Bedeutung beizumessen.

Im unteren Theile der interradialen Felder sind mehr oder weniger deutliche kalkige Auflagerungen (v) bemerkbar, welche wohl als die Reste von Kalkschlammmasse aufzufassen sind, die in die Subgenitalhöhlen eingedrungen ist. In unregelmässiger Weise breiten sich dieselben vor den grösseren Feldern aus (v); weitere kalkige Auflagerungen (K), die sich schwer von der übrigen Fläche des Abdruckes abheben, bedecken die peripherische Gränze der beiden Dreiecksfelder. An dem unteren Interradialfeld springt vom Rande her ein breites stumpfwinkeliges Dreieck (v_1) vor, das wohl auch nur als eine solche kalkige Auflagerung, entstanden durch theilweise Ausfüllung einer Subgenitalhöhle mit Kalkschlamm, betrachtet werden darf. Die Kalksteinmasse, welche es gebildet hat, ist grösstentheils weggebrochen; sein oberer Rand ist aber noch deutlich durch eine stumpfwinkelige Linie markirt. Eine andere Auffassung wäre die, das Gebilde mit der Subgenitalklappe in Beziehung zu bringen, doch scheint mir dieselbe weniger wahrscheinlich zu sein.

Fundort und Lager sind die gleichen wie beim vorigen Exemplar.

---

8) System der Medusen p. 581.

Rhizostomites admirandus Haeckel.

Taf. II, Fig. II.

Das dritte Stück einer versteinerten Meduse, welches hier zur Beschreibung kommen soll, darf gleichfalls zu einem der besterhaltenen Fossilreste dieser Thierklasse gerechnet werden. Es befindet sich das Exemplar auf einer nahezu rechteckigen Steinplatte, deren längere Seite unten 29 cm, deren kürzere im Mittel 20 cm beträgt.

Der grösste Theil der Fläche des Rechteckes wird von dem Medusenabdruck eingenommen, welcher sich bis an die Ränder der Platte erstreckt. Nur die obere linke Ecke des Steines (auf der Tafel durch die andere Photographie ausgefüllt) ist frei geblieben. An dem benachbarten Theile des Fossiles ist ein grösseres Stück der Randzone herausgebrochen. An der unteren Seite reicht noch das Mittelstück der Scheibe bis zum Rand der Platte heran, so dass hier ein grösseres Segment des Medusenschirmes durch einen Abbruch des Steines abgeschnitten ist. Der Quere nach ist der Stein von einem Sprunge durchsetzt, welcher noch das Mittelfeld in seiner randlichen Parthie betroffen hat.

Der Medusenschirm zeigt sich nach der einen Seite hin, der rechten, zusammengedrückt, indem das Mittelfeld nach dieser Richtung hin verschoben ist. Nach der linken und oberen Seite hin hat sich die Scheibe auf ihrer subumbrellaren Fläche ausgebreitet und so einen wohl erhaltenen Abdruck bewirkt. Der Radius des Schirmes misst an der besser erhaltenen Seite 15 bis 16 cm. Man kann sonach den Durchmesser der Meduse auf 3 Decimeter veranschlagen.

Wie beim Rhizostomites lithographicus können wir am vorliegenden Abdruck ein Mittelfeld und mehrere concentrische Ringfelder unterscheiden und zwar am besten in derselben Art und Weise, wie es zuerst Ernst Haeckel an dem von ihm untersuchten Exemplar von Rhizost. admirandus durchgeführt hat. Nur für eine der von ihm aufgestellten Zonen, für den viergetheilten Ring mit den vier Sichelwülsten, welche den Geschlechtsorganen entsprechen sollen, konnte ich an dem neuen Stücke kein analoges Feld auffinden.

Das Mittelfeld (AS), eine gleichmässig gewölbte, oben etwas abgeflachte Kuppel darstellend, ragt am stärksten von allen Theilen der

Versteinerung in die Höhe. Dasselbe ist umgeben von dem tiefen Ring (höckrigen Ring, HR), eine breit eingefurchte Zone, welche die tiefsten Stellen des Abdruckes enthält. An vier Stellen dieser Zone, interradial gelegen, heben sich sattelförmig die vier nierenförmigen Platten (n) hervor (die vierte untere fällt nicht mehr auf den Stein). Die nächste ziemlich breite Zone wird von dem glatten Ring (GR) eingenommen, auf welchen nach Aussen hin in gleichfalls beträchtlicher Breite die peripherische Randzone oder der gefurchte Ring (FR) folgt.

Das Mittelfeld, welches den Abdruck der oben flach ausgehöhlten Arm- oder Mundscheibe darstellt, besitzt im Ganzen die Gestalt einer gleichmässig gewölbten, oben abgeflachten breiten Kuppel. Wie bereits erwähnt, bildet es die erhabenste Parthie im Relief der Stein-Platte. Nimmt man eine an der Basis der perradialen Felder befindliche Furche (p) als Gränzlinie an, so beläuft sich der Durchmesser des Mittelfeldes auf 110 mm. Im Grossen und Ganzen besitzt das Mittelstück die nämliche Ausbildung wie bei den bisher besprochenen zwei Stücken. Insbesondere ist der Verlauf der Mundkreuznaht, der *Sutura staurostomalis,* die Anzahl und Vergabelung ihrer Furchen und die Anordnung der einzelnen die Mundscheibe, den *Stomodiscus,* zusammensetzenden Felder ganz die gleiche. Nur zeichnet sich in diesem Falle das Mittelfeld vor den übrigen Exemplaren dadurch aus, dass alle acht Felder desselben in gleichartiger Weise eine glatte Oberflächenbeschaffenheit besitzen. Es treten weder wulstförmige Erhebungen in den Feldern auf noch sind einigermassen deutliche concentrische Furchen vorhanden. Die Oberfläche des gesammten Mittelstückes ist hier gleichartig gewölbt und zwar im unteren Theil der Kuppel ziemlich stark, im oberen flacher.

Im Centrum befindet sich das rhombische Mittelfeldchen, von welchem nur eine, die linke längere Seite deutlich ausgeprägt ist. Ihre Länge beträgt etwas über 3 mm. Die kürzere Seite mag 2 mm halten. Von den Ecken des Feldchens strahlen die vier Haupt- (primären) Furchen des Mundnahtkreuzes aus, die rechtwinkelig zu einander stehen und eine Länge von 9—12 mm bis zur Spaltung in die Sekundärfurchen besitzen. Die acht sekundären Furchen nehmen einen leicht wellig gebogenen Verlauf und lassen sich auf eine Strecke von 40 mm verfolgen. Ihr unterster Theil ist zumeist durch Auflagerungen

verdeckt. Haupt- wie Nebenfurchen sind scharf eingerissen und seitlich mit einzelnen zackigen kleinen Ausbuchtungen versehen. Die Breite der perradialen Felder (dp) beträgt an ihrer Basis 40—45 mm, die der interradialen (di) an ihren mittleren Theilen 25 mm.

Die sekundären Furchen, welche auf den beiden beschriebenen Stücken von Rh. lithographicus und bei dem grösseren Exemplar von Rhizostomites admirandus der Dresdner Sammlung einen nach auswärts gerichteten (von den perradialen Richtungslinien aus gedacht) schwachen Bogen beschreiben, zeigen dieses Merkmal am vorliegenden Abdruck weniger deutlich; ja einzelne derselben (nicht alle) wenden sich sogar nach der entgegengesetzten Seite. So wird zum Beispiel das linke untere Interradialfeld, zu welchem sie sich convergirend stellen sollten, von Furchen begränzt, die deutlich im Bogen nach auswärts laufen. Es passt daher streng genommen die Bezeichnung „concav-gleichschenkelige Dreiecke" nicht mehr genau auf die perradialen Felder, ebenso die der convex-gleichschenkeligen auf die interradialen. Ein besonderes Gewicht ist übrigens auf dieses Verhalten, ob die Schenkel der sekundären Furchen divergirend oder convergirend gestellt sind, nicht zu legen. Es scheint rein individueller Natur zu sein. Andere Beispiele mit divergirenden Schenkeln geben das Dresdner Exemplar von *Rhizostomites lithographicus* und der kleinere daselbst aufbewahrte *Rhizost. admirandus* (Brandt, loc. cit. S. 11).

An der Basis der interradialen Felder gelegen, aber schon zur Region des tiefen Ringes gehörig und aus dieser Zone breit sattelförmig sich hervorhebend fallen vor Allem die nierenförmigen Platten (n) auf. Von diesen sind drei mit vorgelagertem, breitem Randsaum erhalten. Die Lage der vierten (unteren) Platte fällt bereits in den weggebrochenen Theil. Die linke Platte ist 30 mm lang und 20 mm breit, die obere ungefähr gleich lang und 14 mm breit. Die rechte zeigt die grösste Längenausdehnung (fast 40 mm) bei geringstem Breitendurchmesser (13 mm). Die Form der Platten bildet im Allgemeinen ein der Quere nach verlängertes Oval, dessen vordere, innere Seite etwas stärker gebogen ist, als die gegenüberstehende. Die Oberfläche der Platten ist ungefähr in ihrer Mitte am stärksten gewölbt, nach Innen und auch nach Aussen senkt sich die Wölbung allmählich, stärker und ziemlich rasch fällt sie dagegen nach

den seitlichen Enden ab. In der Nähe des axialen Randes der linken Platte glaubt man bei genauerer Besichtigung eine feine Linie zu sehen, welche in der Mitte eine kleine Bucht, die nach dem Plattencentrum gerichtet ist, besitzt. Vor den Platten dehnen sich auf dem unteren Theile der Interradialfelder kalkige Auflagerungen (v) aus, welche einen flachen bis zu 10 und 12 mm breiten Rand um die Platten bilden. Ihre Begränzung ist eine unregelmässige. Sie erstrecken sich auch auf die Ecken der tiefen Zone seitwärts der Platten, dort die von den Radiärcanälen und den Armnähten herrührenden Furchen bedeckend. An der oberen Platte ist der vorgelagerte breite Kalkrand durch Beschädigung des Steines zum grössten Theile abgebrochen. Die kalkigen Auflagerungen besitzen eine etwas unebene, höckerige Oberfläche. Die zwischen den sattelförmig vorgewölbten nierenförmigen Platten befindlichen Theile des tiefen Ringes (HR) zeigen keine weiteren Details. Zum Theil sind diese Parthien durch die seitlichen Ausläufer der breiten Randvorlagerungen der Platten bedeckt. Unterhalb derselben ziehen sich die Furchen durch, welche von der centralen Scheibe ausstrahlen (besonders deutlich neben der linken Platte zu sehen, wo gleichfalls ein Stück der Auflagerung herausgebrochen ist). Diese Furchen (f) setzen sich nach Aussen fort theils in ziemlich gerader Linie, theils in winkelig gebrochener (links neben der oberen Platte) und bleiben als deutlich eingefurchte Striche bestehen, bis sie jenen eigenthümlichen Wall (w) erreicht haben, der in der glatten Zone auftritt. Von da ab sind radiale Streifen, den Radiärgefässen entsprechend, wohl auch noch zu erkennen, sie sind aber nicht mehr als Furchen ausgebildet, sondern treten in der äusseren Zone des glatten Ringfeldes als breite, flache, schwach erhabene Strahlen auf. Die Gränze gegen den glatten Ring ist schwer zu bestimmen. Vor den interradialen Feldern ist dieselbe nahe dem äusseren Rande der Platten zu suchen, vor den perradialen Feldern mag sie durch eine Linie bezeichnet werden, welche zwischen dem Wall (w) und der Basalfurche der letzteren liegt und mit beiden ungefähr parallel läuft. In dieser Region lässt sich wenigstens in den besser erhaltenen Theilen der Versteinerung eine schwache Vertiefung erkennen. Dass der tiefe Ring dem höckerigen Ring beim *Rhizostomites lithographicus* entspricht, steht ausser allem Zweifel, es besitzt auch die Fläche desselben unterhalb der erwähnten Gränzlinie

eine etwas rauhe Beschaffenheit, welche an jene des höckerigen Feldes erinnert. Auf der rechten Hälfte des Abdruckes ist die ganze Zone, die ovale Platte ausgenommen, verdrückt oder nur angedeutet; aber auch auf der linken Seite ist der tiefe Ring stark zusammengeschoben, so dass dadurch die nierenförmigen Körper fast auf die Fläche der interradialen Felder zu liegen kamen. Die letzteren, die sattelartig vorspringenden nierenförmigen Platten, möchten wir auch hier als die Abdrücke der Subgenitalklappen betrachten; die ihnen vorgelagerten breiten Kalkstreifen mit den unregelmässigen Contouren dürften als die Rückstände der in die Subgenitalhöhlen eingedrungenen schlammigen Kalkmasse aufzufassen sein. An der Basis der perradialen Felder liegen diejenigen Regionen, wo die breiten Pfeiler auf dem Boden ruhten. Nach Zerstörung ihrer Gallertsubstanz drang dann von den benachbarten Subgenitalhöhlungen der Kalkschlamm seitwärts vor und bewirkte die Auflagerungen in den Ecken neben den Platten. Von diesen Stellen aus haben sich nach unten die Arme abgezweigt, von welchen keine erkennbaren Reste erhalten geblieben sind.

Der glatte Ring, das zweite concentrische Ringfeld, liegt als breite glatte Fläche zwischen dem tiefen und dem gefurchten Ring. In seinem inneren Theile befindet sich der bereits erwähnte Ringwall, von dem aus die Fläche nach beiden Seiten hin abfällt. Nach Aussen ist der Abfall ein langsamer und allmähliger, nach Innen zu ein ziemlich starker. Die Gränze gegen den tiefen Ring (nur in der linken Hälfte des Abdruckes erkennbar) kann durch die oben aufgeführte, schwache concentrische Furche bezeichnet werden, die ungefähr in der Mitte der von dem Wall zur Basis der perradialen Felder (dem tiefsten Theil des Abdruckes, p) geneigten Fläche läuft. Von dieser Linie bis zum peripherischen Rand der Zone sind es 45 mm. Die ganze Entfernung vom Rande derselben bis zur Grundlinie der perradialen Felder (p) beträgt 55 mm (linke Seite der Figur). An andern Stellen ist die Breite der Zone eine geringere. So misst sie im oberen Theil des Abdruckes von der äusseren Linie der ovalen Platte bis zum peripherischen Rande nur 38 mm.

Die wallartige Erhöhung (w der Ringwall) tritt als flache concentrische Kammlinie auf. Sie bildet übrigens keinen förmlichen Kreis, sondern ist mehrmals winkelig gebrochen. Zwischen den einzelnen eckig

vorspringenden Parthien senkt sich die Linie etwas nach einwärts. Im Ganzen mag sie wohl die Gestalt eines abgerundeten Sechzehneckes besessen haben. Die Stärke der Walllinie ist nicht überall dieselbe, an den Stellen, wo sie von Kanälen durchsetzt wird, ist eine leichte Unterbrechung wahrzunehmen. Von den Radiärkanälen liegen zwei adradial und lassen sich auf der nach dem Mittelfeld zu geneigten Fläche deutlich verfolgen. In schwächerer Weise ist ein perradialer Kanal (cp) angedeutet, der auf der abschüssigen Fläche selbst nicht, wohl aber durch eine schwache Erhöhung auf dem breiten Theile der glatten Zone und Unterbrechung der Muskelstreifen auf der in diesem Strahle gelegenen Parthie der Randzone sich bemerkbar macht. Der Wall ist nur im linken Theile des Abdruckes deutlich zu erkennen. Seitlich oberhalb der oberen nierenförmigen Platte hört sein Contour auf. Im rechten Theile der Versteinerung, wo starke Verschiebungen und Verdrückungen stattgefunden haben, kann sein Nachweis weniger sicher erbracht werden. Hier sieht man, am Sprung beginnend und an das benachbarte perradiale Feld hin gequetscht, einen Wulst, welcher neben der rechten ovalen Platte ein scharf nach auswärts gezogenes Eck bildet und dann in schwächerer Weise seitlich an derselben vorbei zieht. Der genannte Wulst scheint die Fortsetzung des Walles in diesem Theile des Abdruckes zu sein. Sein weiterer Verlauf ist durch einen erhöhten Streifen vertreten, welcher in der unteren Ecke des Steines sich vorfindet und in einer Entfernung von etwa 18 mm von der Grundlinie des perradialen Dreieckes mit dieser parallel läuft. Nach einwärts dacht sich von diesem Streifen an die Fläche ab (wie auf der gegenüber liegenden Seite), nach auswärts treten auf dem ebenen Felde schräg gestellte Muskelstreifen auf, die soweit anhalten als der Abdruck reicht (bis nahe vor dem Rande des Steines). Es war an diesem Theile offenbar der Rand des Schirmes umgeschlagen und hat so auf der glatten Zone die Eindrücke der Muskelreifen des peripherischen Ringes hervorgebracht.

In der äusseren Region der glatten Zone ist die Gesteinsoberfläche ziemlich rauh. Ausserdem sind ganz schwache concentrische Streifen zu erkennen, welche mit Muskelringen verglichen werden können. Die Radiärkanäle lassen sich in diesem Theile der Zone deutlich nachweisen. Sie bilden breite, flache, wenig hervortretende Strahlen. Es

können perradiale, interradiale und adradiale Gefässe unterschieden werden. Ein interradialer Kanal z. B. ist durch die Linie bestimmt, welche von der Mitte der oberen Platte nach ci hinläuft. Die Richtungen der Strahlen treten bei der gewählten, im Uebrigen für das Stück günstigen Beleuchtung auf der Photographie nicht deutlich hervor, sind jedoch am Original, namentlich wenn man dasselbe etwas schief hält, in aller Schärfe und Deutlichkeit zu sehen. Die äussere Gränze der glatten Zone bildet, soweit das Stück gut erhalten, eine Kreislinie. Diese Region ist am Abdruck scharf markirt, da der äussere Theil des glatten Ringfeldes beträchtlich tiefer (mehrere Millimeter) als die Fläche des peripherischen Ringes liegt, welcher sich mit steilem Abfall nach innen breit wallartig aus der Ebene erhebt. An der Gränze beider Zonen wird wohl die Lage des peripherischen Ringkanales (cc) anzunehmen sein, für welchen sonst weiter keine Andeutungen gegeben sind.

Die Breite des gefurchten Ringes (FR) beträgt im Durchschnitt etwas über 40 mm. Rechts oben ist die Randzone zusammengedrückt (32 mm breit), in der rechten unteren Ecke der Figur verschoben und umgeschlagen. Die Fläche des peripherischen Ringfeldes ist im allgemeinen eben; gegen die Peripherie zu senkt sie sich etwas. An ihrem inneren Rande fällt die Zone steil gegen den glatten Ring ab. Wie am Rhizostomites lithographicus kann auch hier auf der inneren Region der Zone eine in Wellenlinien laufende Furche konstatirt werden. Die innerhalb dieser bald feinen bald gröberen Linie gelegenen inneren Randtheile des Feldes sind ganz glatt, der übrige breite Theil ist mit concentrischen Furchen und Streifen bedeckt, welche die Ringmuskelfasern der Subumbrella darstellen. Die concentrischen Rippen sind niedrig und in der Mitte mit einer scharfen Kante versehen (im Querschnitt daher dreieckig), sie können eine Breite bis zu 2 mm erreichen. Die breitesten Ringwülste finden sich in der Mitte der Zone vor, am äusseren Rande sind sie sehr fein oder verschwinden ganz. In der unteren Ecke des Abdruckes stehen die Muskelstreifen, die hier ziemlich verwischt sind, nicht concentrisch sondern schief, da an dieser Stelle der betreffende Theil der Subumbrella verschoben, beziehungsweise umgeschlagen, war. Als Verlängerungen der auf dem glatten Ring sichtbaren radiären Strahlen machen sich auf dieser Zone ganz schwache glatte radiale Furchen oder

Unterbrechungen der concentrischen Wülste bemerkbar. Es sind offenbar die Eindrücke der Radiärkanäle, von welchen perradiale und interradiale leicht unterschieden werden können. Die Richtungen der adradialen Strahlen lassen sich auf dem gefurchten Ring kaum nachweisen. Eine der interradialen Furchen (ci) liegt ganz nahe dem Unterrande (s. Figur), eine zweite (oben in der Mitte) ist etwas seitlich verschoben (ci—o). Die Furche eines perradialen Kanales (cp) ist auf der linken Seite, nächst dem herausgebrochenen Theile, angedeutet.

An der Peripherie der Randzone sind schwache, aber ziemlich breite (4—5 mm) Randlappen erkennbar, so dass der Schirmrand in einer zierlichen Wellenlinie verläuft. Die Lappen sind nur an den besser erhaltenen Stellen deutlich zu sehen. Ihre Form und Anordnung erinnert an die beim *Hexarhizites insignis* Haeckel. Wahrscheinlich waren ausserdem noch grössere lappige Ausbuchtungen (vier oder acht) am Schirmrande vorhanden. Unser Exemplar gibt darüber keinen näheren Aufschluss.

An einer Stelle am Rande ist eine deutliche Einbuchtung (o) sichtbar, welche am Ende eines der interradialen Kanäle liegt. Die Richtung des Interradialkanales ist etwas nach links verschoben. In diesem Randeinschnitt befand sich jedenfalls ein Sinneskolben oder ein Randkörper. Von der randlichen Einbuchtung aus zieht sich eine breite, seichte Vertiefung in der gefurchten Zone nach aufwärts. Bei genauerer Betrachtung glaubt man sogar auf der vertieften Fläche verästelte Furchen und Streifchen wahrnehmen zu können (auf dem Bilde nicht zum Ausdruck gekommen). Möglicherweise könnten dieselben ein Analogon zu den „baumartigen Furchen" Grenacher und Noll's[9]) abgeben, welche sich in den oberhalb der eigentlichen Sinnesorgane befindlichen dreieckigen Gruben ausbreiten (bei *Crambessa*). Solcher Sinneskörper (*Rhopalien*) mögen acht (vier perradiale und vier interradiale) an unserer Meduse vorhanden gewesen sein.

Lager und Fundort: Steinbruch im Plattenkalk (Solenhofener Schichten) bei Pfahlspeunt.

Aufbewahrung: Geognostische Sammlung des kgl. Oberbergamtes in München.

---

9) Grenacher und Noll loc. citat. pag. 132. Tab. II.

Vergleich mit den bereits bekannten Formen.

Allgemeine Stellung: Wie schon Eingangs erwähnt, sind mit unseren Stücken völlig analoge Formen zuerst von E. Haeckel als *Rhizostomites admirandus* und *Rh. lithographicus* beschrieben worden. Von denselben Exemplaren (3 Individuen auf zwei Platten) hat später Brandt noch einmal eine Beschreibung und Abbildung gegeben. Die beiden Autoren stellen die Reste zu den *Rhizostomiden*, welcher Ansicht auch Zittel in seinem Lehrbuch der Paläontologie beigetreten ist.

Ohne Zweifel gehören die jurassischen Medusen von dem vorliegenden Typus zu den acraspeden oder höheren Medusen, den Lappenquallen, welche sich bekanntlich durch den gelappten Schirmrand (und den Besitz von Gastralfilamenten) von den tiefer stehenden *craspedoten* Medusen (ohne Lappen am Schirmrand, dagegen mit einem Randsaum, *velum*, versehen) unterscheiden, und unter den Acraspeden zu den durch einen flach gewölbten, scheibenförmigen Schirm charakterisirten Discomedusen Haeckel oder den Scheibenquallen *(Discophoren* Agassiz). Innerhalb dieser Ordnung zeichnet sich eine Gruppe, die Rhizostomae oder wurzelmündigen Scheibenquallen, dadurch aus, dass ein eigentliches Mundrohr, ein offener Centralmund, fehlt. Dasselbe ist durch acht wurzelförmige Mundarme, an denen kleine Saugmündchen stehen, vertreten. Ferner mangeln den Medusen dieser Gruppe fadenförmige Anhänge am Schirmrande, die Randtentakeln.

Dass die Eichstädter Exemplare zu den *Rhizostomen* gehören, scheint mir durch folgende Punkte erwiesen zu sein:

1. Eine grössere Mundöffnung fehlt diesen fossilen Medusen. Es sind dafür auf der oralen Seite wie bei den lebenden Rhizostomen Nähte vorhanden, welche als die Reste des Mundes anzusehen sind. Die Anordnung dieser Mundnähte, überhaupt die ganze Ausbildung des mittleren Theiles (der Mundscheibe) der Versteinerungen ist die nämliche wie sie sich bei recenten Rhizostomen findet. Man vergleiche zu dem Zweck die mittlere Parthie der Stücke mit der Figur II unserer Tafel IV, welche Abbildung die orale Seite der Mundscheibe einer australischen Art, *Thysanostoma thysanura* Haeckel (Taf. IV Fig. I), darstellt oder mit den Zeichnungen

Brandt's[10]) von der Mundregion des *Rhizostoma Cuvieri,* sowie mit den Figuren, welche Haeckel von vielen Arten aus der Rhizostomengruppe in seinem System der Medusen und Grenacher und Noll[11]) von *Crambessa Tagi* gibt. Sämmtliche Figuren stimmen in der Ausbildung dieser Parthie mit unseren Stücken überein.

2. Am Schirmrand der fossilen Formen ist der Mangel jeglicher fadenförmiger Fortsätze von Bedeutung. Randfäden, Tentakeln, fehlten also vollständig.

3. Für die Zutheilung zu den Rhizostomen sprechen ferner noch die deutlich erhaltenen Muskelstreifen und die gute Conservirung der Abdrücke überhaupt. „Bei den meisten Rhizostomen ist nämlich der Schirm durch bedeutende Festigkeit und Dichtigkeit ausgezeichnet, manchen Knorpel-Arten gleich" Haeckel.[12]) „Eine solche Rigidität der Muskulatur tritt in dieser Festigkeit allein nur bei den Rhizostomen auf" Claus.[13])

Unterscheidung der beiden Arten. Es hält ziemlich schwer für die zwei von Haeckel aufgestellten Arten unterscheidende Merkmale aufzuführen. Es besitzen offenbar beide Formen die grösste Verwandtschaft zu einander. Wir möchten daher auf die Trennung in zwei Species kein besonderes Gewicht legen. Darauf hat schon Brandt hingewiesen und auch Haeckel hat in einer späteren Arbeit[14]) die Ansicht geäussert, dass *Rhizostomites lithographicus* vielleicht nur ein jugendliches Exemplar von *Rh. admirandus* sein könnte. Gleichwohl dürfte es sich empfehlen, so lange noch keine vermittelnde Uebergänge aufgefunden sind, beide Arten gesondert zu halten. Wir können auch ohne besonderen Zwang die Pfahlspeunter Stücke je einer der beiden Häckel'schen Arten einreihen. Das grössere Exemplar stimmt im Allgemeinen gut

---

10) A. Brandt: Ueber *Rhizostoma Cuvieri.* Mémoires de l'académie impér. des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. Tome XVI. Nr. 6. 1870. Taf. Fig. 8.

11) Grenacher und Noll. loc. cit. taf. VII fig. XV a.

12) System der Medusen. p. 455.

13) C. Claus. Studien über Polypen und Quallen der Adria. I *Acalepha* (Discomedusae) 1877. Denkschriften der k. k. Akademie der Wissenschaften. Naturwissenschaftl. Classe. 38 Bd. Wien 1878.

14) E. Haeckel. Ueber die fossilen Medusen der Jurazeit. Zeitschrift für wissenschaftl. Zool. XIX. Leipzig 1879.

mit *Rh. admirandus*. Die Dimensionen sind zwar etwas verschieden. Der Durchmesser des neuen Abdruckes beträgt circa 300, der vom Originalexemplar 400 mm. Sonst aber sind durchweg an beiden Stücken analoge Verhältnisse zu beobachten. Ein einigermassen in die Augen fallender Unterschied liegt nur in der Beschaffenheit des äusseren Randes. Beim Dresdner Exemplar ist der Rand mit lappigen Auszackungen versehen, zwischen welchen radiale Furchen sich befinden, die eine Strecke weit (22 mm, nach Brandt gar 25 mm) in den gefurchten Ring hereinreichen. An unserem Abdrucke sind wohl auch deutliche Lappen vorhanden, doch bleiben dieselben auf den äussersten Rand beschränkt und lassen sich von da centralwärts keine Einschnitte verfolgen. Doch dürfte auf diese Verschiedenheit kein Nachdruck zu legen sein, da gerade die Randparthie an unserem Stück den wenigst gut erhaltenen Theil desselben ausmacht. Ganz unbedenklich möchten wir dagegen den Medusenabdruck, welchen Haeckel und Brandt als *Rhizostomites lithographicus* abbilden, zu der gleichen Art ziehen, zu welcher dasjenige Exemplar gehört, dem wir die Tafel I und III gewidmet haben. Auch die Grössenverhältnisse stimmen hier nahezu überein. Um ein Weniges ist das Münchener Exemplar grösser als das Dresdener. Die vielen scharfen radialen Furchen am Rande, wie sie Haeckel in seiner Abbildung vorführt, fehlen in dieser Ausbildung unserem Stücke; doch sind dieselben ohne Zweifel schematisch in das Bild eingetragen, da sie im Texte selbst (loc. cit. 285) nur als ganz schwache Kerben bezeichnet werden. Brandt lässt sie in seiner Figur ganz weg, da er der Ansicht ist, dass der äusserste Theil der gefurchten Zone am Petrefakte abgebrochen sei. Dagegen zeichnet er Randfurchen an einer kleinen Strecke der Peripherie ein, wo er den Rand für umgeschlagen hält, und zwar merkwürdiger Weise an einer Stelle, wo Haeckel nichts von solchen bemerken konnte.

Auf Grund unserer Beobachtungen glauben wir, dass bei den genannten Arten folgende Unterscheidungsmerkmale als bestehend angenommen werden können. Bei *Rhizostomites admirandus* ist der gefurchte Ring um ein Beträchtliches breiter. Diess betont schon Haeckel. Sein Verhältniss zum Schirmradius ist nach ihm bei diesem 1 : 2 $^{6}/_{7}$, bei *Rh. lithographicus* 1 : 4 $^{1}/_{2}$ (loc. cit. p. 285). Nach unseren Messungen verhält sich die Breite der gefurchten Zone zum Radius des Schirmes beim *Rh.*

admirandus ungefähr wie 1 : 3, beim *Rh. lithographicus* wie 1 : 5. Ausserdem sind beim ersteren auf der Randzone die Ringwülste in grösserer Menge vorhanden und auf dieser gleichmässig vertheilt, während bei *Rh. lithographicus* ihre Zahl eine geringere ist und dieselben nur auf die vordere, äussere Region der Zone beschränkt sind. Die unmittelbar über dem Lappenkranz befindlichen Wülste sind hier noch scharf ausgeprägt, während bei *Rhiz. admirandus* die äussersten peripherischen Muskelstreifen nur mehr sehr schwach sich ausgebildet zeigen. Mit dem ersterwähnten Verhalten steht ferner im Einklange, dass die Region vom gefurchten Ring bis zum Mittelfeld, namentlich die glatte Zone, bei *Rhizost. lithographicus* eine grössere Breite besitzt als bei der andern Art. Die Mundnähte des *Rh. lithographicus* waren mit krausen Anhängen besetzt, die nach den verbreiterten Eindrücken auf den Stücken an manchen Stellen zu ganzen Büscheln gehäuft standen. Auf der Mundscheibe des *Rh. admirandus* lassen sich an den Nähten nur vereinzelte, schwache eckige Ausbuchtungen wahrnehmen, so dass daraus geschlossen werden kann. dass die Mundränder im Gegensatz zu *Rh. lithographicus* wenige und kurze franzige Anhängsel besessen haben mussten. Von den jurassischen Rhizostomiden ist im Allgemeinen *Rh. admirandus* die grössere, *Rh. lithographicus* die kleinere Form.

Hexarhizites insignis — eine sechszählige Form von *Rhiz. lithographicus*. Eine frappante Aehnlichkeit mit unseren neuen Stücken, speciell mit dem als *Rh. lithographicus* bezeichneten Exemplare hat ausserdem noch eine andere von Haeckel[15]) aus den gleichen Schichten beschriebene fossile Meduse — der *Hexarhizites insignis* (1874). Die Analogie mit unserem *Rh. lithographicus* ist eine so grosse, dass bis auf einen Punkt eine vollkommene Uebereinstimmung besteht. Der einzige Umstand, welcher einer Identificirung im Wege zu liegen scheint, ist der, dass diese Meduse ihre Organe nach der Sechszahl angeordnet besitzt. Diess war für Haeckel Grund genug, um die Form zu einer neuen Art und Gattung als Repräsentant einer besonderen Familie, der *Hexarhizistiden,* zu erheben. Im Uebrigen ist, um es noch einmal zu betonen, die Aehnlichkeit mit *Rh.*

15) Ueber eine sechszähl. foss. Rhizostomee. Jenaische Zeitschrift f. Naturw. 8. Bd. 1874. S. 308 ff. Mit einer Tafel.

lithographicus eine überraschende. Es sind nahezu die gleichen Grössenverhältnisse vorhanden. An der Peripherie des Schirmes sehen wir schwache Randlappen, ohne dass hievon sich Furchen nach einwärts ziehen. Der gefurchte Ring zeigt eine relativ geringe Breite und ist mit scharfen Muskelreifen bedeckt. Weitere Muskeleindrücke finden sich auf der sehr breiten glatten Zone vor. Auch der concentrische Ringwall, der sich so scharf innerhalb des glatten Feldes auf unserem Exemplare heraushebt, wird nicht vermisst (Furche h des Haeckel'schen Bildes). Am schwächsten ist die Zone des höckerigen Ring ausgebildet. Dennoch lässt sich eine völlige Analogie mit unseren Stücken nachweisen. Bei genauerer Betrachtung des Originalexemplares, welches im paläontologischen Museum in München sich befindet, hat sich ergeben, dass auch die nierenförmigen Platten dem Hexarhizites nicht fehlen. Sie sind hier vor die sechs Interradialfelder, an deren „Basis sie sich nach aussen convex vorwölben" (S. 320), gestellt und bilden napfförmig vertiefte Parthien, da die Versteinerung als Gegenabdruck (die Nähte erhaben und die Felder vertieft) erhalten ist. Haeckel führt sie als vorgewölbte Mittelpunkte der sechs dreieckigen Genitalhöhlen auf (loc. c. S. 320 und Tafelerklärung; f 1 bis f 6 der Tafel X). Nach auswärts und unten seitlich sind diese Genitalhöhlen undeutlich abgegränzt, nach innen ziehen sie sich in deutlichem Bogen-Contour mit ihrer abgerundeten Spitze eine Strecke weit in die Fläche der interradialen Felder (Genitalfelder Haeckel's) hinein. Diese zipfel- oder klappenartig vorspringenden Theile sind offenbar dieselben Gebilde, die wir als die den nierenförmigen Platten vorgelagerte Parthien, als kalkige Auflagerungen (v), bezeichnet haben. Sie sind in besserer Form an unserem *Rh. admirandus* ausgeprägt (v), sowie auch an dem kleineren Abdruck von *Rhizost. lithographicus* (v_1); dem Exemplare der Hauptplatte fehlen sie in dieser Form vollständig. Haeckel bezeichnete die Vorsprünge als Subgenitalklappen und glaubte sie mit einem an der lebenden *Crambessa Tagi* gefundenen Gallertstück, das er gleichfalls Subgenitalklappe benannte, identificiren zu müssen, worauf er wiederholt aufmerksam macht (l. c. 313, 317). Ein solcher Gallert-Wulst besteht aber in der von ihm angenommenen Form bei der genannten Meduse aus der Tajo-Mündung gar nicht, wie Haeckel später selbst zugegeben hat. Es fällt daher dieser Vergleich weg. Demgemäss wäre auch das restaurirte

Bild vom Hexarhizites dahin zu ergänzen, dass die eigentlichen Subgenitalklappen (unsere nierenförmigen Platten) weiter nach auswärts an den äussersten Rand der Interradialfelder zu liegen kämen. Als ein weiteres charakteristisches Merkmal für Hexarh. insignis wird von Haeckel hervorgehoben, dass diese Art nach der Anlage der Armnähte eine seitlich symmetrische Ausbildung (richtiger eine amphitekt-symmetrische Form) besitze. Ein ähnliches Verhalten in dem Verlaufe der Mundkreuznaht kann jedoch auch bei vielen lebenden Rhizostomen nachgewiesen werden, und selbst unsere fossilen Stücke zeigen, wenn auch in geringem Grade, eine Abweichung von der reinen Regulärstruktur. Mit Ausnahme der sechszähligen Anordnung stimmt die Ausbildung der Mundscheibe (Gestalt der einzelnen Felder, Verlauf der Nähte) gut mit derjenigen an unseren Exemplaren überein. Auch Ansätze von Krausenbildungen scheinen nicht zu fehlen. Das trapezoide Feldchen (a_2) in der Mitte, „möglicherweise der letzte, noch offene Rest der nicht vollständig verwachsenen Mundöffnung" Haeckel (318), entspricht unserem rhombischen Mittelfeldchen (Taf. II, Taf. IV, fig. III, aa).

Was nun die Sechszähligkeit betrifft, so möchte darauf für die systematische Auffassung weniger Gewicht zu legen sein, als es von Haeckel geschah. Es ist bekannt, dass bei den Medusen in der Zahl ihrer Organe häufig Anomalien auftreten. Darauf weisen mit Nachdruck mehrere Autoren hin. So namentlich Brandt[16]), Ehrenberg[17]), Nathorst[18]). Da nun in allen anderen Punkten mit den übrigen jurassischen Rhizostomen (vor Allem mit *Rhizost. lithographicus)* völlige Uebereinstimmung besteht, so dürfte es wohl als das Wahrscheinlichste anzunehmen sein, dass die als Hexarhizites insignis bezeichnete Medusen-Versteinerung nur eine individuelle Anomalie, nämlich die sechszählige Form,

---

16) „Numerische Anomalien an den Organen der Schirmquallen gehören im Ganzen keineswegs zu den Seltenheiten." Alex. Brandt. Ueber *Rhizostoma Cuvieri.* loc. cit. S. 18 Fussnote.

17) Unter hundert Individuen der in der Ostsee gemeinen *Medusa (Aurelia) aurita* fand Ehrenberg durchschnittlich bei zweien die Sechs- und bei je dreien die Drei- und Fünftheilung. C. G. Ehrenberg: Die Akalephen des rothen Meeres und der Organismus der Medusen der Ostsee. Vortrag in d. kgl. Akademie d. Wissensch. Berlin 1836. Auf seiner ersten Tafel bildet Ehrenberg in 5 Figuren eine sechstheilige *aurita* ab.

18) A. G. Nathorst. Om Aftryck af Medusor i Sveriges Kambriska Lager. (Kongl. Svenska Vetensk. Akad. Handlingar. Bandet 19 Nr. 1. Stockholm 1881. pag. 7, 8, 9.)

der oben genannten Art darstellt, von welcher vielleicht *Rhizostomites admirandus* auch nur eine besondere Form des Erhaltungszustandes oder des Altersstadiums vertritt.

Deutung der einzelnen Theile.

Wir haben bereits bei der Beschreibung der Stücke die wahrscheinlichste Deutung der einzelnen Theile kurz zu geben versucht. Einiges, worauf noch nicht specieller hingewiesen wurde, soll hier nachgetragen und zugleich von dem Gesammtbau der Medusen des vorliegenden Typus ein übersichtliches Bild entworfen werden.

Die sämmtlichen Stücke sind Abdrücke der Unterseite des Medusenschirmes. In dem kleineren Exemplar ist nur das Mittelstück, die Armscheibe, erhalten, die beiden anderen grossen Stücke lassen die ganze oder wenigstens den grössten Theil der inneren concaven Schirmseite, der Subumbrella, im Abdruck erkennen. Dem Vorgange Haeckel's folgend haben wir auf der kreisrunden subumbrellaren Fläche mehrere Zonen unterschieden, die das sich deutlich abhebende und durch eine kreuzförmige Zeichnung charakterisirte Mittelfeld von rundlichem Umriss in geringerer oder weiterer Entfernung concentrisch umgeben. Von Aussen nach Innen können diese Ringfelder hauptsächlich nach dem Beispiele des ebenerwähnten Autors am besten als gefurchte Randzone (FR), glatte Zone (GR) und höckerige oder vertiefte Zone (HR) bezeichnet werden.

Die erste, die Randzone, entspricht dem peripherischen Theil der Subumbrella der Scheibenquallen. Die concentrischen Ringwülste dieser Zone stellen die Muskelringe der unteren Schirmfläche dar; sie bilden den Kranzmuskel *(Musc. coronarius)*, der bei vielen Discomedusen als starker und öfters scharf abgesetzter Muskelring auf der Distalhälfte der Subumbrella in Gestalt hoher concentrischer Rippen oder Circular-Falten auftritt (Haeckel).[19]) Der Schirmrand besitzt eine grössere Zahl von Einbuchtungen und dazwischen gelegenen schwach vorspringenden Abschnitten, welche unbedenklich als Randlappen angesprochen werden können. Zwar unschwer nachzuweisen, aber weniger gut erhalten finden

19) System der Medusen. 456.

wir sie an unserem Rh. admirandus, während das Exemplar von Rh. lithographicus einen deutlichen, von der Muskelzone scharf abgesetzten, 5 mm breiten Lappenkranz aufweist. Mehrere schmälere Läppchen (4 mm) scheinen sich zu gröberen Randlappen von 10 mm Breite zusammen zu schliessen (S. 111). Die äussere Begränzung des Schirmes bildet keinen vollkommenen Kreis, wie er im restaurirten Bild von Brandt dargestellt ist (loc. cit. tab. I fig. 5), sondern man bemerkt vier perradiale schwache Einziehungen am Rande, welche mit vier breiten, schwach nach auswärts gebogenen Vorsprüngen abwechseln. Haeckel[20]) gibt in seiner restaurirten Figur von Rhiz. admirandus acht radiale Einziehungen an. An unserem Exemplar von Rh. admirandus ist allerdings auch, an einem Interradius gelegen, eine solche Einsenkung angedeutet. Doch gibt das Stück sonst über die Achttheilung des Schirmrandes keinen Aufschluss. Sind bei Rhiz. lithographicus wirklich acht Einschnitte vorhanden gewesen, so können die interradial befindlichen nur in sehr schwacher Weise entwickelt gewesen sein. An den Haupteinbuchtungsstellen waren ohne Zweifel Randkörper (Sinneskolben, *Rhopalien)* angebracht. Nur an einem Punkte des grösseren Stückes (bei o) ist ein solcher Ocular-Einschnitt, eine Sinnesbucht, deutlicher markirt. Randtentakeln fehlen vollständig.

Nach Innen zu ist beim Rhizostomites lithographicus die peripherische Zone von dem glatten Ring durch eine Furche (cc) abgegränzt, welche in natürlicher Weise als der Ringkanal *(canalis circularis)* gedeutet werden kann (Linie k beim Rh. lithogr. der Brandt'schen Zeichnung, i beim Hexarh. insignis). An unserem Abdruck des Rh. admirandus ist die Muskelzone zwar sehr scharf von der glatten Zone geschieden (Trennungslinie cc, Linie k der Haeckel'schen Figur), doch ist keine deutliche Furche für den Cirkelkanal vorhanden. Wahrscheinlich fällt die Lage des letzteren mit der scharf bestimmten Kreislinie zusammen, andernfalls würde sie in der axialen Hälfte des gefurchten Ringes liegen.

Ausser dem Ringkanal sind vom Gastrokanalsystem noch die Spuren von sechzehn Radial-Kanälen zu erkennen. Vier davon nehmen einen perradialen, vier einen interradialen Verlauf. Acht

20) Ueber zwei neue foss. Med. aus d. Fam. d. Rhizost. Neues Jahrb. f. Min.-Geol. 1866. S. 265. fig. 2.

besitzen eine adradiale Richtung. Die letzteren scheinen sich nicht über den Ringkanal nach der Peripherie hin zu erstrecken. Die acht ersteren durchsetzen den Ringkanal und laufen bis zu den Randkörpern. Es würden nach dieser Annahme acht Ocularkanäle mit acht interocularen (den adradialen) alterniren. Die Ocularkanäle sind in ihrem peripherischen Theile bereits von Haeckel am Hexarhizites insignis, wo sie besonders gut erhalten als breite glatte Furchen in der Randzone auftreten, beobachtet worden (k_{1-6} seiner Figur die perradialen, l_{1-6} die interradialen Kanäle). Die Radialkanäle machen sich am Exemplar des Rh. lithographicus theils als schwache Furchen auf der glatten Zone und im gefurchten Ring geltend, theils lassen sie sich und zwar in unzweideutiger Weise an den Unterbrechungen nachweisen, welche der scharfe Kamm des Ringwalles durch sie erleidet (cp die perradialen, ci die interradialen, ca die adradialen Kanäle). Besonders deutlich ist der Verlauf der Kanäle an dem grossen Exemplar (am Rh. admirandus) wahrzunehmen. Die Ocularkanäle bilden schwach eingesenkte aber ziemlich breite radiäre Einfurchungen in den Ringmuskelstreifen der Randzone (wie beim Hex. insignis). Auf dem glatten Ringfelde, soweit dasselbe gut erhalten ist, erscheinen die Kanäle der 3 Ordnungen vom Ringwall an nach der Randzone hin als breite, flache radiäre Erhebungen, welche bei günstiger Beleuchtung des Steines in prägnanter Form zum Vorschein kommen. Vom Ringwall an centralwärts sind die ocularen Kanäle nicht mehr deutlich zu verfolgen, während die adradialen als ziemlich tief eingeschnittene, gerade oder schwach winkelig gebrochene Linien unter den kalkigen Auflagerungen hindurch in die Armnähte, die sekundären Schenkel des Mundnahtkreuzes, sich fortsetzen. Zum Gastrokanalsystem dürfte ferner noch gehören der gleich weiter unten zu besprechende Ringwall.

Die glatte Zone repräsentirt denjenigen Theil der subumbrellaren Scheibe, welche zwischen dem Muskelring und den vier Subgenitalostien, beziehungsweise den damit alternirenden vier Pfeileransätzen liegt. Bei Rh. admirandus befindet sich diese Zone in ihren randlichen Parthien um mehrere Millimeter tiefer als der vorgelagerte breite Wall der Muskelzone, dann steigt die Fläche allmählich an bis zu dem wallartigen Ring, von welchem aus die Fläche sich wieder beträchtlich senkt und in die der nächsten Zone, des tiefen Ringes, übergeht. Bei Rh. lithographicus ist

die glatte Zone viel breiter als beim Rh. admirandus (entgegen der Behauptung Brandt's, foss. Med. S. 7). An ihrem äussern Theile sind mehr oder minder deutliche, ziemlich grobe concentrische Falten zu bemerken, welche augenscheinlich von subumbrellaren Muskeln herrühren. Das Niveau der Fläche ist hier fast das gleiche, wie das der Randzone und des höckerigen Ringes. Brandt meint, dass an den Stellen, wo der glatte Ring sich ausbreitet, eine Unterbrechung des Abdruckes bei Bildung der Versteinerung stattgefunden habe. Die Schirmfläche hätte sich hier nicht vollständig an ihre Unterlage angeschmiegt und es sei der darunter befindliche, einem dickflüssigen Brei vergleichbare Kalkschlamm zur Erstarrung gelangt, ohne von dem darüber liegenden Theile des Medusenkörpers Eindrücke angenommen zu haben. Diess könnte an unserem Exemplar von Rh. lithographicus nur in dem innern Theile der Zone streckenweise der Fall gewesen sein. Im mittleren Theil, wo der Ringwall sich befindet, und im äusseren Theil ist diess nicht denkbar, da hier deutlich die Abdrücke von Muskelstreifen wahrzunehmen sind. Bei Rh. admirandus ferner liegt diese Erklärung der Bildung des glatten Ringes ausser Möglichkeit, da sich über die ganze Fläche der Zone hinweg die Eindrücke der Radiärgefässe erstrecken.

Ein interessantes Gebilde, das in das Bereich dieser Zone fällt, ist jene wulstartige Erhöhung, die wir als Ringwall (w) bezeichnet haben und die als schmaler, wallartig vorstehender Streifen in annähernd kreisförmigem Verlauf im inneren Theil der Zone auftritt. An dem Exemplare von Rh. lithographicus ist dieser Wall besonders schön ausgeprägt. Nach Aussen zu dacht sich vom Wall an die Fläche des glatten Ringes allmählich ab, centralwärts ist der Abfall ein steilerer. Bei Rh. admirandus tritt er weniger stark hervor, lässt sich aber doch deutlich in den besser erhaltenen Parthien des Abdruckes verfolgen. Trotz der concentrischen Anlage ist der Verlauf des Walles kein rein kreisförmiger, sondern derselbe ist mehrfach winkelig gebrochen, einzelne Theile desselben sind offenbar nachträglich weiter nach ein- oder auswärts verschoben. Wahrscheinlich war sein Umriss ursprünglich ein abgerundet sechzehneckiger, entsprechend den sechszehn Radialkanälen. An den adradialen Stellen sind die Winkel schärfer ausgeprägt als an den interradialen und perradialen Punkten. Da, wo der Streifen die deutlichen Winkel bildet, sowie auch

an den perradial und interradial gelegenen Stellen sind im Zuge des kammartig vorstehenden Streifens, mehr oder minder auffallend, Unterbrechungen wahrzunehmen, welche zweifelsohne die Stellen andeuten, an welchen Radialkanäle sich befanden. Dieser Umstand scheint mir eine hinreichende Stütze für die Annahme zu gewähren, den wallartigen Streifen in nächste Beziehung zum Gastrokanalapparat zu bringen. Jedenfalls ist derselbe ein wichtiger Theil am Medusenschirm gewesen. Denn er fehlt auf keiner Platte der Medusenabdrücke aus dieser Gruppe. Die Abbildungen des *Rh. lithographicus* von Haeckel und Brandt lassen ihn erkennen (von Brandt theilweise unter seinen Verdickungen des glatten Ringes begriffen). Am Dresdner Exemplar vom *Rh. admirandus* ist er nachweisbar (v', Brandt'sche Figur). Sehr deutlich findet er sich ferner auf der Platte des *Hexarhizites* vor (h in Haeckel's Tafel), hier als tiefe Furche (weil Gegenabdruck) ausgebildet. Wahrscheinlich bezeichnet auf der Platte einer anderen Medusenversteinerung, des *Leptobrachites trigonobrachius* Haeckel,[21]) die Furche beziehungsweise Leiste f dasselbe Gebilde. Es dürfte auf der subumbrellaren Schirmseite unserer jurassischen Rhizostomiden in der Region, wo wir auf den Abdrücken den Wall sehen, eine Einsenkung, eine Ringfurche, bestanden haben. Wahrscheinlich befand sich am Aussenschirm in der entsprechenden Gegend eine wallartige Erhebung, neben welcher vielleicht eine Furche, der Kranzfurche Haeckels[22]) vergleichbar, lief, welche den peripherischen Schirmkranz von der centralen Schirmscheibe abschnürte. Ein ähnliches Verhalten finden wir bei der lebenden *Cephea conifera* Haeckel.[23]) In dieser subumbrellaren Ringfurche, beziehungsweise in der unmittelbar darüber befindlichen Schirmgallerte, konnte dann ein zweites, inneres Ringgefäss gelegen haben, das die von der centralen Magenhöhle kommenden Kanäle sammelte, und von dem die Radiärgefässe nach der Peripherie hin ausstrahlten. Der innere, dem Centrum genäherte Kreiskanal könnte vielleicht als der Hauptringkanal aufzufassen sein, während der peripherisch gelegene eine geringere Stärke besessen hätte. Analogien

---

21) Haeckel. Ueber die foss. Medusen der Jurazeit. Zeitschr. für wiss. Zool. XIX. 1879. p. 544 ff. t. 41. Al. Brandt. Ueber foss. Medus. S. 21. tab. II.

22) System der Medusen. S. 455.

23) Syst. d. Med. p. 576. taf. 36, fig. 3, 6, 5.

hiefür fehlen unter den recenten wurzelmündigen Quallen nicht. Manchmal ist der äussere Ringkanal ganz verkümmert. Andrerseits gibt es Formen mit doppeltem Ringkanal, wovon der innere, dem Mittelpunkte der Scheibe ziemlich genäherte eine grössere Dicke aufweist (*Cassiopea ornata* Haeckel.[24]) Ausser dieser Erklärung, wornach der Ringwall als Ausfüllung einer subumbrellaren Ringfurche (möglicher Weise mit darin befindlichem inneren Ringkanal) aufzufassen wäre, könnte man noch daran denken, denselben für die Begränzung der inneren Magenhöhlung zu halten. Diese Annahme ist jedoch abgesehen von anderen Gründen schon desshalb nicht wahrscheinlich, weil darnach der Centralmagen eine ungewöhnlich grosse Ausdehnung gehabt hätte. An den Dresdner Exemplaren glaubt übrigens Brandt in der That die Umrisse der coelenterischen Centralcavität (wenigstens der Decke derselben) gefunden zu haben. Er verlegt die Gränze der Magendecke ungefähr an den peripherischen Rand unseres höckerigen Ringes. Zwischen je zwei der nierenförmigen Platten lässt er dieselbe im Winkel vorspringen.[25]) Wenn wir nun auch mit Brandt der Ansicht sind, dass die centrale Magenhöhle einen solchen Umfang ungefähr besessen haben mag, so können wir doch nicht annehmen, dass auf den Steinplatten sich wirklich Umrisse ihrer Wandungen erhalten haben. Auf unseren Stücken zeigen sich jedenfalls keine sicheren Anhaltspunkte dafür. Es wäre uns auch unerfindlich, wie das im Innern des Körpers gelegene Centralorgan des Gastrovascularsystemes durch die vorgelagerten Gallertmassen hindurch einen Eindruck im Schlamme hätte bewirken können.

Auf den glatten Ring folgt centralwärts der höckerige Ring mit den vorspringenden vier nierenförmigen Platten. Er umgibt das nahezu kreisrunde Mittelfeld, zu dessen Besprechung wir uns behufs weiterer Orientirung zunächst wenden. Ueber die Deutung der einzelnen Theile desselben ist das Wichtigste schon bei der Beschreibung der Stücke bemerkt worden, so dass wir uns hier kurz fassen können. Ohne Zweifel stellt das Mittelstück den Abdruck der Oralfläche von der Armscheibe (Stomodiscus) dar. Die Armscheibe, auch Mundscheibe genannt, bildet bei den meisten lebenden Rhizostomen ein viereckiges, dem Medusen-

24) Syst. d. Medus. p. 571. taf. 37, fig. 2.
25) A. Brandt. Foss. Medusen. S. 8. Taf. I, fig. II g. fig. V.

schirme parallel sich erstreckendes, scheibenartiges Gallertstück, von dem aus nach unten die acht Arme abgehen. Mit dem Schirme ist die Scheibe durch die sog. Pfeiler verbunden. Pfeiler und Armscheibe werden auch als Schirm- oder Mundstiel bezeichnet. Bei unseren Formen war der Stiel jedenfalls sehr kurz d. h. die Pfeiler, die Scheibenwurzel Haeckel's (Syst. d. Med. 581), besassen eine fast horizontale Lage. Die Unterfläche des Scheibenstammes (der Armscheibe) ist bei vielen lebenden Formen „trichterförmig vertieft oder wenigstens nabelförmig eingezogen" Haeckel l. c. 481. In ähnlicher Weise musste dieselbe auch bei dem jurassischen Genus *Rhizostomites* beschaffen gewesen sein, da auf den Abdrücken sich dieser Theil kuppelförmig hervorwölbt.

Die Arme der Rhizostomen besitzen bekanntlich in ihrer Längserstreckung angelegte krause Streifen, die mit vielen kleinen Saugmündchen bedeckt sind, welche zur Nahrungsaufnahme dienen. Letztere münden nach einwärts als feine Röhren in den Hauptkanal des Armes, welcher sich als eine Verzweigung der centralen Magenhöhle ergibt. Diese Saugkrausen *(Crispae suctoriae)* sind häufig verästelt und treten bald nur an der axialen Seite der Arme (Ventralcrispen), bald an deren ventralen und dorsalen Seite auf (Haeckel Syst. d. Med. 464). Die Ventralcrispen nun ziehen sich von den Armen auf den Scheibenstamm herauf, vereinigen sich hier paarweise und bilden auf der Armscheibe das Mundnahtkreuz. Eine solche Mundkreuznaht (Sutura staurostomalis) finden wir in ausgezeichnetster Weise an unseren fossilen Exemplaren ausgeprägt. Die 8 sekundären Schenkel derselben (a^2) können als Armnähte, die vier primären (a^1) als Mundnähte bezeichnet werden. Das Mundnahtkreuz stellt die Ueberreste des Mundes dar, dessen faltige, krause Ränder zu den Mundnahtleisten verwachsen sind, welche auf den Abdrücken als scharfe Furchen auftreten. Geht man von der ursprünglichen Kreuzform des Centralmagens aus, dessen Schenkel die Hauptrichtungen im Medusenkörper, nämlich die Perradien, abgeben, so nehmen die in analoger Stellung befindlichen primären Schenkel des Mundnahtkreuzes immer eine perradiale Lage ein. Die in diesen Richtungen gedachten Strahlen, welche die Pfeiler in der Mitte durchschneiden, sind die Radien I. Ordnung oder die Perradien. In der Mitte zwischen den Perradien und mit diesen alternirend liegen die

Interradien (Radien II. Ordg.), zwischen den letzteren und den Perradien in der Mitte die Adradien oder Radien dritter Ordnung.

Die perradialen Schenkel des Mundkreuzes können in einem Punkte der Mitte zusammenstossen (z. B. bei der recenten *Thysanostoma thysanura* Haeckel [Tafel IV fig. II, nach Haeckel] und bei dem Dresdner Exemplar von *Rh. admirandus).* Oder die paarweise gegenüber stehenden Schenkel sind durch eine Quernaht verbunden. Es resultirt dann daraus eine >—< ähnliche Figur, wie Brandt vom *Pilema pulmo (Rhizostoma Cuvieri)*, Haeckel von *Cassiopea ornata,* Grenacher und Noll von *Crambessa Tagi* abbilden (loc. cit.). Oder es laufen die perradialen Nähte von den Ecken eines kleinen (meist rhombischen) Feldchens aus. Letzteres ist der Fall bei unseren Exemplaren. Nur das grössere Stück von Rh. lithogr. lässt statt eines besonderen Feldchens eine Quernaht vermuthen. Das kleine rhombische Mittelfeld dürfte als der Rest der in der Mitte nicht vollständig verwachsenen Mundöffnung zu erklären sein. Eine gleiche Deutung gab E. Haeckel dem damit correspondirenden trapezoiden Feldchen am Hexarhizites insignis. In ähnlicher Weise zeigen übrigens auch junge lebende Rhizostomen im Centrum einen offenen Mund, der erst später verwächst. Aber auch an anderen Punkten der Mundnaht als gerade in der Mitte können offene Stellen erhalten bleiben. So an den Ecken, wo die sekundären Schenkel sich abspalten, beim lebenden *Pilema pulmo* (Brandt Ueber *Rhizostoma Cuvieri* Fig. 8,o) sowie beim fossilen *Rhiz. admirandus* (Dresdner Exemplar, Brandt foss. Med. S. 16). Durch das Auftreten eines rhombischen Mittelfeldchens oder einer Quernaht im Mundcentrum ist eine Abweichung vom streng radiären Bau des Medusenkörpers bedingt und damit eine Hinneigung zur bilateralen Symmetrie gegeben oder es ist nach Haeckel die Umwandlung der regulär-pyramidalen Grundform in die amphitekte bewirkt worden (Syst. d. Med. 581, 616). Einige Autoren haben diese Erscheinung bei recenten Arten besonders betont, Haeckel möchte ihr aber keine morphologische Bedeutung beimessen. Für seine Ansicht spricht der Umstand, dass nicht sämmtliche Individuen ein und derselben Art in gleicher Weise sich in diesem Punkte verhalten.

Die Leisten des Mundnahtkreuzes besassen zackige, lappige Vorsprünge oder waren mit förmlichen Krausen behangen. Bei Rh. admirandus

scheinen an den Nähten nur wenige und kurze Ausfranzungen bestanden zu haben. Beim Rh. lithographicus dagegen hatten die Mundränder sowohl franzige Auszackungen als auch dichtere krausenartige Anhänge. Besonders waren letztere in den oberen Ecken der kleineren dreieckigen Felder gehäuft, wo jedenfalls ganze Büschel von Saugkrausen oder zottigen Gebilden hingen (Taf. IV, Fig. III, x).

Durch die Furchen der Mundkreuznaht ist die Armscheibe in acht Felder abgetheilt, von welchen sich die alternirend gestellten und gegenüber stehenden vollkommen entsprechen. Die vier kleineren davon, die concav-gleichschenkeligen Dreiecke, liegen perradial, die vier grösseren, die convex-gleichschenkeligen Dreiecke Haeckel's, interradial. Die Abgränzung des Mittelfeldes gegenüber dem höckerigen Ring ist keine scharfe, man kann es im Allgemeinen peripherisch da aufhören lassen, wo die Wölbung nachlässt. An den Rändern der Scheibe haben sich kalkige Ablagerungen ausgebreitet, die an einigen Stellen noch weit auf die Felder der Armscheibe sich hinaufziehen.

Die Furchen der sekundären Schenkel des Mundnahtkreuzes setzen sich, wie das Exemplar von Rh. admirandus lehrt, in der Hauptscheibe als adradiale Kanäle fort. Nach unten zu müssen an den adradialen Stellen am Rande der Armscheibe die acht Mundarme sich abgezweigt haben. Dieselben waren wahrscheinlich lang und dünn wie bei der abgebildeten *Thysanostoma* oder bei den *Leptobrachiden*. Den gestrandeten Exemplaren, welche hauptsächlich die Fossilreste lieferten, mögen die Arme schon verloren gegangen (abgestossen worden) sein, bevor dieselben in den Schlamm gebettet wurden. Jedenfalls konnten die Thiere keine dicken, fleischigen Arme besessen haben, sonst würde die Mundscheibe nicht in so trefflicher Erhaltung vorliegen. An dem grossen Exemplar von Rhiz. lithographicus zeigt sich übrigens bei genauerer Betrachtung eine Parthie, welche als der Abdruck eines Armes in nicht gerade gezwungener Weise sich deuten lässt. Es ist diess jener eingedrückte Streifen im linken Theil unserer Figur (br), welcher eine Strecke lang mit dem Ringwall parallel läuft und unten mit einer quastenartigen Verbreiterung endigt. Für diese Annahme spricht vor Allem der Umstand, dass der Streifen von einem adradialen Punkte am Mundscheibenrande aus seinen Ursprung nimmt. Im grösseren Theile des Verlaufes bildet er eine bald mehr zu-

sammengezogene, bald breitere Furche, an den Rändern mit eingesenkten Längsstreifchen, welche den Kanten des Armes entsprechen würden. Nach oben ist die Furche weniger scharf, doch zieht sich dieser Streifen in noch erkennbarer Weise bis an den oberen Rand einer der nierenförmigen Platten fort. Die Verbreiterung am hinteren Ende dürfte einem quastenförmigen Zottenbüschel entsprechen, wie er am Ende der langen Arme mancher Leptobrachiden auftritt z. B. bei *Leptobrachia leptopus* Chamisso und Eysenhardt sp.[26])

Eine fossile Meduse, von welcher der Abdruck halb von der Seite vorliegt, mit leidlich erhaltenen langen Armen, die unten eine lanzettförmige, blattartige Verbreiterung besitzen, ist bereits aus dem Solenhofer Schiefer bekannt (Paläontologisches Museum in München). Haeckel[27]) hat diese Versteinerung in ausgezeichneter Weise beschrieben und *Leptobrachites trigonobrachius* benannt. Dasselbe Stück hat später Alex. Brandt[28]) noch einmal untersucht und ist dabei zu einer von Haeckel beträchtlich abweichenden Anschauung gelangt. Nach ihm hätte die Meduse einen 5 strahligen Bau und ein weites, von langen Armen umstelltes Maul gehabt. Statt einer grösseren Reihe von Randlappen, deren Eindrücke auf der Platte übrigens unverkennbar erhalten sind, nimmt er deren nur zehn an und glaubt die Art mit der neuen Bezeichnung *Pelagiopsis Leuckarti* in die Nähe der *Pelagiden*, einer Familie der semostomen Scheibenquallen, am wahrscheinlichsten unterbringen zu können. Wir vermögen jedoch seine Ansicht nicht zu theilen und möchten zur Zeit noch für die Rhizostomennatur des Fossils eintreten. Ja wir halten es sogar für nicht undenkbar, dass diese Form zur gleichen Gruppe wie unsere *Rhizostomiten* gehören könne. Es würden dann die letzteren die Abdrücke von unten, der *Leptobrachites trigonobrachius* die seitliche Ansicht der gleichen rhizostomen Medusenform darstellen. Doch wollen wir diess nur vermuthungsweise äussern und auf die Aehnlichkeit bezüglich der Arme kein weiteres Gewicht legen. Nach Haeckel haben zwar die

---

26) Adelbert de Chamisso et C. G. Eysenhardt: De animalibus quibusdam e classe vermium Linneana. Nov. Act. Physico-medica acad. Caesareae Leopold-Carol. Naturae curiosorum. Tomus X. Bonn 1821. 350, tab. XXVII.

27) Haeckel. Foss. Med. d. Jurazeit. S. 544—548. t. 41.

28) A. Brandt. Ueber fossile Medusen. S. 18—26. tab. II.

Rhizostomiten weit mehr Randlappen (Rhiz. admirandus 148, Rh. lithogr. 112) als Leptobrachites (48), allein auch unser Exemplar von Rh. lithographicus zeigt wenigstens von den etwas breiteren Randlappen keine sehr erhebliche Zahl. An dem Stück des *Leptobrachites* ist übrigens nur soviel mit voller Sicherheit zu erkennen, dass eine fossile Meduse mit breitem Schirm, gelapptem Rand und langen Armen vorliegt, welch' letztere wahrscheinlich ein quastenförmiges Endstück besassen. Trotzdem gibt die Platte des *Leptobrachites,* wie Haeckel treffend bemerkt, ein hübsches Habitusbild einer grösseren versteinerten Meduse ab.

Der höckerige oder tiefe Ring (HR), die Region zwischen Mundscheibe und dem glatten Ring umfassend, setzt einer richtigen Deutung die meisten Schwierigkeiten entgegen. Die in Rede stehende Zone ist verschiedenartig an beiden Stücken ausgebildet. An dem grossen Exemplar (Rh. admirandus) nimmt sie den tiefsten Theil des ganzen Abdruckes (unterbrochen von den sattelförmig vorstehenden vier nierenförmigen Platten) ein. Bei Rh. lithographicus liegt ihre Oberfläche in dem gleichen Niveau mit den angränzenden Zonen. Das ganze Ringfeld zeigt hier (die vier vorspringenden ovalen Platten ausgenommen) eine rauhe, grubig-höckerige Beschaffenheit und ist mit unregelmässig verlaufenden, grösseren und feineren, queren oder concentrischen Furchen durchsetzt. Auch der correspondirende (weit schmälere) Theil im Abdruck des Rh. admirandus besitzt eine etwas rauhe Oberfläche. Wir halten nun diejenigen Abschnitte des höckerigen Ringes, welche zwischen den vier nierenförmigen Platten liegen, für jene Stellen, an welchen die Armscheibe mit dem Schirme durch die Armwurzeln oder Pfeiler verbunden war. Bei unserem Rh. admirandus scheint im tiefen Ring der Abdruck des Armpfeilers direkt vorzuliegen. Auf der Platte des Rhiz. lithographicus sind in der Region, wo die Pfeiler standen, später kalkige Auflagerungen erfolgt, welche das Zustandekommen des höckerigen Ringes bedingt haben, oder es lässt sich die unregelmässig grubig-höckerige Oberfläche der Zone so erklären, dass die Pfeiler, welche stark und breit waren, durch ihren allmählichen Schwund eine Verrückung der Theilchen im Kalkschlamm während seines Festwerdens bewirkt haben. Die peripherische Gränze der Pfeiler mag ungefähr durch die etwas wellig verlaufenden Ringfurchen (p) bezeichnet sein, welche den höckerigen Ring

von der glatten Zone trennen. Seitlich der nierenförmigen Platten sind im höckerigen Ring stark eingefurchte und geschrammte Parthien vorhanden, die eine adradiale Lage einnehmen und ohne Zweifel die Stellen andeuten, wo aus der Armscheibe nach unten die Mundarme abgingen.

In den äusseren Theil unserer höckerigen Zone würden die vier sichelförmigen Wülste fallen, welche den viergetheilten Ring Haeckels zusammensetzen; vergl. seine Abbildung vom *Rh. admirandus* Taf. V und Holzschnitt p. 277 loc. cit.[29]) Schon Brandt (loc. cit. S. 8) hat nachgewiesen, dass die Furchen und welligen Erhebungen, welche für die Sichelwülste (nach Haeckel Abdrücke der Genitalorgane) charakteristisch sein sollen, auch nach Innen zu sich weiter fortsetzen und beim Rhiz. lithographicus selbst nach Aussen hin nicht scharf abgegränzt sind, so dass die Aufstellung eines durch besondere Furchen gekennzeichneten Ringes, des durch die Sichelwülste repräsentirten Genitalringes Haeckel's, überflüssig erscheint. An unseren Stücken konnten wir für die Annahme eines solchen keine beweisenden Momente auffinden.

In besonderer Schärfe und Schönheit sind diejenigen Gebilde erhalten, welche Brandt als nierenförmige Platten bezeichnet hat (n). Am Rhiz. admirandus treten sie als breit sattelförmige, etwas auf die interradialen Felder centralwärts hinauf geschobene Erhebungen zwischen den Einsenkungen des tiefen Ringes auf. Bei Rh. lithographicus bilden sie vier interradial gelegene Vorsprünge der höckerigen Zone. Wie schon Brandt gezeigt hat, können diese ovalen Platten mit grosser Wahrscheinlichkeit als Abdrücke der sog. Subgenitalklappen angesehen werden, die bei manchen Rhizostomen sich vorfinden und immer interradial gelegen sind. Die Subgenitalklappen Haeckel's (Genitalklappen, Decken der Genitaltaschen) stellen rundliche oder ovale Vorsprünge des Gallertschirmes dar, welche höckerartig nach unten am Eingange der Subgenitalhöhlen vortreten. Die Subgenitalhöhlen (Athem- oder Respirationshöhlen, Genitalhöhlen, Schirmhöhlen der Geschlechtsorgane) sind bekanntlich exodermale, gegen das Scheibencentrum zugewendete Einstülpungen in der Gallertmasse der Subumbrella. Sie kommen am Schirme stets in der Vier-Zahl vor und besitzen immer eine inter-

29) Haeckel. Ueber zwei neue foss. Med. aus d. Fam. der Rhizost. pag. 268 u. 276.

radiale Lage. Seitwärts sind die Höhlen von den Pfeilern begränzt. Von Aussen führt in dieselbe das Subgenitalostium (Athemloch, ovales Fenster) hinein. Am Grunde der Schirmhöhle ist die Gastrogenitalmembran ausgespannt, welche die Scheidewand gegen die Centralcavität bildet. Auf der Membran befinden sich die Genitalwülste, aus deren Falten die Geschlechtsprodukte nach einwärts, in die Magenhöhlung, entleert werden. Eine derartige Einrichtung treffen wir bei den „Rhizostomen mit nicht durchbohrtem Stiel" Grenacher und Noll's, bei den *tetrademnien Rhizostomen* Haeckel's, bei welchen die vier Pfeiler in der Mitte durch die Gastrogenitalmembran verbunden sind. Oefters findet man bei diesen Formen an den Subgenitalostien den äusseren, abaxialen Rand derselben verdickt, er springt dann zapfenartig über das Ostium vor und bildet jenes (meist ovale) Gallertstück, welches wir als Subgenitalklappe bereits kennen gelernt haben.[30]) Die Aehnlichkeit der nierenförmigen Platten unserer versteinerten Medusen mit den Subgenitalklappen gewisser lebender Rhizostomen z. B. des gemeinen *Pilema pulmo* (Macri sp.) Linné sp. ist eine grosse. Bei der erwähnten Art sind nach Brandt[31]) diese Gallertstücke mit scharf umschriebenen, verdickten Rändern versehen; der äussere und innere Rand besitzt eine seichte Ausbuchtung. In radiärer Richtung sind die Platten etwas erhaben, im Uebrigen aber vertieft. Diese Beschreibung passt auch für die ovalen Platten der jurassischen Rhizostomiden. Dem radiären schwachen Wulst entspricht an unseren Stücken, weil hier Abdrücke vorliegen, eine leichte Depression in der Mitte der Platten (Rh. lithogr.). Vor den nierenförmigen Platten treten theils radiäre unregelmässig geformte Wülste auf (Rh. lithographicus) oder es ziehen sich breite,

---

30) Abbildungen der Subgenitalklappe finden sich bei Grenacher und Noll loc. citat. tab. VIII f. XVIII *(Rhizostoma [Pilema] luteum* Eschscholtz), Brandt Ueber *Rhizostoma Cuvieri* Taf. fig. 3, K *(Pilema pulmo* Linné sp.), Claus Stud. über Polyp. u. Quallen der Adria loc. cit. Taf. X fig. 44. RG. Ein ähnliches Organ, als dreieckige Klappe aussen über die Subgenitalmündung vorspringend, besitzt eine Art der Rhizostomen-Gattung *Cassiopea (C. Mertensi* A. F. Brandt) s. A. F. Brandt Ausführliche Beschreibung der von C. W. Mertens auf seiner Weltumseglung beobachteten Schirmquallen (1835), Taf. XXI u. XXIII in Mémoires de l'Académie impérial des sciences de St. Pétersbourg. 6. Série. Scienc. mathem., phys. et natur. Tome IV. Part II. St. Petersbg. 1838.

31) A. Brandt. Ueber *Rhizostoma Cuvieri* (Mém. de l'Acad. impér. des sciences de St. Pétersbourg. VII. sér. Tome XVI, Nr. 6. 1870.) Seite 15.

bandartige oder zipfelförmig vorgewölbte Auflagerungsgebilde eine Strecke weit in die interradialen Felder hinauf. Beim Rh. admirandus bilden diese vorgelagerten Parthien (v) an der axialen Seite der ovalen Körper breite. nicht überall in gleicher Weise begränzte Randstreifen. Ihrer Lage und unregelmässigen Begränzung wegen kann man dieselben als die durch die Subgenitalhöhlen in die Gallertmasse des Körpers eingedrungenen Kalkschlammparthien betrachten. Zu solchen Gebilden gehören auch die Subgenitalklappen Haeckel's auf der Platte der Hexarhizites insignis.

Bei einer zweiten Gruppe von recenten Rhizostomen, bei den *Monodemnien* Haeckel's oder „Rhizostomen mit durchbohrtem Stiel", herrschen dagegen andere Verhältnisse als die oben besprochenen. Hier sind wohl nach Aussen vier Subgenitalostien (meist von ziemlicher Weite) vorhanden, aber die vier diesen Mündungen entsprechenden Subgenitalhöhlen haben sich im Innern des Medusenkörpers zu einem einzigen centralen Hohlraum verbunden (Ausbildung eines sogen. Subgenitalsaales oder *Porticus subgenitalis* Haeckel.[32]) Die Pfeiler, welche die breite Arm- oder Mundscheibe tragen, stehen hier isolirt am Schirm und sind nicht durch die Gastrogenitalmembran miteinander verbunden. Die centrale Magenhöhle, deren Boden sonach nicht von der Armscheibe gebildet wird, weil dazwischen der freie Porticus sich ausbreitet, ist bei diesen Formen, im Gegensatz zum einfachen, ungetheilten Magen der übrigen Rhizostomen, in vier Aeste getheilt; die untere Wandung der Magenhöhle wird von der Gastrogenitalmembran eingenommen, so dass ein dem Magenkreuz entsprechendes, vierschenkeliges Genitalkreuz entsteht. Die Genitalbänder sind mit einer breiten Gallertlamelle bedeckt, welche hier die Subgenitalklappe vertritt (Grenacher und Noll.[33])

Zu diesen monodemnien Rhizostomen gehören gerade diejenigen Arten, welche wegen der kurzen, breiten Armscheibe und der langen, fadenförmigen Arme mit unseren fossilen Formen zunächst zu vergleichen wären (Beispiel die auf Taf. IV fig. I abgebildete australische Species *Thysanostoma thysanura).* Auf der anderen Seite vermissen wir aber hier

32) Syst. d. Medusen. p. 472.
33) loc. cit. p. 136. Taf. V, Fig. VIII, Vg.

jene ovale Gallertstücke an den Subgenitalmündungen, die nierenförmigen Platten. Wollte man die nierenförmigen Körper an unseren Exemplaren nicht als die Reste der Subgenitalklappe deuten, so könnte man nur noch an die Abdrücke von Gonaden oder der Subgenitalhöhlen selbst denken. Letztere erzeugen auch in weicher Masse den ovalen Platten höchst ähnliche Eindrücke. Man vergleiche zum Beispiel die von Nathorst[34]) hergestellten Gypsabdrücke von *Aurelia aurita*. Doch möchten wir die erstere Ansicht für die wahrscheinlichere halten.

Auf einem der Interradialfelder des Rh. lithographicus sieht man bei sehr genauer Betrachtung eine schräge, feine Furche, von welcher aus unter spitzem Winkel mehrere, parallele, zarte Streifchen abgehen (ov). Wir haben schon oben (S. 119) die Vermuthung geäussert, dass die feinen Streifchen den Falten der Gastrogenitalmembran entsprechen dürften (vergl. die Abbildung Grenacher und Noll's von *Crambessa Tagi* loc. cit. Taf. V, Fig. VIII, Mgg). Diess würde für unsere Rhizostomiten eine Organisation voraussetzen ähnlich derjenigen der heutigen *Crambessiden*. Man kann nun einwenden, dass die Lage des Eindruckes (auf einem Interradialfeld) gegen diese Annahme spräche, da die Genitalbänder die perradialen Schenkel der Magenhöhle auf deren Unterseite begleiten. Es rücken nämlich die Schenkel der eigentlich interradial gestellten Genitalwülste soweit auseinander, dass sie fast in die perradialen Richtungen fallen, während zugleich ihre Mittelstücke im Centrum sich nahezu berühren. Doch ist es andrerseits nicht undenkbar, dass durch Zerreissung des Genitalkreuzes eines der Bänder auf ein interradiales Feld geschoben wurde. Um das Zustandekommen des Eindruckes zu erklären, muss man annehmen, dass der Magenboden sich gesenkt hat und Theile von ihm im Schlamme, nachdem die Gallertmasse der Armscheibe bereits verschwunden war, noch zum Abdruck gelangten.

Entstehung der Abdrücke.

Bezüglich der Entstehung der Versteinerungen ist nichts Neues hinzuzufügen und möchten wir uns hier im Allgemeinen den Anschauungen, wie sie Brandt entwickelt hat, anschliessen. Die gestrandeten Exem-

34) loc. cit. Taf. I.

plare kamen mit ihrer subumbrellaren Seite auf den Kalkschlamm zu liegen, so dass dadurch von dem grössten Theile der Unterseite, namentlich von dem mittleren soliden Gallertstück der Armscheibe, ein Abdruck entstehen konnte. Durch die vier Subgenitalhöhlen drang der Schlamm mehr oder minder tief ein und erzeugte auf den Platten die unregelmässigen kalkigen Auflagerungen sowie die Abdrücke der vier Subgenitalklappen. Durch den allmählichen Schwund der breiten Pfeiler wurden die Kalktheilchen in ihrer ruhigen Ablagerung gestört, so dass in der betreffenden Region der Kalkbrei mit unebener Oberfläche erstarrte (Bildung des höckerigen Ringes bei Rh. lithographicus). Es frägt sich übrigens, ob nur allein der blosse Abdruck vorliegt. Mir scheint es fast, als ob wenigstens für gewisse Theile gewöhnlicher Abdruck und eine Art wirklicher Versteinerung combinirt sei. Die Gallertmasse kann vielleicht die feinsten Schlammpartikelchen in sich aufgesogen haben, die dann nach Vertrocknung der Gallertsubstanz in der ungefähren Form der damit erfüllten Körpertheile erhärteten.

Systematische Stellung.

Was die systematische Stellung unserer Stücke betrifft, so kann nach den bisherigen Erörterungen kein Zweifel darüber obwalten, dass dieselben zu den Rhizostomen oder wurzelmündigen Quallen gehören (Siehe S. 131). Der erste Bearbeiter dieser Formen, E. Haeckel, hatte sie bereits dahin gestellt, und auch Brandt ist ihm darin gefolgt. Es liegt nun die Frage vor, ob die jurassischen Arten einer der vier bestehenden Familien der Rhizostomen zugezählt werden können. Haeckel rechnet die fossilen Rhizostomiten zu den *Pilemiden*.[35]) Andrerseits hebt derselbe Autor an mehreren Stellen die Aehnlichkeit hervor, welche namentlich in Bezug auf die Beschaffenheit der Mundkreuznaht mit den *Crambessiden* besteht.[36])

35) „Vermöge der bedeutenden Festigkeit der Schirmgallerte eignen sich die Pilemiden mehr als die meisten übrigen Medusen zur Erhaltung in fossilem Zustande" Haeckel System der Medusen S. 579. Ausserdem Haeckel Ueber zwei neue Med. aus d. Fam. d. Rhiz. S. 281.

36) E. Haeckel. Ueber die Crambessiden, eine neue Familie der Rhizostomengruppe. Zeitschr. f. wissensch. Zoologie, Bd. 19. 1869. S. 527—537. Haeckel Ueber die foss. Med. d. Jurazeit. Dieselb. Zeitschrift Bd. 19. p. 557. Haeckel Ueber eine sechszählige foss. Rhizost. S. 309, 313.

Von den vier lebenden Rhizostomen-Familien gehören zwei, die *Toreumiden* und die *Pilemiden*, zur Gruppe der Tetrademnien, die beiden anderen, die *Versuriden* und *Crambessiden*, zu jener der Monodemnien. Die beiden Familien in jeder der zwei Hauptgruppen unterscheiden sich nach Haeckel[37]) durch die Lage ihrer Saugkrausen an den Armen. Bei einer Reihe sind dieselben nur auf der ventralen (axialen) Fläche der Arme entwickelt (*Toreumidae* und *Versuridae*), bei der anderen (*Pilemidae* und *Crambessidae*) sind sie sowohl auf der ventralen als auch auf der dorsalen Seite vorhanden. Der Paläontologe kann leider dieses Eintheilungsprincip nicht zur vollen Anwendung bringen, da gut erhaltene Armreste den fossilen Exemplaren fehlen. Gleichwohl lässt sich, wie oben gezeigt wurde, mit grosser Wahrscheinlichkeit eine lang sich hinziehende Furche auf einem der Abdrücke als Armstück deuten. Darnach hätten die Formen lange, einfache, unverästelte Arme besessen, ähnlich wie manche *Crambessiden*. Wir haben auch schon darauf hingewiesen, dass möglicherweise der *Leptobrachites trigonobrachius*, eine jurassische Meduse mit unzweifelhaft erhaltenen langen Armen, die seitliche Ansicht eines *Rhizostomites* darstellen könnte. Durch die spatelförmige Verbreiterung am unteren Ende der Arme, welche sich allerdings nicht in durchaus überzeugender Weise erkennen lässt, wäre eine Vergleichung mit den lebenden *Leptobrachiden* (Unterfamilie der *Crambessiden*) gegeben. Man vergleiche die Abbildungen der recenten *Leptobrachia leptopus* Chamisso et Eysenhardt sp.[38]) und *Leonura terminalis* Haeckel.[39])

Die *Toreumiden*, ausgenommen die Gattung *Archirhiza* (die wegen ihres übrigen Baues hier keine nähere Berücksichtigung finden kann), besitzen gefiederte, meist buschig verzweigte Mundarme. Die *Pilemiden* sind durchweg mit schweren, fleischigen, öfters dreiflügeligen und mit besonderen Schulterkrausen besetzten oder dichotom verzweigten, starken Armen ausgestattet. Ich glaube desshalb nicht, dass unsere Juraarten einer dieser beiden Familien unmittelbar einzureihen sind, da selbe wegen

37) Das System der Medusen S. 464. 561.

38) loc. citat. [Note 26]. Nova Acta Acad. Leop. Car. X. tab. 27.

39) E. Haeckel. Report on the Deep-Sea Medusae dregded by H. M. S. Challenger during the years 1873—1876. Report on the scientif. results of the Voyage of H. M. S. Ch. prepared by S. Wyville Thomson and John Murray. Zoology. Vol. IV. 1882.

der prächtigen Erhaltung der subumbrellaren Seite nur einfache, leicht abstossbare Arme von mässiger Dicke besessen haben konnten. Die *Versuriden* kommen wegen der breiten meist gefiederten Arme oder sonstiger Eigenthümlichkeiten halber für die Vergleichung nicht in Betracht, so dass man, wenn man von den Armen ausgeht, naturgemäss auf die *Crambessiden* geführt wird, von welchen manche Gattungen riemenförmige oder bandartige Arme tragen. Aber auch sonst, namentlich in der äusseren Form, ergeben sich verwandtschaftliche Verhältnisse. Die Armscheibe ist „bei den meisten *Crambessiden* als eine dicke, ansehnliche, knorpelige Gallertscheibe von quadratischer Form (seltner achteckig)" ausgebildet, auf deren Unterseite das „krause Mundnahtkreuz, die Sutura staurostomalis," in der charakteristischen Weise sich befindet (Haeckel).[40]) Eine recente Crambesside von einem ähnlichen allgemeinen Habitus, wie ihn der jurassische *Rhizostomites* gehabt haben mag, ist zum Vergleiche auf Tafel IV abgebildet. Es ist die australische *Thysanostoma thysanura* Haeckel. Die Figur wurde dem Prachtwerke Haeckel's (System der Medusen) entnommen. In den Einzelheiten ergeben sich bei der Vergleichung allerdings erhebliche Unterschiede. So waren jedenfalls bei *Rhizostomites* die Pfeiler (p) viel breiter, andrerseits die Subgenitalostien (ig) schmäler.

Ob nun eine Rhizostomee aus der Gruppe der Monodemnien oder derjenigen der Tetrademnien vorliegt, auf welche Bestimmung es zunächst ankäme, kann an unseren Stücken, die nur den Abdruck der unteren Seite zeigen, nicht mit voller Sicherheit ermittelt werden. Wegen der vier nierenförmigen Platten, welche kaum anders als die Subgenitalklappen gedeutet werden können, lässt sich mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass vier Subgenitalhöhlen statt eines einzigen unterhalb des Magenbodens befindlichen centralen Hohlraumes (wie bei den *Crambessiden*) vorhanden waren. Diese Ansicht bleibt auch bestehen, wenn man die ovalen Platten, die man übrigens auch direkt (allerdings mit geringer Wahrscheinlichkeit) auf die Höhlen beziehen könnte, für die Abdrücke von Gonaden nimmt. Diese Ausbildung (von vier Subgenitalhöhlen und vier Subgenitalklappen) spricht auf der anderen Seite für eine Verwandtschaft mit den *Pilemiden*, bei welchen jene Verdickungen der Ostienränder (die Sub-

40) Das Syst. der Medusen. S. 615.

genitalklappen) in deutlichster Form auftreten. Ebenso die Muskelringe, wodurch wie bei dieser Familie[41]) die feste harte Beschaffenheit der Schirmgallerte bewiesen ist. Diese Eigenschaft wird von Haeckel besonders betont (siehe oben). Die Mundkreuznaht auf der unteren Fläche der dicken und starken Mundscheibe kann bei den Pilemiden von ähnlicher Ausbildung sein wie bei den Crambessiden; aber es sind hier starke und schwere, buschige Arme vorhanden, wie sie bei den jurassischen Rhizostomiten keinesfalls in dieser Form bestanden haben konnten.

Wir sehen somit, dass an den lezteren Charaktere sich nachweisen lassen, welche gegenwärtig auf verschiedene Familien der Rhizostomen vertheilt sind. Es dürfte daher der Schluss nicht zu gewagt erscheinen, dass die jurassischen Rhizostomites-Arten einer besonderen, ausgestorbenen Familie der wurzelmündigen Quallen angehört haben. Die Diagnose dieser fossilen Medusenfamilie, welche analog den Lithosemäiden am geeignetsten als ***Lithorhizostomeae*** bezeichnet werden könnte, lautet:

Rhizostomites. Schirm gross (bis zu 400 mm im Durchmesser), rund, mit Andeutung von vier oder acht Hauptlappen. Schirmrand in eine grössere Zahl von Randlappen getheilt. Ausser etwas breiteren glaubt man noch schmälere Lappen unterscheiden zu können. Am Schirmrande Einbuchtungen für die Randkörper. Cirkelkanal im äusseren Drittel der umbrellaren Fläche gelegen. 16 Radiärkanäle. Subumbrella mit starker Muskulatur. Ein kräftiger Kranzmuskel. Zwischen Armscheibe und der Muskelzone auf der Unterseite eine starke ringförmige Einsenkung (vielleicht mit Ausbildung eines inneren Ringkanales). Vier Subgenitalhöhlen. Vier Subgenitalklappen am Rande der nicht besonders weiten Ostien. Breite, aber kurze Pfeiler. Breite, starke Armscheibe, unten concav ausgewölbt. Auf der oralen Fläche der Armscheibe die kreuzförmige Mundnaht. Schenkel des Mundnahtkreuzes mit krausen Anhängen. Arme lang und dünn, am unteren Ende wahrscheinlich mit quastenförmigem Büschel.

Vorkommen: Solenhofen und Eichstädt. Lithographischer Schiefer. Stufe des *Ammonites* (*Oppelia*) *steraspis*.

---

41) „Die Gallerte der Umbrella ist bei den *Pilemiden* meistens stark und fest, oft von der Consistenz eines mässig harten Faserknorpels" Haeckel, Syst. d. Med. S. 579.

Möge es gelingen noch weitere Exemplare aufzufinden, an welchen neben den Charakteren der Armscheibe auch die Arme in genügender Schärfe erhalten sich zeigen, um so die Kenntniss dieser hochinteressanten alten Medusenformen zu vervollständigen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Stück dem Paläontologen in die Hände fiele, ist allerdings eine geringe, denn ausser der grossen Seltenheit des Fundes einer fossilen Qualle überhaupt, müsste gerade für eine solche Erhaltung ein glücklicher Zufall mitgewirkt haben, der die Meduse aus dem Jurameer in seitlicher und halbgeneigter Lage auf das schlammige Ufer geworfen hätte.

Anhang.

Aufzählung der bisher beschriebenen fossilen Medusen-Arten.

Im Anschluss an die im Vorausgehenden beschriebenen Rhizostomiten-Arten mag es gestattet sein, in Kürze die bis jetzt bekannten fossilen Medusen-Arten im Allgemeinen vorzuführen. Schon von verschiedenen Seiten wurde eine Zusammenstellung der, allerdings auf ein bescheidenes Maass von Arten beschränkten, versteinerten Quallen geliefert. Wir finden zunächst in Zittel's[42]) Handbuch die wichtigeren Species aufgezählt, dessgleichen hat Nathorst[43]) in seiner neuen, schönen Arbeit über Medusenabdrücke eine Uebersicht der verschiedenen Formen gegeben, die ausführlichsten Darlegungen über diesen Gegenstand verdanken wir jedoch Haeckel, welcher sich um die Kenntniss der lebenden wie fossilen Medusen so hoch verdient gemacht hat. Haeckel hat die Mehrzahl der fossilen Arten aufgestellt und beschrieben.[44]) In seinem grossen Prachtwerke „das System der Medusen“[45]) gibt er am Schluss eine Zusammenstellung aller bekannten fossilen Medusen-Arten. Zugleich ist hier die gesammte darüber bestehende Literatur, die sich auf ungefähr 10 Abhandlungen beläuft, aufgeführt.

---

42) Zittel. Handbuch der Paläontologie. 1. Bd., 1. Abth. S. 306.
43) A. G. Nathorst. Om aftryck af Medusor i Sveriges Kambriska lager. p. 3—5.
44) E. Haeckel. Die foss. Medus. d. Jurazeit. Zeitschr. für wiss. Zool. XIX.
45) Denkschriften der medic. naturwiss. Gesellschaft zu Jena. I. Bd. 1879. S. 646—648.

Nach dem vorliegenden Material ergibt sich, dass mit Ausnahme einer einzigen Species sämmtliche bis jetzt beschriebenen mit Sicherheit als Reste von Medusen zu deutenden Versteinerungen dem oberjurassischen Plattenkalke der Altmühlgegend (Solenhofen, Eichstädt, Pfahlspeunt) entstammen.

Die Solenhofener Formen lassen sich in folgender Weise systematisch gruppiren:

Craspedotae Gegenbaur. Schleierquallen.

Mit unzweifelhafter Sicherheit noch nicht nachgewiesen.[46])

Acraspedae Gegenbaur. Lappenquallen.

Ordnung: **Discomedusae** Haeckel. Scheibenquallen.

1. Unterordnung Cannostomae Haeckel. Rohrmündige Scheibenquallen. (Fossil nicht bekannt).

2. Unterordnung Semostomae L. Agassiz. Fahnenmündige Scheibenquallen.

Familie **Lithosemaeidae** Haeckel. (Fossil).

1) Semaeostomites Zitteli Haeckel.[47])

Familie **Eulilothidae** Haeckel. (Fossil).

2) Eulilotha fasciculata Haeckel.[48])

? Familie **Pelagidae** Gegenbaur.

3) Acraspedites antiquus Haeckel.[49])

3. Unterordnung Rhizostomae Cuvier. Wurzelmündige Scheibenquallen.

---

46) Obwohl die craspedoten Medusen die tiefer stehenden Medusen sind, ist der positive Beweis ihres Vorkommens in fossilem Zustand doch noch nicht erbracht. Die relativ am häufigsten auftretende und zugleich am längsten bekannte fossile Meduse, der *Medusites deperditus* Beyrich (*Acalepha deperdita* Beyrich, Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellschaft I, 1849, p. 437—439), wurde von Haeckel, der eine ausführliche Beschreibung der Art gegeben, für eine craspedote Form gehalten und mit den *Trachynemiden* verglichen. Später erklärte sich Brandt gegen letztere Anschauung (Mélanges biolog. tirés du Bullet. de l'Acad. Pétersbourg, Tome VIII, p. 180), welcher Ansicht auch Haeckel neuerdings beigetreten zu sein scheint, da er in seinem Index der fossilen Medusenspecies seinen *Trachynemites deperditus* einfach als *Medusites deperditus* anführt.

47) Haeckel. Ueb. eine sechszähl. foss. Rhizost. u. eine vierzähl. foss. Semaeostomee. Jenaisch. Zeitschr. f. Naturw. Bd. VIII. Jena 1874. S. 323 ff. taf. XI.

48) Haeckel. Ueb. d. foss. Med. d. Jurazeit. Zeitschr. f. wiss. Zool. XIX. Bd. 1869. S. 549 ff. taf. 42. f. 1, 2.

49) Haeckel. Ueber foss. Medusen. Zeitschr. für wiss. Zool. XV. 1865. p. 504—515. taf. 39. f. 2

Familie **Lithorhizostomeae** v. Ammon. (Fossil).

4) Rhizostomites admirandus Haeckel.[50])

5) Rhizostomites lithographicus Haeckel.[51])

Hexarhizites insignis[52]) ist nur die sechszählige Abänderung von *Rhiz. lithographicus*. Zur gleichen Familie oder zur Familie der **Crambessidae** (Unterfam. *Leptobrachidae*) dürfte gehören:

6) Leptobrachites trigonobrachius Haeckel.[53])

Als Medusen von unbestimmter systematischer Stellung sind zu erklären:

7) Medusites deperditus Beyrich.[54])

8) Medusites quadratus Haeckel.[55])

9) Medusites bicinctus Haeckel.

10) Medusites staurophorus Haeckel.

11) Medusites circularis Haeckel.

12) Medusites porpitinus Haeckel.

Aus der Kreide ist bis jetzt eine einzige Art beschrieben:

13) Medusites cretaceus Kner.[56])

---

50) Haeckel. Ueb. zwei neue foss. Med. aus d. Fam. d. Rhizostomiden. Neues Jahrb. f. Min., Geol. u. Pal. 1866. Taf. V und restaur. Bild im Text. Derselbe: Die foss. Med. d. Jurazeit. S. 557. Al. Brandt. Ueber foss. Medus. (Mém. de l'Academ. impér. des scienc. de St. Pétersbourg. VII. Sér. Tom. XVI. 1870. Taf. 1, f. 1). Zittel. Handbuch der Paläontologie. I. Bd., I. pag. 306. fig. 211. Diese Abhandlung S. 123—131. taf. II, fg. II.)

51) Haeckel. loc. cit. Ueb. zwei neue foss. Med. Neues Jahrb. für Min. 1866. S. 282 ff. Tab. VI. Brandt. loc. cit. tab. I, fig. 2. Diese Abhandlung S. 108—122. taf. I, III u. II, fig. I, taf. IV, fig. III.

52) Haeckel. loc. cit. Ueber eine sechszähl. fossile Rhizom. S. 308—323. tab. X und restaur. Bild im Text.

53) Haeckel. loc. cit. Die foss. Med. d. Jurazeit. S. 544—548. taf. 41. Brandt. Ueb. foss. Med. loc. cit. S. 18 ff. tab. II.

Leptobrachites giganteus Haeckel (Syst. d. Medus. S. 647, *Palaegina gigantea* Haeckel 1869. Die foss. Med. d. Jurazeit loc. cit. S. 540—544. tab. XI) ist zweifelsohne aus der Zahl der Medusen zu streichen. Die Versteinerung stellt den Umriss des Kopfes mit den Armen eines Cephalopoden dar. Neben dem Abdruck befindet sich auf der Platte der zugehörige Schulp.

54) Beyrich. Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellsch. 1849. S. 437—439. Haeckel. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XV. p. 506. taf. 39, f. 1. Brandt. Mélang. biolog. tirés du Bullet. de l'Acad. Pétersbourg. Tome VIII. 1871. p. 168—180. Fig. p. 174.

55) Nr. 8—12 sind beschrieben in Haeckel Ueb. d. foss. Med. d. Jurazeit. loc. cit. p. 553 bis 556. Abgebildet sind (taf. 42) *Medusites quadratus, bicinctus, staurophorus* und *porpitinus*.

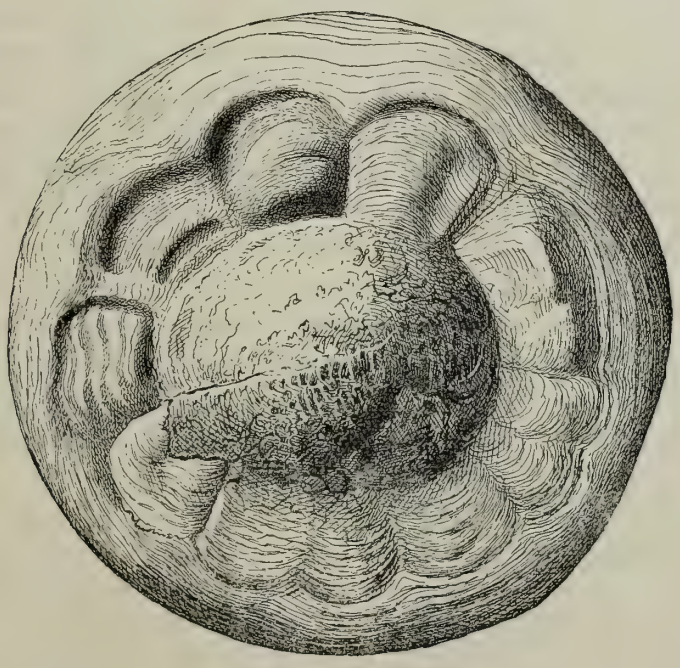
56) Rud. Kner. Notiz über eine Meduse im Feuerstein. Sitzungsber. d. k. k. Akademie d. Wissenschaften zu Wien. Naturw. Classe. 52. Band. I. Jahrg. 1865. Mit Tafel.

Die Versteinerung besteht aus einem Stück Feuerstein, in welchem der deutlich erkennbare Rest einer Meduse eingeschlossen ist. Muskelstreifen, Randlappen, Einbuchtungen mit punktförmigen Körpern und Armtheile sind zu beobachten. Das Thier dürfte wohl in der Familie der Pelagiden seinen Platz finden, wozu die gemeinen Mittelmeerarten *Pelagia noctiluca* Forskal sp. und *Chrysaora mediterranea* Péron et Lesueur gehören. Niszniow (Galizien, Stanislawer Kreis.)

Weitere Abdrücke aus cretacischem Feuerstein erwähnt Zittel in seinem Lehrbuch (S. 306). Die Stücke befinden sich im paläontologischen Museum zu München. Die Deutung derselben als Reste von Quallen wird kaum zu beanstanden sein, wenngleich auf der anderen Seite der absolut sichere Beweis für diese Annahme fehlt. Es möge mir gestattet sein, die scheibenförmigen Körper unter dem Namen

14) Medusites latilobatus

aufzuführen. An den kreisrunden Stücken sind auf der einen Seite breite lappige Abschnitte zu erkennen. (Siehe beistehende Figur, natürliche Grösse.)



Medusites latilobatus.

Der Rand ist etwas aufgeworfen. Auf der Scheibe finden sich theils im randlichen Theile, theils in den erwähnten Abschnitten, welche mit den Eindrücken von gröberen Lappen verglichen werden können, einzelne concentrische Streifen vor. — Aus der oberen Kreide stammend, Feuersteingerölle im Diluvium der Hamburger Gegend.

Ein angeblich auf Helgoland gefundener, später wieder verloren gegangener Medusenabdruck [57]) (aus welcher Formation?), welchen Haeckel Medusites helgolandicus genannt hat [58]), darf wohl keinen Anspruch auf weitere Berücksichtigung machen. Auf einige Angaben aus der älteren paläontologischen Literatur, das Vorkommen von Versteinerungen betreffend, welche für fossile Medusen gehalten worden sind, weist Alex. Brandt hin.[59])

In neuerer Zeit hat nun A. G. Nathorst[60]) in einer längeren, reichlich mit Tafeln ausgestatteten Abhandlung nachzuweisen versucht, dass gewisse in den untercambrischen Schichten (Sandstein) Schwedens (Lugnås) vorkommende Körper auf Medusen zurückzuführen seien. Diese eigenthümlichen Objekte, früher theils als *Spatangopsis costata* Torell und *Agelacrinus? Lindströmi* Linnarsson, theils als *Protolyellia princeps* Torell und *Astylospongia radiata* Linnarsson bezeichnet, betrachtet Nathorst als Abdrücke beziehungsweise Ausgüsse von Medusen und unterscheidet dabei drei Arten, den *Medusites Lindströmi* Linnarsson sp., *Medusites favosus* (= *Protol. princeps* Torell) und *Medusites radiatus* Linnarsson sp. Erstere beiden Formen werden zu den acraspeden Medusen gestellt, der M. favosus ausserdem mit den *Cyaneiden* verglichen. *M. radiatus* soll eine craspedote Meduse, ähnlich den *Aequoriden,* gewesen sein. Ueber seine näheren Ausführungen verweisen wir auf die Abhandlung und beschränken uns hier auf die Bemerkung, dass wir uns von der unzweifelhaften Medusen-Natur der Fossile nicht überzeugen konnten.

---

57) Brandt. Ueb. foss. Med. S. 2.

58) Syst. d. Medus. S. 647.

59) A. Brandt. Ueber fossile Medusen S. 1 und Nachträgliche Bemerkungen über fossile Medusen. Mélanges biologiques tirés du Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome VIII. 1871. S. 168, 169.

60) A. G. Nathorst. Om aftryck af Medusor i Sveriges Kambriska lager. Kgl. Svenska Vet.-Ak. Handling. Bd. 19, Nr. 1. 1881. p. 1—34. Taf. I—VI.

Betreffs des *Med. Lindströmi* spricht schon die häufige Fünftheiligkeit der Körper gegen eine solche Annahme. *Med. favosus* und *radiatus* sind einander jedenfalls sehr nahestehende Formen und dürften am Wahrscheinlichsten als Reste aus einer anderen Abtheilung der Coelenteraten angesehen werden. Aehnliche Gebilde werden von manchen Autoren als fossile Korallen gedeutet [61]). Wir halten es nicht für möglich, dass Thiere von so zartem Baue wie die Aequoriden solche scharfe Abdrücke in sandigem Schlamme hervorbringen können. Keinesfalls darf man daher nach dem vorliegenden Material muthmassen, dass zur cambrischen Zeit die Classe der Medusen schon in ihren beiden Hauptabtheilungen, den Acraspeden und Craspedoten, vertreten war.

Weitere neuerdings aufgefundene Exemplare von Rhizostomites.

Nachdem die vorliegende Arbeit bereits völlig abgeschlossen war, erhielt ich nachträglich während des Druckes dieser Bogen zwei weitere Exemplare von versteinerten Quallen aus der Rhizostomites-Gruppe zur Untersuchung, deren kurze Beschreibung hier noch anhangsweise Platz finden soll. Beide Stücke sind am gleichen Orte, wie die oben besprochenen, nämlich im Pfahlspeunter Steinbruche aufgefunden worden. Das eine Exemplar stellt den Abdruck dar von

Rhizostomites lithographicus. Gleichwie beim anderen Stücke sind auch von diesem Platte und Gegenplatte vorhanden. Die Versteinerung befindet sich auf einer 28 cm breiten, quadratischen Steinplatte. Der Durchmesser der Medusenscheibe, die in ihrem vollen Umfange erhalten ist, beträgt 23,5 cm. Die dem Abdrucke angehörigen Parthien der Reliefplatte nehmen ein etwas höheres Niveau ein als die übrige (randliche) Fläche des Steines. Innerhalb der Scheibe selbst liegen deren einzelne Theile fast in einer Ebene, nur der gefurchte Ring und das Mittelfeld ragen ein wenig hervor. Da die Steinmasse da, wo das Fossil beginnt, in unregelmässiger Weise sich abgelöst hat, ist der peripherische Theil

---

61) z. B. *Alveolites Velaini* Ch. Barrois aus spanischen Devonschichten (Moniello). Charles Barrois. Recherches sur les terrains anciens des Asturies et de la Galice. Lille 1882. p. 220. Pl. 6. f. 5b. (Extr. des mémoires de la société géol. du Nord. tome 2. mém. I.)

des Schirmes, insbesondere der Lappenkranz, nur undeutlich abgedrückt, stellenweise sogar mehr oder weniger beschädigt. Im Uebrigen ist jedoch der Erhaltungszustand ein guter. Der Muskelring, die glatte und höckerige Zone sowie die Armscheibe entsprechen im allgemeinen in ihrer Ausbildung den analogen Theilen an dem ausführlich beschriebenen Exemplare. Verschiedenheiten ergeben sich nur insoferne, als die rauhe Fläche des höckerigen Ringes vom Mittelfeld aus bis fast zum Ringwall sich erstreckt und das Mittelfeld nicht von einer förmlichen Kreislinie begränzt ist. Die einzelnen Felder desselben springen vielmehr (ein oder zwei der Interradialfelder ausgenommen, in welche von der höckerigen Zone aus streifige Auflagerungen hereinreichen) theils bogenförmig, theils mit eckiger Begränzung in den höckerigen Ring vor. An den adradialen Stellen, wo die sekundären Spaltäste des Mundnahtkreuzes enden, sind an der Peripherie der Mundscheibe nach einwärts gezogene Ecken vorhanden. Die perradialen Felder besitzen in ihrem mittleren Theile einen theils gerade verlaufenden, theils leicht im Bogen nach einwärts geschwungenen concentrischen Wulst, von welchem aus, senkrecht darauf gestellt, auf dreien der Felder ein oder zwei Streifen nach der Peripherie des Feldes hin sich ziehen. Die Mundkreuznaht ist mit zackigen Ausfranzungen versehen. Die nierenförmigen Platten sind nur schwach innerhalb der höckerigen Zone angedeutet. Dagegen ist der Ringwall gut ausgebildet. Seine geschlossene Kreislinie hebt sich als eine nicht besonders hohe, aber markant ausgeprägte Leiste hervor, streckenweise läuft sie jedoch auch in einer schwach eingesenkten Furche fort. Vom Ringwall (inneren Kreiskanal) aus sieht man 16 Radialkanäle, die den Radien der drei Ordnungen entsprechen (S. 138, 139), nach der Peripherie zu sich erstrecken. Die Kanäle bilden erhabene, scharfe Streifen, die auf eine Länge von etwas über einem Centimeter deutlich verfolgt werden können. Durch diese prächtige Erhaltung der Radiärgefässe in der Nähe des Ringwalles ist das Stück besonders ausgezeichnet. Maasse: Breite des gefurchten Ringes 2,5 cm, der glatten Zone bis zum Ringwall 3 cm, des höckerigen Ringes vom Ringwall bis zum Mittelfeld ungefähr 3 cm, des ganzen Mittelfeldes circa 7—8 cm. — Das andere Exemplar glaube ich als

Rhizostomites admirandus bestimmen zu müssen. Es sprechen für die Zutheilung zu dieser Art mehrere Umstände, einmal die verhältnissmässig geringe Breite der glatten Zone, ferner die an einem Theile des Randes gut sichtbaren Lappen, die sich ziemlich weit in die Muskelzone hereinziehen, und das Fehlen von stärkeren zackigen Ausbuchtungen an den Furchen des Mundnahtkreuzes. Ausserdem ist die Gestalt der Subgenitalklappen mit ihren breiten vorgelagerten Rändern die gleiche wie am Abdruck des Originalexemplares von Rh. admirandus. Es mag übrigens hiebei noch einmal hervorgehoben werden, dass auf die Trennung der jurassischen Rhizostomiten in zwei Species kein besonderes Gewicht zu legen ist. Doch kann man nach dem vorhandenen Material diese Trennung zur Zeit noch bestehen lassen. Das prächtige Stück ist auf Tafel V dargestellt, welche das Original zur Hälfte verkleinert wiedergibt. Die getreue Abbildung überhebt mich zugleich einer längeren Beschreibung. Für die Erklärung der einzelnen Theile gibt die ausführliche Besprechung der übrigen Exemplare genügenden Aufschluss. Der Muskelring ist vom glatten Ringfelde durch eine deutliche Ringfurche, den peripherischen Kreiskanal vertretend, geschieden. Der äussere Theil der „glatten Zone" wird von ziemlich groben concentrischen Muskelstreifen durchsetzt, die zwar an Zahl, nicht aber an Stärke denen der gefurchten Randzone nachstehen. Nahe am inneren Rande der glatten Zone liegt der Ringwall, der in grosser Schärfe sich erhalten zeigt. Die Fläche der glatten Zone kann man noch etwas über den Ringwall hinaus centralwärts bis etwa an den Rand der ovalen Platten reichen lassen. Die Region des höckerigen Ringes ist schmal und vor den perradialen Feldern nach beiden Seiten hin undeutlich begränzt. Vor den interradialen Feldern breiten sich in dieser Region die Subgenitalklappen mit ihren Randvorlagerungen aus. Sie bilden mit den letzteren zusammen lange und ziemlich breite, quer über die Basis der benannten Felder gelegte, plattenförmige ovale Körper, die beiderseits mit etwas zugespitzten Enden versehen sind und nach einwärts im Bogen zipfelartig vorspringen. Ihr peripherischer Rand verläuft in einer flacheren, concentrischen Bogenlinie. Auf den ovalen Körpern hebt sich nahe dem äusseren Rande ein verdickter Wulst hervor. Diese Wülste entsprechen den „vorgewölbten Mittelpunkten der Genitalhöhlen" Haeckel's auf der Hexarhizites-Platte. Innerhalb

der wulstartigen Hervorragungen tritt, radial gestellt, entweder eine leichte Kammlinie oder, weniger deutlich ausgeprägt, eine breite aber schwach eingesenkte Furche auf. Gemäss meiner früher geäusserten Anschauungen möchte ich die Vorsprünge als Abdrücke des Gallertwulstes der Subgenitalklappen halten. In grösserer Deutlichkeit, als „nierenförmige Platten" isolirt, finden sich letztere, die Subgenitalklappen-Abdrücke, an dem grossen, oben ausführlich besprochenen Exemplare von Rhiz. lithographicus vor. Die beiderseits zu Ecken ausgezogenen und nach dem Centrum hin zipfelartig vorspringenden Randtheile, deren äussere Contouren an dem vorliegenden Stücke eine besonders regelmässige Form (ovale Körper) zeigen, können als die Ausgüsse der Subgenitalhöhlen aufgefasst werden. Die am weitesten nach einwärts gerichteten Parthien derselben schälen sich als dünne Kalkhäutchen von der Oberfläche der Felder des Mittelstückes ab. Wie ich mich bei Gelegenheit eines Besuches des Dresdner Museums überzeugt habe, ist die Ausbildung der entsprechenden Stellen am Originalstück des Rhizostomites admirandus eine der hier geschilderten vollständig analoge. Nur sind die „ovalen Körper" etwas weniger scharf von ihrer Umgebung als bei unseren Stücken abgesetzt. Der erhöhte Streifen auf den Subgenitalklappen fehlt den beiden Dresdner Exemplaren nicht. Haeckel wie Brandt haben ihn auch auf ihren Abbildungen von Rh. admirandus (oben in der Figur) eingezeichnet. Die Felder des Mittelstückes wölben sich an unserem Exemplar gegen ihren oberen Theil hin etwas hervor. Die mittelste Region dagegen ist wieder flach. Die Furchen der Mundkreuznaht sind scharf eingeschnitten. Die primären Schenkel derselben nehmen fast von einem einzigen Punkte der Mitte ihren Ausgang. Maasse: Durchmesser des Schirmes 32 cm. Breite der Randzone 4—4,5 cm. Durchmesser des Mittelstückes 12 cm. Länge der ovalen Körper 6 cm; Breite derselben 3 cm. Länge der primären Schenkel des Mundnahtkreuzes 4 mm.

Nachtrag zum Abschnitt: Systematische Stellung.

Im systematischen Theile bin ich ganz den Anschauungen gefolgt, welche E. Haeckel in seinem grossen Werke in so fasslicher, klarer Weise dargelegt hat. Aus einer vor Kurzem erfolgten Publikation von Carl Claus[62]) ersehe ich, dass dieser Forscher die rhizostomen Medusen abweichend von Haeckel und mehr im Anschluss an die ältere Eintheilung von Agassiz klassificirt. Claus legt weder auf die Erscheinung der Mono- und Gamodemmie hinsichtlich der Systematik Gewicht, noch glaubt er in dieser Beziehung die Stellung der Saugkrausen an den Armen verwerthen zu können. Claus unterscheidet nun unter den Rhizostomeen-Gattungen folgende Familien, welche Gruppirung er jedoch selbst für noch nicht abgeschlossen hält: 1. *Archirhizidae,* 2. *Cassiopeidae*, 3. *Cepheidae,* 4. *Lychnorhizidae*, 5. *Stomolophidae,* 6. *Rhizostomidae,* 7. *Catostylidae*, 8. *Leptobrachidae.*

Die jurassischen Rhizostomiten lassen sich auch nach diesem Eintheilungsprincip keiner der bestehenden Familien unmittelbar einreihen. Die durch sie gebildete erloschene Familie der *Lithorizostomeae* schliesst sich einerseits den *Rhizostomiden* (wegen der Subgenitalklappen und der Muskulatur), andrerseits den beiden letzten Gruppen, die von Haeckel als Familie der *Crambessidae* zusammengefasst werden, an (wegen der breiten kurzen Armscheibe und der vermuthlich langen, dünnen Arme). Die im Körperbau, hauptsächlich in der Bildung der Mundscheibe, deutlich genug ausgesprochene Aehnlichkeit der Jura-Rhizostomen mit den Crambessiden ist insoferne bemerkenswerth, als gerade die letzteren unter allen lebenden Medusen-Familien die divergentesten sind.

Angesichts der erwähnten Verhältnisse darf daher wohl die Annahme berechtigt erscheinen, die jurassischen Rhizostomiten als Mischformen zu betrachten, deren Merkmale heutzutage auf verschiedene Medusenfamilien vertheilt sind.

---

62) Carl Claus. Untersuchung über die Organisation und Entwicklung der Medusen. Prag und Leipzig 1883. S. 57—61.

Inhalts-Uebersicht.

Seite

Einleitung . . . . . 105—106

1. Abschnitt: Beschreibung der neuen Exemplare . . . . . 106—131

Allgemeine Betrachtung. Lokalität . . . . . 106—107

Rhizostomites lithographicus, ganzes Exemplar . . . . . 108—119

Allgemeines 108—109. Randzone (Muskelring und Lappenkranz) 109—111. Glatte Zone mit dem Ringwall 111—113. Höckerige Zone mit den nierenförmigen Platten 113—116. Mittelfeld (Mundkreuznaht, Dreiecksfelder der Armscheibe) 116—119. Fundort und Aufbewahrung 119.

Rhizostomites lithographicus, Mundstück . . . . . 120—122

Rhizostomites admirandus . . . . . 123—130

2. Abschnitt: Vergleich mit den bereits bekannten Formen . . . 131—137

Allgemeine Stellung . . . . . 131—132

Unterscheidung der beiden Arten (Rhiz. admirandus und lithographicus) . . 132—134

Hexarhizites insignis . . . . . 134—137

3. Abschnitt: Deutung der einzelnen Theile . . . . . 137—151

Gefurchter Ring. Muskelzone. Randlappen. Randkörper . . . . . 137—138

Gastrokanalsystem. Aeusserer Ringkanal. Radiärgefässe . . . . . 138—139

Glattes Ringfeld. Ringwall . . . . . 139—142

Mittelfeld (Armscheibe). Mundnahtkreuz. Rhombisches Mittelfeldchen. Saugkrausen. Dreieckige Felder des Mittelstückes . . . . . 142—145

Mundarme . . . . . 145—146

Leptobrachites trigonobrachius . . . . . 146—147

Höckeriges Ringfeld. Pfeiler . . . . . 147—148

Nierenförmige Platten. Subgenitalklappen . . . . . 148—151

Gastrogenitalmembran 151

4. Abschnitt: Entstehung der Abdrücke . . . . . 151—152

5. Abschnitt: Systematische Stellung . . . . . 152—156

Einreihung in das System . . . . . 152—155

Charakteristik der jurassischen Familie Lithorhizostomeae (des Genus Rhizostomites) 155

Schlusswort 156

Anhang.

Aufzählung der bisher beschriebenen fossilen Medusen-Arten . . 156—160

Zwölf Arten aus dem lithographischen Schiefer . . . . . 157—158

Eine Art aus der Kreide und vermuthlicher Medusenabdruck (neue Form: Medusites latilobatus) aus cretacischem Feuerstein . . . . . 159—160

Sonstige Angaben über fossile Medusen (Brandt, Nathorst) . . . . . 160—161

Weitere neuerdings aufgefundene Exemplare von Rhizostomites . 161—164

Rhizostomites lithographicus . . . . . 161—162

Rhizostomites admirandus . . . . . 163—164

Nachtrag zum Abschnitt: Systematische Stellung 165

Tafelerklärung.

Tafelerklärung.

Taf. I. Rhizostomites lithographicus Haeckel. Lichtdruckbild nach dem Original in natürlicher Grösse. Plattenkalk der Solenhofener Schichten, Pfahlspeunt.

Taf. II. Fig. I. Rhizostomites lithographicus Haeckel. Abdruck der Mundscheibe. Lichtdruckbild nach dem Original. (Natürl. Grösse; ebendaher, wie auch Fig. II).

Fig. II. Rhizostomites admirandus Haeckel. Lichtdruckbild nach dem Original.

AS Mundscheibe. Auf derselben das Mundnahtkreuz.
- dp Perradiale Felder der Mundscheibe.
- di Interradiale Felder derselben.

HR Höckeriger oder Tiefer Ring.
- p Abdruck der Pfeiler.
- f Adradiale Furche im tiefen Ring.
- n Nierenförmige Platten (wahrscheinlich die Subgenitalklappen).
- v Breite Randvorlagerungen derselben.

GR Glatter Ring.
- w Ringwall.
- cc Gränze zwischen glatter und gefurchter Zone (Ringkanal).
- ci und ci—o Interradiale Kanäle.
- cp Perradialer Kanal.

FR Gefurchter Ring.
- mc Kranzmuskel.
- l Randlappen.
- o Sinnesbucht.

Taf. III. Rhizostomites lithographicus Haeckel. Dasselbe Exemplar wie auf Taf. I mit den erläuternden Buchstaben.

FR Gefurchtes Ringfeld.
- l Randlappen.
- ll Schmälere Randlappen (Nebenlappen).
- mc Kranzmuskel (M. coronarius).
- z Wellenförmige Furche.

GR Glattes Ringfeld.
- m Muskelstreifen.
- cc Ringkanal.
- cp Stellen an welchen perradiale Kanäle nachweisbar sind.
- ci „ „ „ interradiale „ „ „
- ca „ „ „ adradiale „ „ „
- br Furche, wahrscheinlich den Eindruck eines Armes darstellend.
- sb Quastenförmige Verbreiterung am unteren Ende.
- *w* Ringwall.

HR Höckeriges oder Rauhes Ringfeld.
- p Aeussere Gränze desselben (Ansätze der Pfeiler).
- f Unregelmässige Furchen.
- rh Concentrische Falten.
- n Nierenförmige Platten (wahrscheinlich Abdrücke der Subgenitalklappen).
- *v* Wulstige Vorlagerungen derselben.

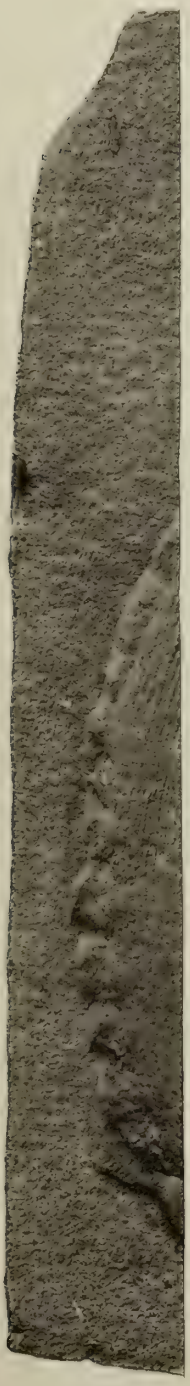
Mittelfeld.
- aa Centrale Verbindungsnaht.
- a^1 Die primären Schenkel der Mundkreuznaht.
- a^2 Die sekundären Schenkel derselben (Armnähte).
- y Vergabelungen der letzteren.
- dp Perradiale Felder des Mittelstückes (concavgleichschenkelige Dreiecke).
- h Höchste Stelle des Abdruckes.
- di Interradiale Felder der Mundscheibe (convexgleichschenkelige Dreiecke).
- r Concentrische Runzeln derselben.
- *ov* Streifen vielleicht von den Falten der Gastrogenitalmembran herrührend.
- st Stylolithen.

Taf. IV. Fig. I. Thysanostoma thysanura Haeckel. Lebende Crambesside aus dem australischen Meer. Copie nach Haeckel. Natürliche Grösse.
- l Randlappen.
- op Perradialer Sinneskolben.
- oi Interradialer „
- cc Ringkanal.
- cp Perradiale Kanäle.
- ci Interradiale „
- m Subumbrellare Muskelstreifen.
- p Pfeiler.
- b Mundarme.
- ah Arm- oder Mundscheibe mit der charakteristischen Mundkreuznaht.
- ig Subgenitalostium.
- ov Gonaden.

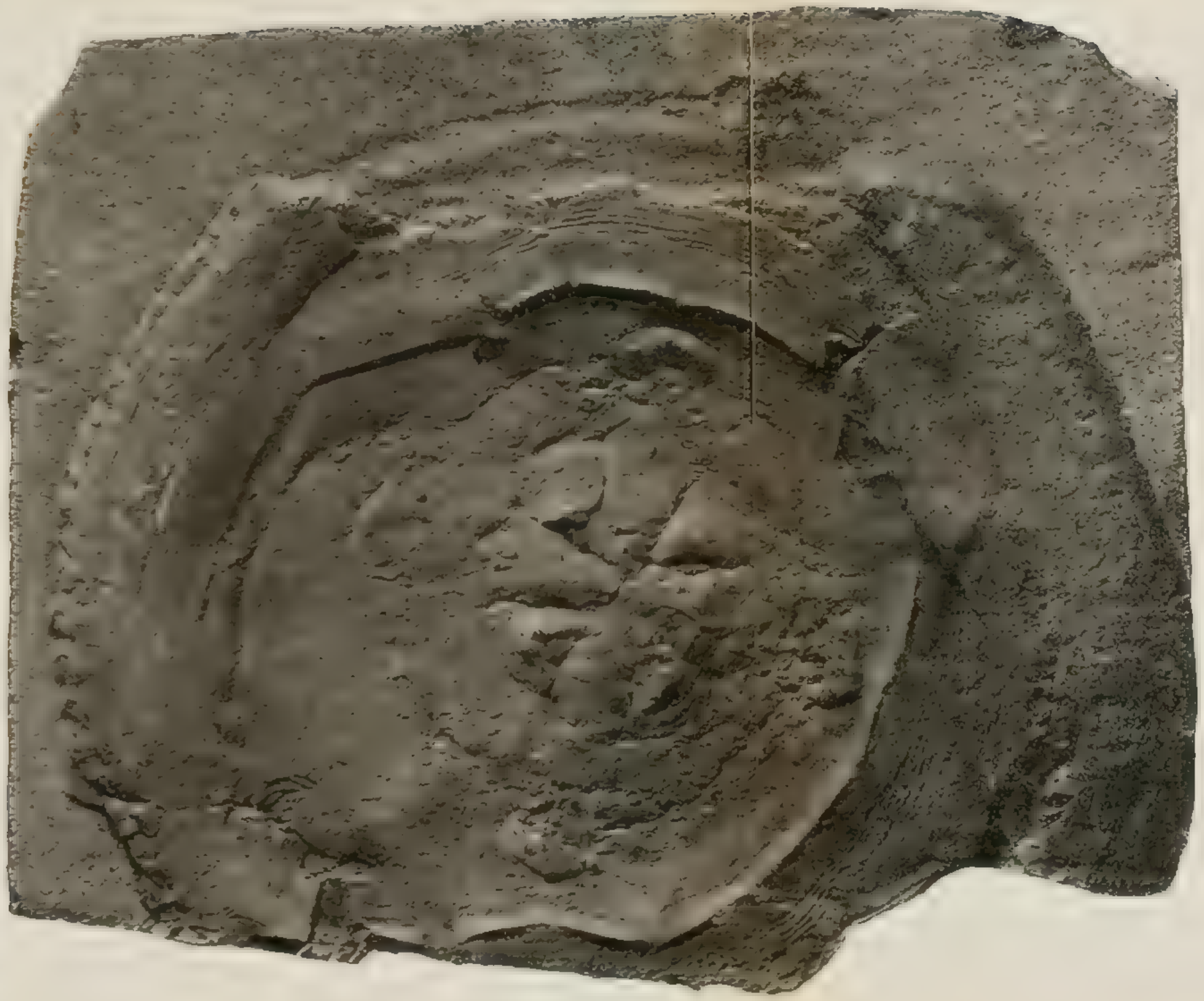
Fig. II. Mundscheibe derselben Art, von der oralen Fläche aus betrachtet. In doppelter natürlicher Grösse. Copie nach Haeckel.

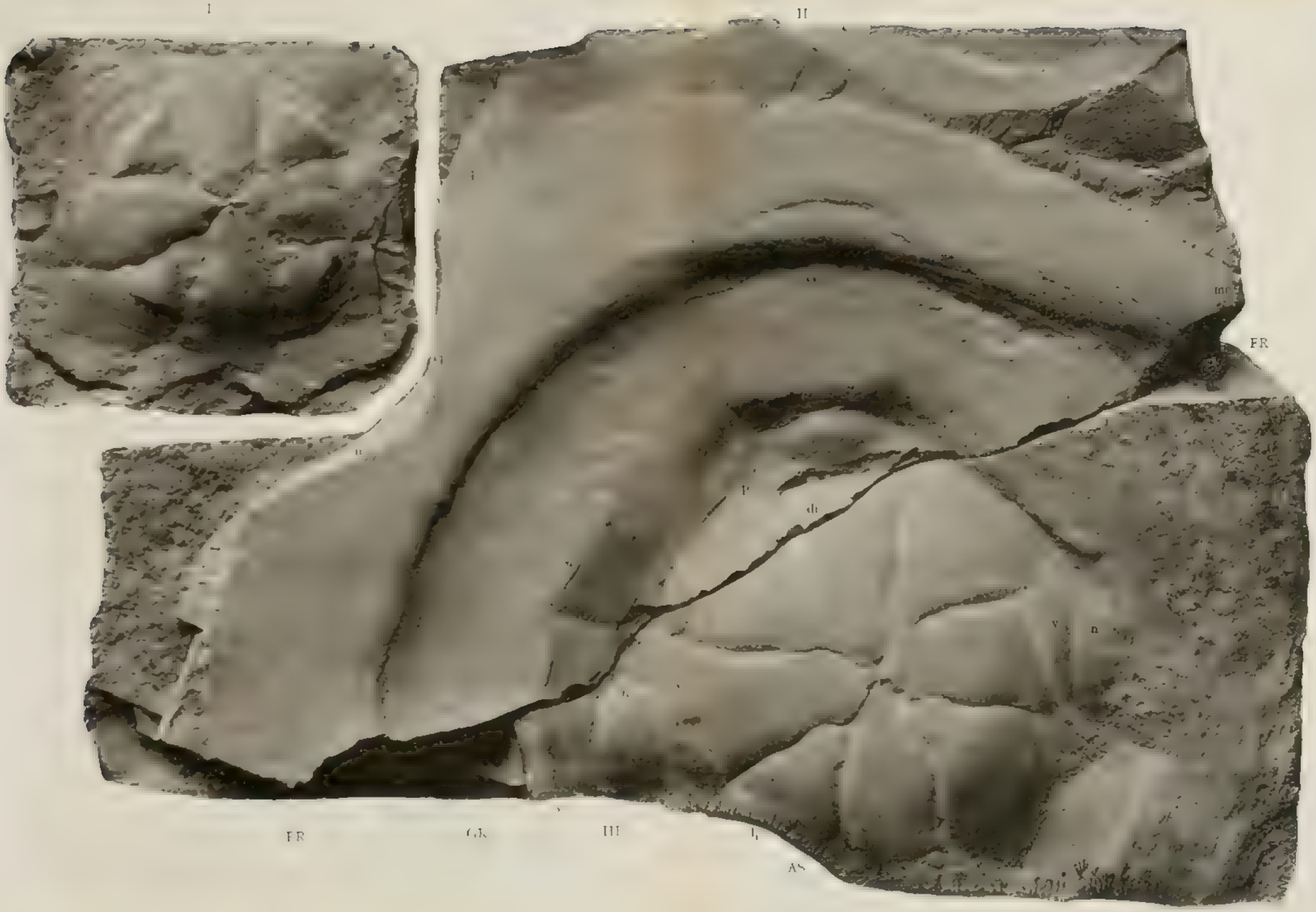
Fig. III. Rhizostomites lithographicus Haeckel. Armscheibe. Das Exemplar von Taf. II Fig. I mit erklärenden Zeichen.
- aa Rhombisches Mittelfeldchen.
- a^1 Primäre Schenkel des Mundnahtkreuzes.
- a^2 Sekundäre Schenkel desselben (Armnähte).
- y Scheinbare Vergabelungen der letzteren.
- dp Perradiale Felder der Armscheibe.
- di I, di II } Interradiale Felder derselben.
- p Ansätze der Pfeiler.
- *v*, k } Kalkige Auflagerungen. (Das *v* in dem dreieckigen Vorsprung am unteren Rande der Figur ist im Text als v_4 aufgeführt).

Taf. V. Rhizostomites admirandus Haeckel. Lichtdruckbild nach dem Original, zur Hälfte verkleinert. Plattenkalk, Pfahlspeunt. (S. 163—164).



Druck von Friedrich Bruckmann in München.




I
II
FR
FR
GK
III
AS

v. Ammon

NATURAL HISTORY.

Lichtdruck von Friedrich Bruckmann in München.

NATURAL HISTORY

Ueber zündende Blitze

im Königreich Bayern

während des Zeitraumes 1833 bis 1882

von

Wilhelm von Bezold.

Mit einer Karte.

Die vorliegende Abhandlung bildet die Fortsetzung und weitere Ausführung einer schon vor 15 Jahren veröffentlichten Untersuchung.[1]) Ich hatte damals einen Einblick gewonnen in die Acten der Brandversicherungsanstalt im Königreich Bayern diesseits des Rheines und mich bei dieser Gelegenheit davon überzeugt, dass in diesen Acten ein reiches und eigenartiges Material zum Studium der Gewitter enthalten sei.

Wie in der Einleitung zu der eben citirten Abhandlung bereits auseinandergesetzt ist, befindet sich in Bayern die Immobiliar-Feuerversicherung ganz in den Händen des Staates, so dass etwa 90 Procent aller vorhandenen Gebäude dieser Anstalt einverleibt sind.

Da nun jedes dieser Gebäude je nach Lage und Beschaffenheit der Gefahr einer Beschädigung durch Blitz mehr oder minder ausgesetzt ist, so bildet auch jedes derselben gewissermassen eine Beobachtungsstation für solche Ereignisse.

Zugleich gewähren die in's Spiel kommenden materiellen Interessen sichere Bürgschaft dafür, dass kein solcher Fall, sowie er einigermassen merklichen Schaden angerichtet hat, unbeachtet bleibe. Vielmehr muss schon wegen der Entschädigungspflicht jeder einzelne Fall genau untersucht und selbstverständlich auch aufgezeichnet werden.

Die Zahl dieser Fälle ist aber eine sehr namhafte, so dass mit grosser Sicherheit statistische Untersuchungen auf dieser Grundlage durchgeführt werden können. Ueberdies zeigt eben die genauere Verfolgung des Gegenstandes, dass schon bei verhältnissmässig geringer Zahl von Fällen eine solch' auffallende Regelmässigkeit an den Tag tritt, dass man nicht einmal auf das Gesetz der grossen Zahlen zu bauen braucht, um trotzdem sehr werthvolle Resultate zu erhalten.

---

1) Ein Beitrag zur Gewitterkunde. Poggdff. Ann. Bd. CXXXVI. S. 513—544.

Einen deutlichen Beleg dafür liefert der Umstand, dass diese Zahlen bereits zu der Erkenntniss rein meteorologischer Thatsachen geführt haben, und dass sich z. B. der eigenthümliche Verlauf der mittleren Temperaturcurven im Juni in ihnen weit auffallender zu erkennen gibt, als in diesen Curven selbst.

Die erwähnte Abhandlung gab auch anderwärts die Anregung zur Aufnahme ähnlicher Untersuchungen. So wurde z. B. eine ähnliche Statistik zündender Blitze für Sachsen von Herrn Gutwasser veröffentlicht, besonders eingehend aber beschäftigte sich Holtz mit diesem Gegenstande[1]).

Diese Arbeiten verfolgen jedoch vorwiegend praktische Ziele, und wird desshalb besonders in dem Buche des Herrn Holtz ganz hervorragendes Gewicht auf die Bauart der Häuser u. s. w. gelegt.

Dagegen betrachte ich die Sache mehr von dem meteorologischen Standpunkte aus, die versicherten Gebäude sind für mich gewissermassen Beobachtungsstationen, von denen freilich nur ein geringer Bruchtheil dann und wann einmal in Funktion tritt.

Diese Auffassung gilt zunächst in voller Strenge für alle auf dieses Material gebauten Untersuchungen über die jährliche Periode. Die jährliche Periode kann nur durch meteorologische Verhältnisse bedingt sein und können Eingriffe des Menschen hiebei durchaus nicht in Betracht kommen[2]).

Etwas anders verhält es sich mit jenem namhaften Wechsel in der Grösse der Blitzgefahr, welcher sich im Laufe der Jahre allmälig vollzieht.

Da wäre der Gedanke nicht ausgeschlossen, dass Aenderungen in der Bauart, also insbesondere der Uebergang zu harter Dachung, wie er sich auf dem Lande mehr und mehr vollzieht, dass ausgedehnte Entwaldungen oder Entwässerungen ihren Einfluss äussern könnten. Das Gleiche liesse sich von dem Schienen- und Drahtnetze erwarten, mit welchem unsere modernen Verkehrseinrichtungen die Erdoberfläche überspinnen

---

1) Ueber die Zunahme der Blitzgefahr und ihre muthmasslichen Ursachen. Greifswald 1880.

2) Selbst wenn, wie dann und wann vorkommen soll, eine verbrecherische Hand den Ausbruch eines heftigen Gewitters benutzen sollte, um Brand zu legen, so dürfte dies, abgesehen von der Seltenheit dieser Fälle, gerade für diesen Punht der Untersuchung kaum in Betracht kommen, da jedenfalls ein heftiges Gewitter niedergehen muss, wenn es möglich sein soll, den Blitz als Brandursache anzugeben.

und das besonders seit Einführung des Telephons in rapidem Wachsthum begriffen ist.

Die Durchführung der Untersuchung wird zeigen, dass all diese Umstände jedenfalls nur in zweiter Linie in Betracht kommen und dass man die Häufigkeit zündender Blitze als einen Maassstab ansehen kann für die Häufigkeit und Heftigkeit der Gewitter im Allgemeinen, vorausgesetzt, dass man diese Häufigkeit stets auf die gleiche Zahl versicherter Gebäude reducirt.

Dass die Bauart im Grossen und Ganzen nicht so sehr in Betracht kommt, geht aus dem einfachen Umstande hervor, dass die Häufigkeit der zündenden Blitze seit fünfzig Jahren in steter Zunahme begriffen ist, obwohl die Zunahme harter Dachungen das Entgegengesetzte sollte erwarten lassen. Auch die geographische Vertheilung der Blitzschläge schliesst sich im Allgemeinen so innig an die aus den Beobachtungen der meteorologischen Stationen gewonnenen Ergebnisse über die Ausgangspunkte und die Verbreitungsweise der Gewitter an, dass der ebengethane Ausspruch mit wenigen Ausnahmen als vollberechtigt erscheinen muss.

Als solche Ausnahmen hat man die Städte zu betrachten mit ihrem Zusammendrängen vieler Gebäude auf einen sehr engen Raum, sowie Gegenden mit ganz ungewöhnlicher Lage der Gebäude, wie z. B. Gebirgsgegenden, bei welchen sich die Ortschaften vorzugsweise in tief eingeschnittenen Thälern befinden, so dass sie von einer Menge anderer dem Blitze ausgesetzter Objekte überragt und dadurch geschützt werden.

Uebrigens wird sich all dies viel besser bei Besprechung der Resultate beleuchten lassen, als hier in der Einleitung.

An dieser Stelle scheint es wichtiger, noch etwas über das Verhältniss dieser Untersuchung zu der älteren zu sagen.

Ich habe die letztere von jeher nur als eine vorläufige, keineswegs aber als eine abschliessende betrachtet und sie desshalb von vornherein so angelegt, dass die Erweiterung und Ausführung sich leicht anfügen liess.

Es wurde desshalb auch schon damals als Grundlage für die Reduction auf die gleiche Zahl von Versicherungsobjecten der Versicherungsstand von 1861 gewählt, der nun, soferne es sich nur um die geographische Vertheilung (mit Ausschluss der Städte, die eine zu bedeutende

Zunahme erfahren haben) auch bei dieser Arbeit benutzt werden konnte, indem 1861 gerade in der Mitte des für diesen Theil der Arbeit berücksichtigten Zeitraumes von 1844 bis 1879 gelegen ist.

Schon als ich die erste Abhandlung veröffentlichte, hielt ich es für sehr wünschenswerth, eine mehr detaillirte kartographische Darstellung beizugeben und anderseits auch das Material ausführlicher zum Drucke zu bringen.

Zu einer solch' umfangreichen Publikation schien mir jedoch damals der Zeitraum, von welchem das Material vorlag, noch nicht hinreichend lang zu sein.

Nachdem aber inzwischen wieder eine Reihe von Jahren und zwar ungemein gewitterreiche hinzu gekommen sind und damit die Zahl der verzeichneten Fälle auf mehr als das Doppelte gestiegen ist, so erachtete ich es für passend, die Arbeit wieder aufzunehmen und sie nun in dem angedeuteten umfassenderen Maassstabe durchzuführen.

Hiebei muss ich vor Allem meinen Dank aussprechen für das freundliche Entgegenkommen des Vorstandes der k. Brandversicherungskammer, des Herrn Regierungsdirektor von Jodlbauer, welcher für die sechs Jahre 1875 bis 1879 die Auszüge aus den Acten anfertigen liess.

Für die früheren Jahre, während deren die Kreisregierungen mit der Wahrnehmung dieser Geschäfte betraut waren und noch keine eigene Behörde dafür niedergesetzt war, wurden mir diese Acten durch Vermittlung des k. statistischen Bureaus zur Verfügung gestellt und die Auszüge durch den damaligen Assistenten der meteorologischen Centralstation Herrn Lieutenant a. D. O. von Bachtenkirch gen. Stachelhausen gemacht.

Bei der schliesslichen Verarbeitung war mir Herr Hauptmann a. D. C. Bayl in höchst dankenswerther Weise behülflich und will ich nicht versäumen, die Verdienste, welche sich diese Herren um die Durchführung der mühsamen und umfangreichen Arbeit erworben haben, besonders hervorzuheben.

Das vorhandene Material wurde nun nach verschiedenen Gesichtspunkten verarbeitet und sowohl die zeitliche als die räumliche Vertheilung sämmtlicher verzeichneten Fälle zum Gegenstande eingehenden Studiums gemacht.

Dabei konnte jedoch dies nicht für den ganzen Zeitraum in gleicher Ausführlichkeit geschehen, indem nicht für alle Jahre detaillirte Angaben vorlagen.

Zunächst waren, wie schon in der älteren Abhandlung bemerkt, Einzelaufzeichnungen erst vom Jahre 1844[1]) an zu benutzen, da die älteren Acten nicht mehr vorhanden waren, desgleichen konnten dieselben für 1874 nicht mehr beschafft werden. Für die Jahre 1880 bis 1882 hätten sich solche Einzelangaben wohl noch beibringen lassen, doch schien es nothwendig, einmal einen bestimmten Zeitpunkt als Endtermin zu wählen, da sonst die Arbeit nie zum Abschlusse gekommen wäre.

So kam es, dass zur Untersuchung der jährlichen Periode, sowie der geographischen Vertheilung nur ein Theil der fünfzig Jahre herangezogen werden konnte und zwar 35. Für die übrigen stunden nur die Gesammtzahlen aller Brandfälle durch Blitz, sowie jene der versicherten Gebäude zur Verfügung, da diese seit 1833 zu regelmässiger Veröffentlichung kommen und zwar früher in dem sogenannten Regierungsblatte, jetzt in dem Ministerialblatte des k. Staatsministerium des Innern.

Das ganze der Untersuchung unterworfene Material gliedert sich demnach wie folgt:

Periode	Brandfälle durch Blitz	Jahresmittel
A 1833—1843	355	32,3
B 1844—1865	1142	51,9
C 1866—1879	1550	103,3
D 1880—1882	401	133,6.

Die Gesammtzahl aller Brandfälle durch Blitz betrug mithin während der 50 Jahre 3448.

Hievon konnten nur die Perioden B und C zu der detaillirten Untersuchung herangezogen werden und sie sollen in der Folge kurzweg als Periode I und II bezeichnet werden.

Doch war auch hier das Material nicht vollkommen lückenlos und

---

1) Streng genommen sollte ich immer schreiben 1843/44 u. s. w., da das Brandversicherungsjahr gleich dem älteren sogenannten Etatsjahr vom 1. Oktober an gerechnet wird, da jedoch die drei letzten Monate des Kalenderjahres sehr arm an Gewittern sind, so kommen sie hier beinahe nicht in Betracht, so dass ich der Einfachheit wegen immer nur jenes Kalenderjahr als Bezeichnung wähle, dem die drei Viertel des Etatsjahres angehören. Uebrigens ist in den Tabellen immer angegeben, welche Zahlen sich auf das Kalenderjahr beziehen und welche nicht.

mussten deshalb bei Periode I 29, bezw. 31 Fälle[1]), bei II aber das ganze Jahr 1874 mit 116 Fällen von der Detailuntersuchung ausgeschlossen bleiben.

Schon diese Uebersicht lässt die bedeutende Steigerung der Blitzgefahr erkennen und diese wird noch auffallender, wenn man die Anzahl der versicherten Gebäude mit in Betracht zieht.

Diese stieg innerhalb des fünfzigjährigen Zeitraumes von 1,020,798 auf 1,374,310 und ist mithin die enorme Steigerung der Brandfälle durch Blitz nur in ganz untergeordneter Weise durch die Vermehrung der Zahl der versicherten Gebäude bedingt. Während im Laufe der dreissiger und Anfang der vierziger Jahre von einer Million Gebäude im Durchschnitte alljährlich nur 32 vom Blitze beschädigt wurden, so fielen Anfangs der achtziger Jahre unter einer Million durchschnittlich 97 dem gleichen Schicksale anheim.

Die Gefährdung durch Blitz hat sich demnach innerhalb des betrachteten Zeitraumes geradezu verdreifacht.

I.

Wie sich diese Steigerung vollzog, übersieht man am besten aus der nachfolgenden Tabelle (I). Sie enthält in der 2. und 3. Columne die Zahl aller vorgekommenen Fälle sowohl nach Kalenderjahren als nach Versicherungsjahren, in der 4. die Anzahl aller versicherten Gebäude nach Tausenden; in der 5. und 6. Columne ist die Anzahl der Fälle auf 1 Million Gebäude reducirt, wobei wiederum die Zahlen sowohl nach Kalenderjahren als nach Versicherungsjahren berechnet und getrennt aufgeführt wurden. Die Zahlenfolge der letzten Reihe ist dann noch einer Abrundung unterworfen worden in der Art, dass aus drei aufeinanderfolgenden Zahlen der 6. Columne: a, b, c Mittel gebildet wurden nach der Formel $b' = \frac{a + 2b + c}{4}$.

Diese Abrundung hat den Zweck, die allzuscharf aus- oder ein-

1) Schon bei der älteren Untersuchung waren für einige Fälle die Anfzeichnungen nicht mehr zu beschaffen und konnte nur aus den vorhandenen Uebersichten entnommen werden, dass ihre Gesammtzahl 29 betrage; nun sind inzwischen noch für 2 Fälle die Notizen zu Verlust gegangen, so dass bei der Detailuntersuchung, soweit sie nicht damals schon durchgeführt war, für Periode I hier nur 1111 Fälle berücksichtigt werden konnten.

springenden Ecken eines den säcularen Verlauf der Gewitterheftigkeit darstellenden Diagramms zu beseitigen und das Gesetzmässige besser hervortreten zu lassen.

Endlich wurden in einer 7. Columne noch die Zahl der Tage, an welchen zündende Blitze vorkamen, zusammengestellt, soferne dies möglich war, und in einer 8. an diesen Zahlen dieselben Abrundungen vorgenommen, jedoch mit Hinweglassung der Decimalen.

In den beiden Columnen, welche die abgerundeten Zahlen enthalten, wurden die Minima durch den Druck hervorgehoben.

Ganz zum Schlusse habe ich auch jene Jahre, in denen die Sonnenflecken Maxima erreichten, durch das beigesetzte Wort Maximum markirt.

Tabelle I.

Jahr	Fälle im Kalenderjahr	Fälle im Rechnungsjahr	Versicherte Gebäude nach Tausenden	Fälle pro Million Gebäude im Kalenderjahr	Fälle pro Million Gebäude im Rechnungsjahr roh	Fälle pro Million Gebäude im Rechnungsjahr abgerundet	Gewittertage im Jahre roh	Gewittertage im Jahre abger.	Maximaljahre der Sonnenflecken
1833	—	17	1021	—	16,6	—	—	—	
1834	—	57	1025	—	55,7	43,3	—	—	
1835	—	48	1061	—	45,3	40,0	—	—	
1836	—	15	1083	—	13,9	**27,5**	—	—	
1837	—	40	1085	—	36,9	27,9	—	—	Maximum
1838	—	26	1085	—	24,0	29,3	—	—	
1839	—	35	1088	—	32,2	31,7	—	—	
1840	—	42	1090	—	38,6	33,7	—	—	
1841	—	28	1095	—	25,6	27,7	—	—	
1842	—	23	1098	—	21,0	22,3	—	—	
1843	—	24	1102	—	21,8	**21,6**	—	—	
1844	24	24	1109	21,7	21,7	24,8	18	—	
1845	40	38	1115	30,0	34,1	34,7	24	24	
1846	53	55	1121	47,4	49,1	39,9	31	26	
1847	32	31	1128	28,6	27,5	32,4	19	20	
1848	29	29	1133	25,6	25,6	25,0	13	**16**	Maximum
1849	27	25	1136	24,0	22,0	**24,0**	20	19	
1850	30	30	1139	26,4	26,4	26,8	23	21	
1851	35	37	1142	30,7	32,4	34,1	19	22	
1852	52	52	1144	45,5	45,5	45,2	27	28	
1853	64	60	1144	55,9	57,7	47,8	37	31	
1854	41	38	1147	36,0	33,1	**42,2**	23	28	
1855	43	52	1152	37,4	45,1	47,5	27	**27**	
1856	75	76	1156	65,2	65,7	58,6	31	31	

Jahr	Fälle im Kalenderjahr	Fälle im Rechnungsjahr	Versicherte Gebäude nach Tausenden	Fälle pro Million Gebäude im Kalenderjahr	Fälle pro Million Gebäude im Rechnungsjahr roh	Fälle pro Million Gebäude im Rechnungsjahr abgerundet	Gewittertage im Jahre roh	Gewittertage im Jahre abger.	Maximaljahre der Sonnenflecken
1857	71	67	1159	61,2	57,8	58,4	33	32	
1858	57	61	1163	49,1	52,5	53,9	31	31	
1859	56	62	1171	47,9	52,9	51,2	30	29	
1860	55	55	1180	46,6	46,6	**50,0**	24	**28**	Maximum
1861	64	64	1183	55,1	54,1	51,9	32	28	
1862	60	63	1193	50,4	52,8	57,1	26	29	
1863	84	83	1206	70,0	68,8	61,3	33	29	
1864	63	67	1226	52,5	54,7	62,4	25	29	
1865	86	89	1244	69,4	71,5	59,3	34	30	
1866	52	50	1264	41,1	39,6	**57,3**	27	32	
1867	96	99	1278	75,1	77,5	76,7	41	39	
1868	136	144	1281	106,2	112,4	92,0	48	45	
1869	99	85	1292	76,6	65,8	76,2	42	39	
1870	60	79	1302	46,1	60,7	**68,8**	24	**30**	Maximum
1871	104	115	1307	79,6	88,0	79,3	30	32	
1872	107	106	1315	81,4	80,6	94,1	46	42	
1873	169	169	1328	127,2	127,2	105,3	45	—	
1874	—	116	1344	—	86,3	104,5	—	—	
1875	161	161	1358	118,6	118,6	98,3	44	—	
1876	89	89	1260	70,7	70,7	90,2	33	36	
1877	129	129	1279	100,9	100,9	89,8	33	35	
1878	113	113	1300	86,9	86,9	91,1	40	38	
1879	119	119	1320	90,2	90,2	**87,5**	30	—	
1880	—	111	1339	—	82,9	93,7	—	—	
1881	—	162	1357	—	119,4	103,5	—	—	
1882	—	128	1374	—	92,4	—	—	—	

Betrachtet man diese Zahlen etwas genauer, so erstaunt man zunächst über die schon oben erwähnte, fast ununterbrochene Zunahme der zündenden Blitze seit dem Ende der dreissiger Jahre.

Aus den beiden letzten Columnen entnimmt man zugleich, dass diese Steigerung einerseits daher rührt, dass die Anzahl der Tage mit zündenden Blitzen eine Vermehrung erfahren hat, anderseits aber und zwar vorzugsweise daher, dass die Anzahl der auf einen Gewittertag — als solche rechne ich hier nur solche, die wenigstens einen Blitzschaden brachten — treffenden Blitzschläge gewachsen ist.

Während der ersten fünf Jahre, die in dieser Hinsicht untersucht werden konnten, wurden an einem Gewittertag von 1 Million Gebäuden im Durchschnitte 1,6 getroffen, während der letzten fünf 2,5.

Es hat sich demnach während des eben erwähnten Zeitraumes sowohl die Häufigkeit als auch die Heftigkeit der Gewitter fortgesetzt vermehrt.

Dabei war jedoch diese Zunahme keine absolut ununterbrochene, sondern sie ging mit periodischem Wechsel Hand in Hand, jedoch so, dass die den Verlauf darstellende Curve als eine Wellenlinie erscheint mit stets ansteigender Mittellinie.

Ich habe auf diesen Umstand schon in der älteren Arbeit hingewiesen, noch nachdrücklicher in einer anderen Abhandlung, welche ich unter dem Titel „über gesetzmässige Schwankungen in der Häufigkeit der Gewitter während langjähriger Zeiträume“ im Jahre 1874 veröffentlicht habe.[1])

Zugleich wurde bemerkt, dass nach Beobachtungen über die Zahl der Gewitter, wie sie an meteorologischen Stationen angestellt wurden, es nicht unwahrscheinlich sei, dass auch in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts die Gewitter häufiger und heftiger gewesen seien, als im dritten und vierten Decennium des laufenden.

Ueberdies fügte ich hinzu, dass es den Anschein habe, als bestehe zwischen der Sonnenfleckenperiode und jener der Gewitterhäufigkeit ein gewisser Zusammenhang.

Diese Bemerkung ist mehrfach missverstanden worden, indem sie als förmliche Behauptung hingestellt wurde, während ich sie nur mit Vorsicht ausgesprochen habe.

Den eigentlichen Schlusssatz der betreffenden Abhandlung habe ich freilich etwas positiver formulirt, doch habe ich das Resultat ausdrücklich nur als ein „wahrscheinlich gemachtes“ bezeichnet. Jedenfalls lag mir der Gedanke vollkommen fern durch diese Arbeit den Zusammenhang zwischen Gewittern und Sonnenflecken wirklich nachgewiesen zu haben, sondern ich wollte nur zeigen, dass lange Beobachtungsreisen die Existenz eines solchen Zusammenhanges sehr wahrscheinlich machen.

1) Sitzungsberichte 1874. S. 284 ff.

Diesen Standpunkt kann ich auch jetzt noch nicht aufgeben, obgleich es der Verfasser des ausgezeichneten Werkes über „Die Beziehungen der Sonnenflecken zu den magnetischen und meteorologischen Erscheinungen der Erde“ [1]) Herr Fritz ist, welcher sich gegen meine Auffassung aussprach.

Dabei gebe ich jedoch gerne zu, dass ich den Schlusssatz der erwähnten Abhandlung etwas zu entschieden formulirt habe.

Dagegen muss ich entschieden betonen, dass ich das hier benutzte, aus den Acten der bayerischen Brandversicherungsanstalt geschöpfte Material für eine derartige Untersuchung als viel zuverlässiger betrachte, als die von den meteorologischen Stationen herrührenden Aufzeichnungen über Gewitter.

Soferne es sich um einzelne Gewitter handelt oder auch um Ermittelung der täglichen oder jährlichen Periode, bilden solche Aufzeichnungen ein vortreffliches Material, wenn man aber darauf Schlüsse bauen will über die Häufigkeit dieser Erscheinungen während längerer Zeiträume, so treten störende Umstände dazwischen, deren Tragweite ich erst völlig zu würdigen weiss, seitdem ich selbst an der Spitze eines meteorologischen Beobachtungsnetzes stehe.

Ein einfacher Wechsel in der Person des Beobachters genügt, um in der Aufzeichnung derartiger Erscheinungen einen vollkommen anderen Maasstab eintreten zu lassen. Besonders gilt dies von älteren Beobachtungsreihen, welche noch nicht unter Einfluss so scharfer Instructionen und unter mangelnder Controlle angestellt wurden.

Während der eine Beobachter jedes Gewitter aufzeichnet, das er von seinem vielleicht freie Aussicht gewährenden Hause auf meilenweitem Umkreise wahrnehmen kann notirt der andere nur, wenn er Donner hörte, wieder ein anderer, wenn zugleich an dem Orte Regen oder Hagel gefallen ist. Auch die Schärfe der Sinne eines Beobachters, seine Lebensgewohnheiten u. s. w. fallen dabei sehr in's Gewicht.

All' diese Störungen sind bei dem Materiale, das ich hier benutze, vollkommen ausgeschlossen und gerade deshalb möchte ich ihm einen so hohen Werth beilegen.

---

1) Haarlem 1878. Vgl. auch F. G. Hahn „Ueber die Beziehungen der Sonnenfleckenperiode zu den meteorologischen Erscheinungen“. Leipzig 1877. S. 157 ff.

Fritz zieht zwar auch die Angaben von Assecuranzlisten mit heran, doch beziehen sie sich meist auf so kurze Reihen und auf so kleine Gebiete, dass man diesen Angaben kein hohes Gewicht beilegen darf.

Ich kann mich deshalb nicht zu der Anschauung bequemen, dass man die Sache bereits als im negativen Sinne erledigt ansehen dürfe.

Deshalb wurden auch in der letzten Columne der Tabelle die Maximaljahre der Sonnenflecken durch Beischreiben des Wortes Maximum hervorgehoben.

Hier sieht man nun ganz deutlich, dass jedem Maximum der Sonnenflecken ein Minimum der zündenden Blitze entspricht, das nur in zwei Fällen (1836 und 1849) um ein Jahr dagegen verschoben erscheint, in beiden Fällen stehen jedoch die Häufigkeitszahlen für die jeweils in Betracht kommenden Jahre einander so nahe, dass man diese Verschiebungen mit vollem Rechte als eine zufällige betrachten kann.

Ausserdem aber trifft zwischen zwei Gewittermaxima immer noch ein zweites Minimum, das sich jedoch mit einer einzigen Ausnahme (1843) immer nur als ein secundäres darstellt. Bei der letzten Periode ist auch noch ein weiteres Minimum (1877) angedeutet, dem ich jedoch wegen seiner Geringfügigkeit keine Bedeutung beimessen möchte.

Die Curve der zündenden Blitze zeigt demnach während des fünfzigjährigen Zeitraumes, für welchen sie jetzt vorliegt, für jede Sonnenfleckenperiode deren zwei.

Zu diesem Resultate kommt auch Fritz bei Untersuchung der Gewitter im indischen Archipel (S. 233), schliesst jedoch daraus, dass dies nicht für einen parallelen oder entgegengesetzten Gang beider Erscheinungen spricht.

Trotzdem ist meines Erachtens ein Zusammhenhang nicht undenkbar. Es wäre ja doch möglich, dass die Gewittererscheinungen gleichzeitig durch zweierlei Ursachen bedingt würden. Erstens durch die Temperaturverhältnisse und zweitens durch unmittelbar elektrische Einflüsse von Seiten der Sonne, wie dies in neuester Zeit von Werner Siemens[1]) ausgesprochen wurde.

---

1) Wiedemanns Ann. Bd. XX. S. 108 ff.

Nun könnte es doch sehr leicht sein, dass diese beiden Ursachen zur Zeit der Sonnenfleckenmaxima im gleichen Sinne, zu jener der Minima im entgegengesetzten, thätig wären und wäre damit eine solche Doppelperiode sehr wohl vereinbar.

Die tägliche und jährliche Periode bieten Analogieen für eine solche Anschauung.

Dort erweist sich die Temperatur als in erster Linie beherrschendes Element. Die tägliche Periode zeigt das absolute Maximum einige Stunden nach dem Maximum der Temperatur, ein viel schwächeres secundäres aber in den frühen Morgenstunden kurz vor dem Minimum der Temperatur, wie ich vor einem Jahre nachgewiesen habe.[1])

Desgleichen erreicht die jährliche Periode ihr absolutes Maximum zur Zeit der höchsten Sommerwärme, oder, wenn man kleinere Perioden z. B. Pentaden in Betracht zieht, Maxima gleichzeitig mit jenen der Temperatur, sie zeigt aber auch ein secundäres Maximum im Januar, also zur Zeit des Temperaturminimums.

Wie man aber auch über den angedeuteten Zusammenhang zwischen Gewittererscheinungen und zündenden Blitzen denken mag, jedenfalls schien es mir zweckmässig, unterhalb der beigegebenen Karte in einem Diagramme nicht nur die Anzahl der zündenden Blitze darzustellen, sondern auch Wolf's Relativzahlen der Sonnenflecken beizufügen, wobei jedoch die Ordinaten für letztere nach abwärts gerechnet sind.

II.

Nach dieser Betrachtung des säcularen Ganges der Erscheinungen, denn von einem solchen darf man doch wohl reden, obgleich sich die Angaben nur auf ein halbes Jahrhundert beziehen, mag nun die jährliche Periode der genaueren Untersuchung unterworfen werden.

Ich gebe zuerst eine Zusammenstellung nach halben und ganzen Monaten und zwar sowohl für die einzelnen Perioden I und II als für beide zusammengenommen.

---

1) Elektrotechnische Zeitschrift. Bd. IV, S. 132 ff.

Tabelle II.

Jährliche Periode der zündenden Blitze nach halben Monaten,

		1844—1865		1866—1879		1844—1879	
Januar	I	12	16	9	9	12	25
	II	4		4		13	
Februar	I	—	1	4	5	4	6
	II	1		1		2	
März	I	2	4	24	30	26	34
	II	2		6		8	
April	I	24	51	25	68	49	119
	II	27		43		70	
Mai	I	65	182	63	170	128	352
	II	117		107		224	
Juni	I	126	244	184	403	310	647
	II	118		219		337	
Juli	I	98	298	182	416	280	714
	II	200		234		434	
August	I	130	248	125	249	255	497
	II	118		124		242	
September	I	43	60	44	59	87	119
	II	17		15		32	
October	I	2	4	17	21	19	25
	II	2		4		6	
November	I	—	—	1	2	1	2
	II	—		1		1	
Dezember	I	1	3	—	2	1	5
	II	2		2		4	
			1111		1434		2545

In dieser Tabelle bedeutet I immer die erste, II die zweite Hälfte des Monats. Die Zahlen selbst aber sind die Summen aller Fälle, welche innerhalb der oben angegebenen 35 Jahre auf den betreffenden Abschnitt des Kalenderjahres trafen. Die Angaben für die Periode 1844—1865 stimmen nicht vollständig mit den früher veröffentlichten überein, da sich in die letzteren einige Druck- oder Rechenfehler eingeschlichen hatten, die hier verbessert wurden.

Durch die Trennung der zwei Beobachtungsperioden ist man in den Stand gesetzt, das Wesentliche und Gesetzmässige von dem Zufälligen zu unterscheiden.

Man sieht, dass die jährliche Periode, wie schon gelegentlich bemerkt, im Grossen und Ganzen zwei Maxima erkennen lässt, von denen das absolute in den Hochsommer, bei Bildung von Monatssummen in den Juli fällt, während ein anderes freilich sehr untergeordnetes auf den Januar trifft, und dass die an Blitzschlägen ärmsten Monate November und Februar sind.

Das sommerliche Maximum zerfällt jedoch, wie ich schon früher nachgewiesen, bei Bildung von Halbmonatssummen oder gar bei Benutzung noch kleinerer Abschnitte sehr kenntlich in zwei, von denen das erste in den Juni, das zweite intensivere in die zweite Hälfte des Juli fällt.

Das letztere ist stabiler als das erstere, so zwar, dass auch schon bei den kürzeren Perioden die erste Hälfte des Juli ein relatives Minimum, die zweite Hälfte aber immer das absolute Maximum aufweist.

Auffallend ist es hiebei, dass die Steigerung an Blitzschäden während der zweiten Periode wesentlich auf die Monate Juni und Juli trifft, während für die übrigen Monate die Summen so ziemlich die gleichen bleiben, was freilich auch schon einer Zunahme entspricht, da die zweite Periode viel kürzer ist als die erste.

Da die Theilung in noch kleinere Zeitabschnitte vorgenommen wurde, so will ich mich gar nicht weiter mit Discussion dieser Tabelle befassen, sondern gleich zu der anderen übergehen, welche die Zusammenstellung nach Pentaden enthält und zwar wieder geschieden nach den zwei Beobachtungsperioden.

Tabelle III.

Jährliche Periode der zündenden Blitze nach fünftägigen Summen.

Pentade	Zündende Blitze 1844—65	1866—79	Sa.	Temperatur	Pentade	Zündende Blitze 1844—65	1866—79	Sa.	Temperatur
Jan. 1.—5.	1	—	1	—3,35	Juli 5.—9.	51	50	101	16,88
6.—10.	11	—	**11**	—3,68	10.—14.	26	68	94	16,94
11.—15.	—	—	—	**—2,97**	15.—19.	51	80	**131**	**17,61**
16.—20.	3	—	3	—3,38	20.—24.	62	50	112	17,23
21.—25.	1	9	**10**	**—2,61**	25.—29.	77	76	**153**	**17,29**
26.—30.	—	—	—	—2,62	30.—3. August	55	60	115	17,25
31.—4. Febr.	—	—	—	—2,18	Aug. 4.—8.	55	72	**127**	16,86
Febr. 5.—9.	—	2	2	**—1,37**	9.—13.	24	15	39	16,82
10.—14.	—	2	**2**	—2,04	14.—18.	56	36	**92**	16,79
15.—19.	1	—	1	—1,02	19.—23.	24	35	59	16,03
20.—24.	—	—	—	—0,14	24.—28.	25	38	63	15,42
25.—1. März	—	1	1	0,87	29.—2. Septbr.	33	38	71	14,79
März 2.—6.	—	—	—	1,30	Sept. 3.—7.	21	12	33	14,45
7.—11.	—	22	**22**	**1,89**	8.—12.	7	16	23	13,70
12.—16.	2	2	4	1,61	13.—17.	9	10	19	12,24
17.—21.	2	2	4	2,02	18.—22.	9	9	18	11,93
22.—26.	—	—	—	2,49	24.—27.	5	2	7	11,47
27.—31.	—	4	4	4,53	28.—2. Octbr.	3	19	22	11,41
April 1.—5.	6	6	12	5,90	Octbr. 3.—7.	1	—	1	10,16
6.—10.	8	9	17	**7,05**	8.—12.	—	—	—	9,12
11.—15.	10	10	20	6,65	13.—17.	1	—	1	8,02
16.—20.	9	12	**21**	7,15	18.—22.	—	—	—	7,29
21.—25.	10	8	18	8,38	23.—27.	1	3	4	6,08
26.—30.	8	23	31	8,90	28.—1. Novbr.	—	1	1	4,51
Mai 1.—5.	7	27	34	9,61	Nov. 2.—6.	—	—	—	3,59
6.—10.	16	19	35	10,59	7.—11.	—	1	1	2,39
11.—15.	41	17	58	11,32	12.—16.	—	—	—	1,01
16.—20.	39	36	**75**	12,15	17.—21.	—	—	—	0,33
11.—25.	31	41	72	13,02	22.—26.	—	1	1	0,41
26.—30.	33	15	48	13,17	27.—1. Dezbr.	—	—	—	**0,52**
31.—4. Juni	36	58	94	14,57	Dezbr. 2.—6.	—	—	—	—0,75
Juni 5.—9.	35	80	115	14,83	7.—11.	1	—	1	—0,78
10.—14.	61	55	**116**	**15,64**	12.—16.	—	—	—	—1,59
15.—19.	42	32	74	15,20	17.—21.	1	1	2	**—1,55**
20.—24.	42	93	**135**	15,92	22.—26.	1	1	2	—2,64
25.—29.	31	76	107	16,15	27. 31.	—	—	—	—3,60
30.—4. Juli	26	79	105	16,40					

Diese Tabelle dürfte besonderes Interesse darbieten, da sie einen Parallelismus mit dem Gange der Temperatur in hohem Grade erkennen lässt. Ich habe deshalb in einer Schlusscolumne die langjährigen Pentadenmittel der Temperatur für München beigefügt [1]) und in beiden letzten Columnen die Maxima durch den Druck hervorgehoben.

Hieraus ersieht man, dass einem Maximum in der Temperaturcurve in allen Fällen ein solches der Gewitterheftigkeit entspricht, wenn es auch bei den untergeordneteren manchmal um eine, im April sogar um zwei Pentaden verschoben erscheint.

Am Auffallendsten ist diese Verschiebung in der 2. Pentade des Januar, wo es in Folge derselben beinahe den Anschein gewinnt, als neigte um diese Jahreszeit gerade die kälteste Pentade besonders zur Gewitterbildung, während sonst das Gegentheil stattfindet.

Die Wahrheit wird wohl sein, dass Gewitter häufig mit Witterungsumschlägen zusammenhängen. und dass sich solche, wenn regelmässig auftretend, in der Temperaturcurve durch plötzliche Ein- oder Ausbiegungen merkbar machen müssen.

Schliesslich wurde in Tabelle IV (S. S. 188 und 189) auch noch eine Zusammenstellung nach Kalendertagen gemacht, d. h. langjährige Tagessummen gebildet, um das Material ja nach allen Seiten hin auszunützen. Der erste Theil dieser Zusammenstellung, d. h. soweit er sich auf den Zeitraum 1844 bis 1865 bezieht, wurde schon vor längerer Zeit von Herrn Dr. C. Lang zu einem besonderen Zwecke gemacht, kommt jedoch hier zum ersten male zur Veröffentlichung.

Selbst in diesen an sich doch so unbedeutenden Summen für einzelne Kalendertage findet der Zusammenhang mit den langjährigen Mitteln der Temperatur noch vielfach deutlichen Ausdruck. So folgt z. B. das Maximum der zündenden Blitze am 6. Januar auf ein solches der Temperatur am 4., jenes vom 21. auf ein Temperaturmaximum am 20. Desgleichen zeigen beide Gruppen von Erscheinungen ein wohlausgesprochenes Maximum am 8. März. Die Maxima der Blitzschäden vom 6., 14., 20., 23. Juni, vom 3., 10., 18., 23., u. 28. Juli, vom 5. u. 6. August

1) S. C. Lang Siebenundsechszigjährige Beobachtungen zu München. Beob. d. met. Stat. im Königreich Bayern. IV. Jahrg. 1882. S. 176.

fallen zusammen mit solchen der langjährigen Tagesmittel der Temperatur oder sind nur um einen oder höchstens zwei Tage gegen solche verschoben.

Bei den in der nachstehenden Tabelle enthaltenen langjährigen Tagessummen kommen, wie leicht zu erwarten, einzelne besonders heftige Gewitter unverhältnissmässig stark in Betracht.

So beziehen sich z. B. die 10 Fälle, welche unterm 6. Januar aufgezählt sind, sämmtlich auf ein einziges Gewitter, welches an dem genannten Kalendertage des Jahres 1856 Bayern nördlich der Donau durchzog. Desgleichen gehören die 9 Fälle des 21. Januar alle dem entsprechenden Tage des Jahres 1875 an.

Dagegen waren es beim 8. März, der sich auch durch die hohe Zahl zündender Blitze vor den übrigen Tagen dieses Monats hervorthut, zwei Gewitter, welche ihm zu dieser eigenartigen Stellung verholfen haben, nämlich ein solches im Jahre 1868 und ein zweites im Jahre 1878, welche beide je 10 Brände zur Folge hatten.

Der 12. Mai kommt besonders durch ein Gewitter vom Jahre 1853 unter die Reihe der ausgezeichneten Tage.

Solche Tage, die durch die ungewöhnlich hohe Zahl zündender Blitze in's Gewicht fielen, waren unter anderen: der 20. Juni 1877 mit 17, der 23. Juni 1866 mit 13, der 29. Juni 1879 mit 23 Fällen, ferner der 4. Juli 1875 mit 13, der 10. Juli 1868 ebenfalls mit 13, der 19. Juli 1871 mit 16, der 28. Juli 1873 mit 14 und der 23. August 1879 mit 15 Fällen. Sogar der sonst an Gewittern so arme October hat einen solchen Tag aufzuweisen, nämlich den 2. October 1869 mit 16 Brandfällen durch Blitz.

Diese Betrachtungen legen den Gedanken nahe, dass der oben besprochene Zusammenhang zwischen den langjährigen Tagesmitteln der Temperatur und der Anzahl der auf die einzelnen Kalendertage treffenden zündenden Blitze eben davon herrühre, dass solche Tage mit ungewöhnlich heftigen Gewittern, die meist ungewöhnlich hohen Temperaturen folgen, sich eben auch noch in den langjährigen Zusammenstellungen der Temperatur geltend machen.

Da aber einzelne Tage oder wenigstens einzelne Pentaden in den beiden hier getrennt betrachteten Perioden besonders hervortreten, so ist doch auch die andere Annahme nicht unzulässig, dass es sich hier

Tabelle IV.

Jährliche Periode der

	Januar			Februar			März			April			Mai			Juni		
	I	II	Sa.	I	II	Sa.	I	II	Sa.	I	II	Sa.	I	II	Sa.	I	II	Sa.
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	2	—	5	5	2	11	13
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	1	1	2	4	2	6
3	1	—	1	—	—	—	—	—	—	1	3	4	3	7	10	9	13	22
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	3	1	4	5	6	17	23
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	10	12	5	21	26
6	10	—	10	—	1	1	—	—	—	3	—	3	3	2	5	5	22	27
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	3	1	2	2	10	10	20
8	1	—	1	—	—	—	—	21	21	1	5	6	1	3	4	6	6	12
9	—	—	—	—	1	1	—	1	1	1	1	2	5	4	9	9	21	30
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	1	3	7	8	15	9	19	28
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	5	6	3	—	3	16	9	25
12	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	19	4	23	6	6	12
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	3	3	8	11	11	12	23
14	—	—	—	—	1	1	—	2	2	2	5	7	10	1	11	19	9	28
15	—	—	—	—	—	—	2	—	2	4	—	4	6	4	10	9	6	15
16	1	—	1	—	—	—	—	—	—	3	1	4	8	8	16	3	10	13
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	4	6	10	16	6	22
18	—	—	—	—	—	—	2	2	4	—	8	8	2	10	12	5	9	14
19	—	—	—	1	—	1	—	—	—	1	—	1	11	11	22	9	1	10
20	2	—	2	—	—	—	—	—	—	5	1	6	14	1	15	20	20	40
21	—	9	9	—	—	—	—	—	—	2	1	3	4	23	27	4	15	19
22	1	—	1	—	—	—	—	—	—	2	2	4	3	6	9	10	6	16
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	3	3	5	8	6	30	36
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14	2	16	2	22	24
25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	3	8	7	5	12	9	26	35
26	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	1	7	6	3	9	2	1	3
27	—	—	—	—	1	1	—	2	2	1	8	9	3	7	10	6	12	18
28	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	8	2	10	8	5	13
29	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	8	9	4	1	5	6	32	38
30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	6	12	2	14	12	24	36
31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15	15	30	—	—	—
Sa.	16	9	25	1	5	6	4	30	34	51	68	119	182	170	352	234	403	647

Tabelle IV.

zündenden Blitze nach Tagen.

Juli			August			September			October			November			Dezember			
I	II	Sa.	I	II	Sa.	I	II	Sa.	I	II	Sa.	I	II	Sa.	I	II	Sa.	
4	11	15	9	13	22	7	—	7	1	—	1	—	—	—	—	—	—	1
—	14	14	14	4	18	—	8	8	—	17	17	—	—	—	—	—	—	2
8	15	23	15	6	21	4	3	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
2	15	17	14	6	20	7	4	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
2	10	12	16	23	39	8	—	8	1	—	1	—	—	—	—	—	—	5
12	9	21	12	15	27	2	5	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6
2	13	15	6	14	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7
15	11	26	7	14	21	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8
20	7	27	5	3	8	1	9	10	—	—	—	—	1	1	—	—	—	9
9	19	28	4	1	5	3	2	5	—	—	—	—	—	—	1	—	1	10
1	10	11	3	3	6	2	1	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	11
6	5	11	7	2	9	1	3	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	12
6	7	13	5	6	11	2	6	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13
4	27	31	7	15	22	1	1	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14
7	9	16	6	—	6	5	1	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15
13	11	24	13	2	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16
13	11	24	23	12	35	1	2	3	1	—	1	—	—	—	—	1	1	17
11	26	37	7	7	14	2	1	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18
7	23	30	6	6	12	1	2	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19
8	13	21	1	1	2	1	2	3	—	—	—	—	—	—	1	—	1	20
5	—	5	5	6	11	3	3	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	21
15	1	16	3	19	22	2	1	3	—	—	—	—	—	—	1	—	1	22
28	13	41	9	3	12	2	—	2	1	—	1	—	—	—	—	—	—	23
6	23	29	7	8	15	3	2	5	—	—	—	—	1	1	—	1	1	24
12	18	30	1	4	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	25
13	8	21	1	10	11	—	—	—	—	3	3	—	—	—	—	—	—	26
12	16	28	2	2	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27
22	29	51	14	14	28	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28
18	5	23	8	10	18	2	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	29
12	16	28	4	3	7	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30
5	21	26	14	17	31	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	31
298	416	714	248	249	497	60	59	119	4	21	25	—	2	2	3	2	5	Sa.

wenigstens theilweise um regelmässig wiederkehrende, wenn auch nicht an bestimmte Tage gebundene, so doch im Mittel um dieselben schwankende, wirklich gesetzmässige Vorgänge handle, welche in ähnlicher Weise wie die Kälterückfälle im Mai oder Juni auf tiefer liegende Ursachen zurückzuführen sind.

III.

Als Hauptpunkt der ganzen Untersuchung ist jene über die geographische Vertheilung zu betrachten.

Das Resultat derselben ist in beigegebener Karte niedergelegt.

Zur Herstellung derselben wurden zunächst die Blitzschläge nach den einzelnen Verwaltungsbezirken ausgeschieden, alsdann unter Benutzung der Anzahl der versicherten Gebäude ermittelt, wie viel von je 1000 versicherten Gebäuden während des untersuchten Zeitraums vom Blitze getroffen wurden.

Dabei wurde die Untersuchung sowohl für die beiden Perioden 1844 bis 65 (I) und 1865—79 mit Ausschluss von 1874 (II) als auch für beide zusammengenommenen getrennt durchgeführt und das Resultat derselben in der Uebersichtstabelle V zusammengestellt.

Eine solche Trennung der beiden Perioden schien deswegen unerlässlich, da nur dadurch anschaulich gemacht werden konnte, in wie hohem Grade die einzelnen Bezirke ihren Charakter hinsichtlich der Gefährdung durch Blitz beibehalten haben.

Wenn man bedenkt, wie klein die Zahlen im Allgemeinen sind, welche auf einen Verwaltungsbezirk treffen, so zeigt das Festhalten der Blitzgefährdung, dass es sehr zwingende Ursachen sein müssen, welche dies bewirken, und dass Zufälligkeiten in weit höherem Maasse ausgeschlossen sind, als man es bei einem Materiale, wie das hier benutzte, wohl erwarten könnte.

Ueber die Anlage der Tabelle muss ich noch das Folgende bemerken.

Im Jahre 1868 war ich nicht in der Lage, der Arbeit eine grössere in's Einzelne gehende Karte beizugeben. Ich entschloss mich deshalb zu

einer Vereinfachung und gruppirte die einzelnen Verwaltungsbezirke je nach ihrer Gefährdung in grössere Gebiete, die alsdann in einem kleinen Kärtchen durch mehr oder minder starke Schraffirung ausgezeichnet wurden.

Um nun die Vergleichbarkeit mit der älteren Abhandlung zu erhalten, schien es zweckmässig, für die Uebersichtstabelle diese Theilung in Gebiete festzuhalten, wenn auch nicht in Abrede gestellt werden soll, dass bei der Abgrenzung derselben der Willkür mancher Spielraum gelassen war.

Dies ist jedoch hier vollkommen gleichgültig, da die detaillirte Karte beigegeben werden konnte. Jedenfalls war durch diese Theilung in Gebiete ein vollständiges Auseinanderreissen benachbarter Verwaltungsbezirke besser vermieden, als wenn ich durchaus etwa alphabetischer Ordnung hätte folgen wollen.

Die Uebersichtstabelle enthält nun 6 Columnen und in diesen unter p' die Anzahl der in der ersten Periode in dem betreffenden Bezirke vorgekommenen Blitzschläge, unter p'' die gleiche Angabe für die zweite Periode.

Unter n steht die Zahl der versicherten Gebäude. Die letzten drei Columnen q', q'' und $q' + q''$ aber enthalten die Werthe $q' = \frac{1000\,p'}{n}$ $q'' = \frac{1000\,p''}{n}$ und endlich die Summe von beiden.

Bei diesen drei letzten Columnen sind eigentlich nur die in ein und derselben stehenden Zahlen untereinander streng vergleichbar, da sich die Zahlen q' auf 22 Jahre und auf eine Gesammtzahl von 1113 [1]), die q'' hingegen auf 13 Jahre mit einer Gesammtzahl von 1434 Fällen beziehen.

Um eine strenge Vergleichung zu ermöglichen, hätte man demnach entweder auf den gleichen Zeitraum, also z. B. auf ein Jahr, reduciren und anstatt q' und q'' die Werthe $\frac{q'}{22}$ und $\frac{q''}{13}$ einführen müssen, oder

1) Hier sind die beiden Fälle noch berücksichtigt, von denen oben (S. 176) bemerkt worden war, dass die auf das Datum bezüglichen Angaben zu Verlust gegangen sind, mithin hat man hier 1113 anstatt 1111.

men hätte suchen müssen, wie viele von der Gesammtzahl aller einer Periode angehörigen Fälle auf 1000 Gebäude des betreffenden Bezirkes trafen, d. h. man hätte die Werthe $\frac{q'}{1113}$ und $\frac{q''}{1434}$ bilden müssen.

Der zu erzielende Gewinn schien aber nicht im Verhältnisse zu stehen zu dem Mehraufwand an Mühe, den solche Reductionen gekostet hätten. Um sich davon zu überzeugen, dass die einzelnen Bezirke im Allgemeinen ihren Charakter in der Gefährdung durch Blitz nicht verändert haben, genügt es, sich daran zu erinnern, dass die Zahl der in der zweiten Periode verzeichneten Blitzschläge ungefähr in dem Verhältniss $\frac{14}{11}$ gewachsen ist.

Die Zahlen der versicherten Gebäude wurden bei den ländlichen Bezirken ausschliesslich nach dem Stande von 1861 in Rechnung gezogen, da, wie schon Eingangs bemerkt, dieses Jahr gerade in der Mitte der untersuchten Periode liegt und das Ziehen von Mittelwerthen aus dem Stande in verschiedenen Jahren grosse Mühe verursacht hätte, ohne das Resultat irgend nennenswerth zu beeinflussen.

Nur bei den Städten, deren Versicherungstand sich ungemein rasch verändert, wurden nur für die erste Periode die Angaben für 1861, für die zweite aber die Mittelwerthe aus dem Versicherungsstande von den Jahren 1861 und 1879 benutzt und diese Mittelwerthe sind es, welche man unter n an zweiter Stelle angeführt findet.

Durch diese Wahl des Versicherungsjahres 1861 als Grundlage für den Versicherungsstand der einzelnen Bezirke war aber zugleich die Benutzung der damals geltenden administrativen Eintheilung geboten.

Diese Eintheilung des Königreiches in Verwaltungsbezirke war nämlich seit diesem Zeitpunkte manchfachen Veränderungen unterworfen, und steht die Eintheilung in die hier aufgeführten Landgerichte, insbesondere soweit es Fragen der Verwaltung betrifft, heut zu Tage nicht mehr in Kraft.

Es wurden vielmehr im Jahre 1862 immer mehrere solche Bezirke zu einem einzigen sogenannten Bezirksamte zusammengeworfen, so dass die einzelnen Verwaltungsbezirke jetzt viel grösser, ihre Gesammtzahl viel kleiner ist.

Aber gerade mit Rücksicht auf diesen Umstand schien es mir hier zweckmässig, die alte Eintheilung zu benutzen.

Wenn die einzelnen Bezirke, für welche die Zahlen der Gefährdung ermittelt werden, ziemlich klein sind, so hat man weniger zu befürchten. dass charakteristische Eigenthümlichkeiten bestimmter Gegenden verwischt werden, und wenn dann trotz der Kleinheit der einzelnen Bezirke die Zahlen der Gefährdung in benachbarten Bezirken einander nahe stehen, oder gesetzmässige Uebergänge zeigen, dann hat man darin den deutlichsten Beleg, dass hier nicht Zufälligkeiten den Ausschlag geben, sondern wirklich tiefer liegende Ursachen.

In gleichem Sinne wird es sprechen, wenn die einzelnen Bezirke in jeder der beiden Perioden den nämlichen Charakter der Gefährdung zeigen. Dass aber sowohl das eine als das andere der Fall ist, ersieht man aus der nachstehenden Tabelle oder in mancher Hinsicht noch leichter aus der später zu besprechenden Karte.

Ich lasse hier zunächst die Tabelle folgen und vereinige dabei Bezirke annähernd gleicher Gefährdung in die nämlichen zusammenhängenden Gebiete, welche ich in der älteren Arbeit gebildet habe.[1])

Tabelle V.

Uebersicht über die Vertheilung der zündenden Blitze auf die einzelnen Verwaltungsbezirke des Königreichs

unter Zugrundelegung der im Jahre 1861 geltenden administrativen Eintheilung und des damaligen Versicherungsstandes.

I.

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″		p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Alzenau	1	0	3092	0,3	0,0	0,3	Bayreuth St.	2	—	3063	0,7	—	2,1
Amorbach	1	2	2303	0,4	0,9	1,3		—	5	3585	—	1,4	
Arnstein	4	6	5910	0,6	1,0	1,6	„ Ldg.	5	10	5218	0,9	1,9	2,8
Aschaffenbg. St.	2	—	1867	1,0	—	1,0	Baunach	1	2	3360	0,3	0,6	0,9
	—	0	2254	—	0,0		Bischofsheim	1	5	6473	0,1	0,8	0,9
„ Ldg.	1	3	5166	0,2	0,6	0,8	Brückenau	2	7	4349	0,4	1,6	2,0
Aub	3	3	4383	0,6	0,6	1,2	Burgebrach	3	6	2463	1,2	2,4	3,6
Bamberg St.	5	—	5432	0,9	—	1,3	Coburger Gebiet	3	—	1511	1,9	—	1,9
	—	4	6341	—	0,4		Culmbach	0	8	5820	0,0	1,4	1,4
„ I. Ldg.	4	1	4058	0,9	0,2	1,1	Dettelbach	2	10	4525	0,4	2,2	2,6
„ II.	1	3	4547	0,2	0,7	0,9	Ebermannstadt	0	0	3790	0,0	0,0	0,0

1) Bei der Ueberarbeitung wurde entdeckt, dass in der älteren Publikation bei Lohr, Tirschenreuth, Aichach und Landau a. J. je ein Fall zu wenig, bei Haag aber 4 zu viel angegeben waren. Diese Unrichtigkeiten sind hier berichtigt.

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Ebern	4	3	4156	0,9	0,7	1,6
Eltmann	2	3	4349	0,4	0,7	1,1
Euerndorf	1	2	3738	0,2	0,6	0,8
Forchheim	1	13	5032	0,2	2,5	2,7
Gemünden	0	4	4183	0,0	0,9	0,9
Gerolshofen	5	3	5285	0,9	0,6	1,5
Hammelburg	3	2	4507	0,6	0,5	1,1
Hassfurt	1	3	5397	0,2	0,5	0,7
Hilters*	3	—	4440	0,7	—	0,7
Höchstadt a. A.	2	7	4688	0,4	1,5	1,9
Hofheim	4	8	7501	0,5	1,0	1,5
Hollfeld	6	2	3741	1,6	0,5	2,1
Karlstadt	1	4	5910	0,2	0,6	0,8
Kirchenlamitz	2	7	3261	0,6	2,2	2,8
Kissingen	0	6	3695	0,0	1,6	1,6
Kitzingen	1	1	4490	0,2	0,2	0,4
Klingenberg	0	2	3772	0,0	0,5	0,4
Königshofen	4	9	8641	0,4	1,0	1,4
Kronach	1	11	6496	0,1	1,7	1,8
Lichtenfels	4	7	7431	0,5	0,9	1,4
Lohr	2	3	3018	0,6	1,0	1,6
Ludwigstadt	3	4	2917	1,0	1,3	2,3
Marktbreit	1	2	3077	0,3	0,6	0,9
Markheidenfeld	2	2	5082	0,4	0,4	0,8
Markstefft	2	0	2413	0,8	0,0	0,8
Mellrichstadt	6	6	7369	0,8	0,8	1,6
Miltenberg	2	8	3498	0,6	2,3	2,9
Münnerstadt	0	3	6463	0,0	0,4	0,4
Naila	4	5	5211	0,7	1,0	1,7
Neustadt a. S.	1	6	4730	0,2	1,2	1,4
Nordhalben	0	2	1792	0,0	1,1	1,1
Obernburg	0	2	5102	0,0	0,3	0,3
Ochsenfurt	5	4	5321	0,9	0,7	1,6
Orb*	2	—	2596	0,8	—	0,8
Pottenstein	2	1	3911	0,5	0,2	0,7
Rothenbuch	0	0	2893	0,0	0,0	0,0
Rothenfels	1	5	4633	0,2	1,1	1,3
Scheinfeld	2	8	3103	0,6	2,6	3,2
Schöllkrippen	0	1	2463	0,0	0,4	0,4
Schweinfurt St.	0	—	2943	0,0	—	0,0
	—	0	3362	—	0,0	
„ Ldg.	2	9	6910	0,3	1,2	1,5
Schesslitz	2	3	5280	0,3	0,6	0,9
Selb	0	3	2233	0,0	1,3	1,3
Sesslach	4	5	3395	1,2	1,5	2,7
Stadtprozelten	0	2	3588	0,0	0,5	0,5
Stadtsteinach	1	9	4576	0,2	1,9	2,1
Thiersheim	3	6	2945	1,0	2,0	3,0
Thurnau	1	2	3343	0,3	0,6	0,9
Uffenheim	3	4	5618	0,5	0,7	1,2
Volkach	7	9	5105	1,3	1,7	3,0
Weihers*	4	—	2676	1,5	—	1,5
Weidenberg	0	2	2279	0,0	0,8	0,8
Weismain	3	0	3799	0,8	0,0	0,8
Werneck	3	6	7283	0,4	0,8	1,2
Wiesentheid	0	4	3488	0,0	1,1	1,1
Wunsiedel	2	4	3291	0,6	1,2	1,8
Würzburg St.	5	—	4504	1,0	—	2,0
	—	6	5960	—	1,0	
„ r.M.Ldg.	2	3	6328	0,3	0,4	0,7
„ l.M.	1	5	7134	0,1	0,7	0,8
Gebiet I	164	—	340443	0,47	—	1,39
	—	316	334431	—	0,92	

II.

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Berneck	5	3	4526	1,1	0,6	1,7
Hof St.	0	—	1687	0,0	—	0,0
	—	0	2284	—	0,0	
Hof Ldg.	8	6	4622	1,7	1,3	3,0
Münchberg	14	7	5544	2,5	1,2	3,7
Rehau	12	8	3888	3,1	2,0	5,1
Gebiet II	39	—	20267	1,92	—	3,06
	—	24	20864	—	1,14	

III.

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Ansbach St.	0	—	2148	0,0	—	1,1
	—	3	2624	—	1,1	
„ Ldg.	8	15	4281	1,8	3,5	5,3
Bibart (Markt-)	4	1	3982	1,0	0,2	1,2
Cadolzburg	4	4	4010	0,9	0,9	1,8
Dinkelsbühl St.	3	—	931	3,2	—	6,2
	—	3	1005	—	3,0	
„ Ldg.	5	14	3061	1,7	4,5	6,2
Erlangen St.	2	—	2548	0,8	—	2,1
	—	4	3104	—	1,3	
Erlangen Ldg.	7	15	5218	1,3	2,9	4,2
Erlbach (Markt-)	2	6	3892	0,5	1,5	2,0
Feuchtwangen	6	3	3880	1,6	0,7	2,3
Gräfenberg	7	5	4406	1,6	1,1	2,7
Herrieden	4	8	3622	1,1	2,2	3,3
Herzogenaurach	5	5	3163	1,6	1,6	3,2
Lauf	4	14	4037	1,0	3,4	4,4
Leutershausen	4	5	3388	1,2	1,4	2,6
Neustadt a. A.	10	8	5404	1,9	1,4	3,3

Anmerkung. Die mit * bezeichneten Bezirke wurden 1866 an Preussen abgetreten und kommen deshalb in Periode II nicht mehr vor; die ihnen entsprechenden Versicherungszahlen sind deshalb auch in der nur auf Periode II bezüglichen Schlusssumme nicht mehr enthalten.

	p″	p″	n	q′	q″	q′+q″		p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Rothenburg St.	0	—	1471	0,0	—	0,0	Schwabach Ldg.	4	9	3559	1,2	2,4	3,6
	—	0	1675	—	0,0		Windsheim	6	11	5611	1,1	1,9	3,0
„ Ldg.	3	3	2462	1,2	1,2	2,4							
Schillingsfürst	2	3	2612	0,7	1,2	1,9	**Gebiet III.**	91	—	74736	1,22	—	3,07
Schwabach St.	1	—	1050	0,8	—	3,2		—	142	76468	—	1,85	
	—	3	1236	—	2,4								

IV.

Bissingen	2	—	1576	1,3	—	1,3	Nördlingen St.	3	—	1590	1,9	—	2,4
Donauwörth St.	1	—	694	1,4	—	3,9		—	1	1744	—	0,5	
	—	2	810	—	2,5		„ Ldg.	4	8	2791	1,4	2,8	4,2
„ Ldg.	11	11	3445	3,2	3,2	6,4	Wallerstein	8	—	2251	3,5	—	3,5
Höchstädt a. D.	7	10	3149	2,2	3,1	5,4							
Monheim	6	8	3137	1,9	2,5	4,4	**Gebiet IV.**	42	—	18633	3,07	—	5,18
								—	40	18903	—	2,11	

V.

Amberg St.	0	—	1943	0,0	—	1,3	Neunburg v. W.	6	9	5378	1,1	1,6	2,7
	—	3	2242	—	1,3		Oberviechtach	6	6	5869	1,0	1,0	2,0
„ Ldg.	14	8	5226	2,7	1,5	4,2	Parsberg	3	7	4224	0,7	1,1	1,8
Auerbach	4	11	2643	1,5	4,1	5,6	Pegnitz	5	8	3621	1,4	2,2	3,6
Beilngries	7	8	4481	1,6	1,7	3,3	Sulzbach	5	9	4203	1,2	2,1	3,3
Burglengenfeld	7	7	5858	1,2	1,2	2,4	Tirschenreuth	9	4	6021	1,5	0,6	2,1
Ellingen	5	5	3165	1,6	1,6	3,2	Vilseck	9	4	3952	2,3	1,0	3,3
Greding	6	4	3954	1,5	1,0	2,5	Vohenstrauss	7	12	6879	1,0	1,7	2,7
Hemau	6	5	4856	1,2	1,0	2,2	Waldsassen	9	14	5478	1,6	2,5	4,1
Kastl	11	1	3539	3,1	0,1	3,2							
Kemnath	9	10	4022	2,2	2,4	4,6	**Gebiet V**	158	—	98503	1,65	—	3,32
Nabburg	15	6	6841	2,2	1,0	3,2		—	155	98802	—	1,57	
Neumarkt	15	14	6350	2,4	2,1	4,5							

VI.

Eschenbach	4	14	4240	0,9	3,3	4,2	Weiden	4	3	4948	0,8	0,6	1,4
Erbendorf	3	2	3232	0,9	0,6	1,5	**Gebiet VI**	12	23	17265	0,69	1,33	2,02
Neustadt a. Wn.	1	4	4845	0,2	0,8	1,0							

VII.

Dillingen	6	9	4235	1,4	2,3	3,7	Rain	2	3	4208	0,5	0,6	1,1
Lauingen	2	7	4520	0,4	1,5	1,9	Wertingen	8	11	6255	1,3	1,7	3,0
Neuburg St.	0	—	1559	0,0	—	1,3							
	—	2	1607	—	1,3		**Gebiet VII**	28	—	28146	0,99	—	2,41
„ Ldg.	10	8	7369	1,3	1,1	2,4		—	40	28194	—	1,42	

VIII.

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Aichach	10	7	7685	1,3	0,9	2,2
Augsburg St.	0	—	4473	0,0	—	0,5
	—	4	6327	—	0,5	
Babenhausen	4	3	2293	1,7	1,3	3,0
Bruck	12	17	5193	2,3	3,2	5,5
Buchloe	6	7	2816	2,1	2,5	4,6
Burgau	7	3	4425	1,6	0,6	2,2
Dachau	16	6	6158	2,6	0,9	3,5
Freising	13	5	6038	2,1	0,8	2,9
Friedberg	8	11	5577	1,4	2,0	3,4
Füssen	8	8	3161	2,5	2,5	5,0
Göggingen	10	9	4157	2,4	2,1	4,5
Grönenbach	8	11	3204	2,5	3,4	5,9
Günzburg	7	12	4478	1,6	2,5	4,1
Illertissen	6	2	3054	1,9	0,6	2,5
Kempten St.	1	—	2033	0,5	—	2,3
	—	4	2229	—	1,8	
„ Ldg.	8	25	5668	1,4	4,4	5,8
Krumbach	9	8	4311	2,1	1,8	3,9
Landsberg	12	10	6911	1,7	1,5	3,2
Memmingen St.	0	—	1242	0,0	—	0,0
	—	0	1391	—	0,0	
Mindelheim	11	3	3773	2,9	0,8	3,7
Neu-Ulm	11	10	3261	3,4	3,1	6,5
Obergünzburg	3	8	2305	1,3	3,4	4,7
Ottobeuren	15	18	6052	2,5	2,9	5,4
Pfaffenhofen	17	7	7783	2,2	0,9	3,1
Roggenburg	11	6	5358	2,0	1,1	3,1
Schongau	13	15	4581	2,8	3,2	6,0
Schrobenhausen	11	4	7096	1,5	0,5	2,0
Schwabmünchen	11	3	3484	3,2	1,1	4,3
Starnberg	6	7	2801	2,1	2,5	4,6
Türkheim	6	10	3466	1,7	2,9	4,6
Weiler	8	3	3386	2,4	1,9	3,3
Weilheim	6	14	4428	1,3	3,1	4,4
Zusmarshausen	7	7	3971	1,8	1,8	3,6
Gebiet VIII	281	—	144621	1,94	—	3,75
	—	267	146920	—	1,81	

IX.

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Aibling	7	5	2839	2,5	1,9	4,4
Dingolfing	9	4	7534	1,2	0,5	1,7
Ebersberg	9	13	5426	1,7	2,4	4,1
Erding (Dorfen)	15	15	10080	1,5	1,5	3,0
Landau a. J.	14	3	8616	1,6	0,4	2,0
München Ldg.	4	10	3349	1,2	3,0	4,2
Osterhofen	7	2	5041	1,4	0,4	1,8
Vilsbiburg	14	13	11093	1,3	1,1	2,4
Gebiet IX	79	65	53978	1,44	1,21	2,65

X.

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Abensberg	4	4	7493	0,5	0,5	1,0
Altorf	3	11	4034	0,7	2,7	3,4
Altötting	5	3	7556	0,7	0,3	1,0
Au b. München	0	0	2716	0,0	0,0	0,0
Berchtesgaden	1	1	2784	0,4	0,4	0,8
Bogen	3	6	3177	0,9	1,8	2,7
Burghausen	2	4	3479	0,5	1,2	1,7
Cham (Furth)	1	2	8022	0,1	0,2	0,3
Deggendorf	1	4	5010	0,2	0,8	1,0
Eggenfelden	5	10	8798	0,5	1,1	1,6
Eichstädt St.	0	—	1397	0,0	—	2,0
	—	3	1488	—	2,0	
„ Ldg.	1	1	3977	0,3	0,3	0,6
Falkenstein	3	1	1817	1,6	0,6	2,2
Fürth St.	0	—	2064	0,0	—	1,9
	—	6	3202	—	1,9	
Grafenau	2	1	5274	0,4	0,2	0,5
Griesbach	3	4	5160	0,6	0,7	1,3
Gunzenhausen	2	6	3871	0,5	1,5	2,1
Haag	2	3	4871	0,4	0,6	1,0
Heidenheim	2	7	4403	0,4	1,6	2,0
Heilsbronn	3	4	4811	0,6	0,7	1,3
Hengersberg	5	2	5312	0,9	0,3	1,2
Hersbruck	0	9	4308	0,0	2,0	2,0
Hilpoltstein	1	10	4266	0,2	2,3	2,5
Ingolstadt St.	1	—	1997	0,5	—	1,4
	—	2	2319	—	0,9	
„ Ldg.	3	1	7947	0,4	0,1	0,5
Kehlheim	3	4	4959	0,6	0,8	1,4
Kipfenberg	1	5	2923	0,3	1,7	2,0
Kötzting	4	3	5811	0,7	0,5	1,2
Landshut St.	0	—	2165	0,0	—	0,0
	—	0	2524	—	0,0	
„ Ldg.	6	9	9193	0,6	1,0	1,6
Mallersdorf	4	1	5682	0,7	0,1	0,8
Miesbach	1	3	3350	0,3	0,8	1,1
Mitterfels	3	2	4474	0,7	0,4	1,1
Moosburg	5	14	5765	0,9	3,9	4,8
Mühldorf	3	8	6061	0,5	1,3	1,8
München St.	1	—	11117	0,1	—	0,4
	—	5	16746	—	0,3	
Neumarkt i. O.B.	5	7	5121	0,9	1,4	2,3

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Nittenau	1	3	2783	0,4	1,0	1,4
Nürnberg St.	7	—	9858	0,7	—	1,3
	—	8	13229	—	0,6	
„ Ldg.	3	7	3881	0,8	1,7	2,5
Oettingen	3	7	3658	0,8	1,9	2,7
Pappenheim	1	2	2634	0,4	0,7	1,1
Passau St.	0	—	1338	0,0	—	0,0
	—	0	1663	—	0,0	
„ Ldg. I	1	3	6634	0,2	0,4	0,6
„ II	7	3	5086	1,2	0,7	1,9
Pfarrkirchen	3	3	6845	0,4	0,4	0,8
Regen	0	3	5287	0,0	0,5	0,5
Regensburg St.	1	—	3766	0,3	—	0,5
	—	1	4359	—	0,2	
„ Ldg.	3	7	5222	0,6	1,3	1,9
Regenstauf	2	2	3386	0,6	0,6	1,2
Reichenhall	0	0	1932	0,0	0,0	0,0
Riedenburg	3	4	4665	0,6	0,9	1,5
Roding	2	1	2989	0,7	0,3	1,0
Roth	3	3	4999	0,6	0,6	1,2
Rosenheim	2	11	3315	0,6	3,5	4,1
Rotthalmünster	1	4	6319	0,2	0,6	0,8
Rottenburg	4	9	5856	0,7	1,5	2,2
Simbach	6	4	5855	1,0	0,7	1,7
Stadtamhof	2	11	3684	0,5	3,2	3,7
Straubing St.	2	—	1547	1,3	—	2,4
	—	2	1805	—	1,1	
„ Ldg.	5	9	6380	0,8	1,3	2,1
Tegernsee	1	1	1657	0,6	0,6	1,2
Tölz	2	0	2570	0,8	0,0	0,8
Traunstein	5	10	6411	0,8	1,6	2,4
Viechtach	6	0	4126	1,3	0,0	1,3
Vilshofen	2	2	8139	0,2	0,2	0,4
Waldmünchen	1	1	4999	0,2	0,2	0,4
Wasserburg	2	3	4171	0,5	0,7	1,2
Wassertrüdingen	3	5	3949	0,8	1,2	2,0
Wegscheid	7	4	7091	1,0	0,5	1,5
Weissenburg	0	3	1982	0,0	1,5	1,5
Wemding	2	0	2133	0,9	0,0	0,9
Werdenfels	2	6	1980	1,0	3,0	4,0
Wolfratshausen	2	9	3346	0,6	2,6	3,2
Wolfstein	1	2	5991	0,2	0,3	0,5
Wörth	2	2	3217	0,6	0,6	1,2
Gebiet X	189	—	350828	0,54	—	1,42
	—	321	363177	—	0,88	

XI.

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Immenstadt	0	3	2931	0,0	1,0	1,0
Kaufbeuren St.	0	—	896	0,0	—	0,9
	—	1	1074	—	0,9	
„ Ldg.	2	5	2586	0,8	1,9	2,7
Lindau St.	0	—	767	0,0	—	0,0
	—	0	853	—	0,0	
Lindau Ldg.	2	5	2501	0,8	1,8	2,8
Oberdorf	0	10	3812	0,0	2,7	2,7
Sonthofen	2	3	6072	0,3	0,5	0,8
Gebiet XI	6	—	19565	0,31	—	2,67
	—	27	19820	—	1,36	

XII.

	p′	p″	n	q′	q″	q′+q″
Laufen	6	4	5291	1,1	0,7	1,8
Prien	4	1	2045	1,9	0,5	2,4
Tittmoning	5	3	3641	1,4	0,8	2,2
Trostberg	9	6	5380	1,7	1,0	2,7
Gebiet XII	24	14	16357	1,47	0,85	2,32

Aus dieser Tabelle geht nun sofort hervor, dass die verschiedenen Bezirke, sowie die grösseren zusammenhängenden Gebiete, zu welchen man die einzelnen Bezirke mit Recht vereinigen darf, mit verhältnissmässig wenigen Ausnahmen ihren Charakter hinsichtlich der Blitzgefährdung während der beiden Perioden im Allgemeinen thatsächlich festgehalten haben.

Dass dies schon bei den an sich so kleinen Zahlen der Fall ist, gibt einen vortrefflichen Beleg für den Werth und die Bedeutung des Materials.

Soweit es sich hiebei um die geographische Vertheilung handelt, will ich die Besprechung auf jene der Karten verschieben; dagegen will ich nicht versäumen, darauf hinzuweisen, dass auch in dieser Zusammenstellung wiederum eine Eigenthümlichkeit hervortritt, auf welche ich schon in der älteren Arbeit hingewiesen habe und die nun hier abermals ihre Bestätigung findet, nämlich das eigenthümliche Verhalten der Städte im Vergleiche zu ihrer Umgebung.

Es zeigt sich nämlich auch in der II. Periode und mithin auch in der ganzen Reihe, dass Gebäude, die innerhalb der Stadtbezirke liegen, weit weniger der Gefahr einer Zündung oder Zerstörung durch Blitz ausgesetzt sind als die in den umgebenden Landbezirken befindlichen.

Man übersieht dies sehr gut aus der nachfolgenden Zusammenstellung:

Tabelle VI.

Vergleichung der Blitzgefahr in Städten mit jener der Umgebung.

(Zahl der Fälle für 1000 versicherte Gebäude während des Zeitraumes 1844—1879.)

	Stadt	Umgebung		Stadt	Umgebung
Amberg	1,3	4,2	Landshut	0,0	1,6
Ansbach	1,1	5,3	Lindau	0,0	2,8
Aschaffenburg	0,9	0,8	Memmingen	0,0	6,3 [4]
Augsburg	0,5	3,8 [1]	München	0,4	2,3 [5]
Bamberg	1,3	1,0	Neuburg a. D.	1,3	2,4
Bayreuth	2,1	2,9	Nördlingen	2,4	3,9 [6]
Dinkelsbühl	6,2	6,2	Nürnberg	1,3	2,5
Donauwörth	3,9	6,4	Passau	0,0	1,2
Eichstädt	2,0	0,6	Regensburg	0,5	2,6 [7]
Erlangen	2,1	4,1 [2]	Rothenburg o. T.	0,0	2,4
Fürth	1,9	2,3	Schwabach	3,2	3,6
Hof	0,0	3,0	Schweinfurt	0,0	1,3 [8]
Ingolstadt	1,4	0,5	Straubing	2,4	2,1
Kaufbeuren	0,9	3,2 [3]	Würzburg	2,0	0,8
Kempten	2,3	5,8	Mittel	1,43	2,96

1) Göggingen und Friedberg.
2) Erlangen, Herzogenaurach und Forchheim.
3) Kaufbeuren, Oberdorf und Obergünzburg.
4) Grönenbach und Ottobeuren.
5) München Ldg. und Au.
6) Nördlingen und Wallerstein.
7) Regensburg Ldg. und Stadtamhof.
8) Schweinfurt Ldg. und Werneck.

Aus dieser Tabelle entnimmt man, dass von städtischen Gebäuden kaum halb so viele vom Blitze getroffen werden als von der gleichen Anzahl auf dem Lande gelegener.

Ob die Ursache dieses auffallenden Verhaltens in dem Zusammendrängen der Gebäude an sich, ob in der Menge von Feuerstellen oder endlich in der verhältnissmässig grossen Anzahl von Blitzableitern auf kleinem Flächenraum zu suchen sei, dies sind Fragen, deren Beantwortung ich zunächst noch offen lassen möchte.

Statt dessen will ich mich jetzt zur Besprechung der beigegebenen Landkarte wenden.

Dabei soll zunächst ein bereits oben erwähnter Punkt noch einmal berührt werden, nämlich der Umstand, dass die geographisch benachbarten Bezirke in so vielen Fällen ganz ähnliches Verhalten zeigen und dass die Karte, obwohl ein Mosaik aus 271 einzelnen kleinen Stückchen[1]), doch nicht den Eindruck der Regellosigkeit, sondern den eines wohlgeordneten Bildes bietet.

Noch entschiedener drängt sich diese Ueberzeugung auf, wenn man die für die Periode 1844—65 hergestellte Karte mit der auf den ganzen Zeitraum von 1844—1879 bezüglichen vergleicht.

Die beiden Karten sehen einander so ähnlich, dass es schon genauer Betrachtung bedarf, wenn man überhaupt die Verschiedenheiten bemerken will.

Leider ist es hier nicht möglich, beide Karten wiederzugeben und muss ich mich deshalb mit dieser Andeutung begnügen.

Die Karte selbst bedarf kaum mehr besonderer Erläuterung und mag nur noch die Bemerkung Platz finden, dass sie nach Tabelle V hergestellt wurde, indem man nach dem Grade der Gefährdung eine Klassentheilung einführte. Bezirke, in denen während des ganzen Zeitraumes von 1000 Gebäuden nicht mehr als 0,3 vom Blitze getroffen wurden, wurden zu der I. Klasse, solche, in denen die Gefährdungszahl innerhalb der Grenzen 0,4 und 0,9 lag, zu der II. gerechnet und dann weitere Klassen gebildet, welche die Zahlen 1,0 bis 1,9, 2,0 bis 2,9 u. s. w. umfassen.

---

1) Die im Jahre 1866 abgetretenen Bezirke wurden nicht mehr in die Karte aufgenommen.

Jede der Klassen wurde alsdann in der Karte durch eine besondere Art der Schraffirung hervorgehoben, wie auf derselben bereits bemerkt ist.

Betrachtet man die Karte genauer und nimmt man zugleich jene zu Hülfe, welche sich auf das Fortschreiten einzelner Gewitter beziehen und in den verschiedenen Bänden der Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern zu finden sind, so sieht man, dass es zwei grosse Heerstrassen der Gewitterzüge sind, welche ihre Spuren in den Zerstörungen durch Blitz hinterlassen haben. Die nördliche derselben dürfte ihren Ursprung am mittleren Schwarzwalde finden. Die südliche im südlichen Theile dieses Gebirges sowie am Abhange der Schweizer Alpen und in der Umgebung des Bodensees.

Der nördliche, schwächere Ast, zieht sich, wie schon bemerkt, wohl von dem Quellgebiete des Neckars kommend an der nördlichen Abdachung des schwäbischen Jura hin, tritt über die Frankenhöhe in Bayern ein, um in ost-nord-östlicher Richtung über Mittelfranken hinweg dem Ostabhange des fränkischen Jura und der Vils zuzueilen. Nach dem Ueberschreiten der Frankenhöhe erleidet dabei die Heftigkeit der Gewitter eine Abschwächung, um bei Annäherung an den Frankenjura von Neuem zuzunehmen.

Der im Süden der Donau verlaufende Ast tritt über die Iller und vom Bodensee her in Bayern ein, verstärkt sich durch Gewitter, die aus dem Lechthale sowie aus dem unterem Ammergau (Gegend zwischen Peissenberg und den Alpen) kommen, und zieht sich nun nach der Isar in einem Ausläufer auch nach der Mangfall hin.

Die meisten Verheerungen richten diese Gewitter in Schwaben an, ausserdem noch auf einem Streifen, der sich vom oberen Lechlauf bis nach der Loisach und von da zwischen Ammer- und Starnbergersee hindurch nach der Umgebung von München — jedoch mit auffallender Verschonung des Stadtbezirks — und schliesslich nach dem Mangfallthale hinzieht.

Im Donauthale erreicht das Gebiet höherer Gefährdung kurz nach Einmündung des Leches seine Grenze; im Isargebiete erstreckt es sich bis nahe an Landshut, die Umgebung des Innes wird von demselben nirgends berührt. Der östliche Theil von Oberbayern sowie ganz Niederbayern ist von zündenden Blitzen nur wenig heimgesucht. In dem Ge-

biete zwischen Alpen- und Donau erinnert die Darstellung sehr an eine Höhenschichtenkarte und hat es den Anschein, als ob die tiefer liegenden Gegenden überhaupt weniger vom Blitze gefährdet wären.

Uebrigens dürfte das Verhalten von Niederbayern, sowie des östlichen Oberbayerns auch damit zusammenhängen, dass gerade die grossen und heftigen Gewitter, welche aus Württemberg und vom Bodensee her nach Bayern kommen, die letztgenannten Gegenden erst in den späteren Abendstunden erreichen, wo mit dem Sinken der Temperaturen auch ein bedeutender Nachlass der Heftigkeit eintritt.

In diesem Umstande ist wohl auch einer der Erklärungsgründe zu suchen, weshalb der bayerische Wald in so ungewöhnlichem Grade verschont erscheint. Für die östliche Abdachung des Böhmerwaldes dürfte diese Immunität kaum mehr bestehen, da die Mehrzahl der Gewitter, welche kurz vor oder um Mittag im bayerischen Walde ihre Entstehung finden, ostwärts ziehen und alsdann in den heissesten Tagesstunden in Böhmen ihre Wirkungen äussern werden.

Auffallend wenig gefährdet sind auch einzelne Theile des Alpenlandes, doch möchte hier der Schutz, den die in den Thälern liegenden Häuser durch die in den Gebirgswäldern stehenden Bäume finden, eine hervorragende Rolle spielen.

Hiemit mag diese Untersuchung zunächst ihren Abschluss finden, so intensiv ihre Durchführung manchem erscheinen mag, so ist sie doch lange noch nicht erschöpfend.

All' die Fragen nach dem Einflusse der Entwaldung, der Trockenlegung von Sümpfen, des Telegraphen- und Eisenbahnnetzes sind noch nicht einmal berührt worden, und dürfte es vielleicht auch noch verfrüht sein, dieselben jetzt schon in Angriff zu nehmen.

Freilich hat es den Anschein, als ob zwischen der Waldkarte des Königreiches und jener der Dichtigkeit der Blitzschläge mancher Zusammenhang bestehe. So ist das verhältnissmässig waldarme Schwaben besonders gefährdet, während die waldreichen Gegenden des Spessarts, des bayerischen Waldes, der Alpen, in hohem Grade verschont erscheinen, aber trotzdem möchte ich es für sehr voreilig halten, jetzt schon und ohne Eingehen auf Einzelheiten hierüber allgemeine Aussprüche zu thun.

Um solche Untersuchungen in Zukunft zu ermöglichen, hielt ich es für geboten, in einem Anhange das benutzte Material selbst noch mitzutheilen.

Die Aufzeichnung aller einzelnen Fälle bietet ja hiefür die wichtigsten Anhaltspunkte; durch die Publication derselben sind sie vor dem Verluste geschützt. Derartige Acten werden nur eine begrenzte Reihe von Jahren hindurch aufgehoben, und so war es schon vor 15 Jahren nicht mehr möglich, die Detailangaben auf weiter als 22 Jahre rückwärts zu erhalten; für den Zeitraum 1811 bis 1832, während dessen die Brandversicherungsanstalt auch bereits bestand, habe ich nicht einmal mehr summarische Zusammenstellungen auffinden können.

Wie ganz anders stünde man den Fragen über die säculare Periode gegenüber, wenn diese Angaben noch vorhanden wären.

Dies sind die Gründe, welche mich veranlassten, im Anhange noch das ganze Material mitzutheilen und dabei im Allgemeinen eine geographische, im Einzelnen alphabetische Anordnung zu wählen. Dass es dadurch wesentlich erleichtert ist, für bestimmte Gegenden specielle Untersuchungen durchzuführen, ist auf den ersten Blick ersichtlich.

Alles zusammengefasst haben sich demnach die folgenden Resultate ergeben:

„Die Häufigkeit der zündenden Blitze reducirt auf die gleiche Zahl „versicherter Gebäude hat seit dem Anfange der vierziger Jahre dieses „Jahrhunderts, abgesehen von kleineren Schwankungen, eine beinahe „stetige Zunahme erfahren, so dass die Gefährdung durch Blitz inner„halb des genannten Zeitraumes auf mehr als das Dreifache ge„stiegen ist.

„Die genannten kleineren Schwankungen scheinen einer Periodicität „unterworfen zu sein, so zwar, dass auf jede Sonnenfleckenperiode zwei „solcher Perioden treffen und dass einem Maximum der Sonnenflecken „jederzeit ein Minimum von zündenden Blitzen entspricht.

„Untersucht man die zündenden Blitze auf ihre jährliche Periode „durch Bildung fünftägiger Summen, so zeigen die letzteren in ihrem „Gange eine auffallende Uebereinstimmung mit langjährigen fünftägigen „Wärmemitteln. Bildet man die Summen der Brandfälle durch Blitz für

„die einzelnen Kalendertage, so zeigen auch diese noch in vielen Fällen „einen Zusammenhang mit langjährigen Tagesmitteln der Temperatur.

„Die Untersuchung der geographischen Vertheilung der zündenden „Blitze lehrt, dass einzelne Gegenden ihren Charakter der besonderen „Gefährdung oder des Verschontseins während des ganzen in Betracht „gezogenen Zeitraums beibehalten und dass das Verhalten einer Gegend „in dieser Hinsicht, abgesehen von ganz lokalen Eigenthümlichkeiten, „wesentlich davon abhängt, welche Lage sie gegen die Zugstrassen besitzt, „denen die grossen Gewitter mit Vorliebe zu folgen pflegen."

Anhang.

Verzeichniss sämmtlicher Fälle, in welchen versicherte Gebäude während des Zeitraumes 1844—1879[1]) durch Blitz beschädigt wurden.

(Die Ordnung ist eine alphabetische nach Verwaltungsbezirken und Orten. Die fett gedruckten Namen bezeichnen das Landgericht — älterer Ordnung — die anderen Namen den Ort, in welchem der Brandfall durch Blitz vorkam. Die hinter jedem Ortsnamen stehenden Ziffern geben das Datum, wobei die Monate durch römische und die Jahreszahlen nur durch die beiden Endziffern bezeichnet sind. Wenn an einem und demselben Tage an dem nämlichen Orte der Blitz mehrfach gezündet hat, so ist das Datum ebenso oft wiederholt.)

Abensberg. Bachl 11. VIII. 69 — 19. VII. 71; Biburg 3. V. 63; Kipfelsbach 11. VI. 76; Lindkirchen 23. VII. 63; Oberempfenbach 17. VIII. 61; Schwaig 28. VIII. 58 — 25. VI. 67.

Aibling. Au bei Aibling 16. VIII. 62; Feldkirchen 30. VI. 49; Hohentann 17. VII. 55; Helfendorf 14. VII. 69; Mietraching 26. VIII. 79; Kolbermoor 3. VI. 68 — 29. VIII. 78; Tuntenhausen 11. VI. 58; Vagen 15. V. 65; Tattenhausen 14. V. 65; Westerham 22. IX. 79.

Aichach. Aindling 27. VII. 57; Altenberg 29. VII. 44; Altomünster 6. VI. 75; Handzell 24. VIII. 46; Heretshausen 17. V. 53 — 7. VI. 64; Klingen 4. IX. 61; Mainbach 28. VII. 72; Mangelsdorf 6. VIII. 79; Metzenried 29. VI. 79; Obergriesbach 9. VI. 72; Petersdorf 14. VII. 46; Rechting 6. VI. 53; Schiltberg 27. VII. 54 — 15. V. 69; Schönbach 26. VII. 54; Tandern 14. VII. 69.

Altötting. Altötting 3. VI. 59; Alzgern 25. VI. 54; Buch bei Unterburgkirchen 2. VII. 75; Eggen 24. V. 65; Garching 31. V. 59; Pleiskirchen 23. VII. 63; Reischenbach 27. V. 68; Unterburgkirchen 11. VII. 68.

Altdorf. Altdorf 2. X. 69 — 6. VI. 75 — 6. VI. 75; Fallhaus 5. VIII. 79; Fischbach 31. V. 56 — 31. VII. 75; Grünsberg 6. VI. 75; Leinburg 17. VII. 75;

1) Unter Auslassung des Jahrganges 1874, für welchen die Angaben nicht mehr zu beschaffen waren.

Oberherrieden 28. VIII. 57 — 24. VII. 68 — 30. IV. 72; Offenhausen 11. VII. 71; Winkelhaid 22. V. 55 — 6. VI. 75.

Alzenau. Alzenau 16. VII. 57.

Amberg St. 31. VII. 75 — 31. VII. 75 — 12. VI. 78.

Amberg Ldg. Ensdorf 15. VIII. 56 — 28. VII. 62 — 31. VII. 75; Garsdorf 22. VII. 58; Gärbersdorf 5. VIII. 71; Haidmühle 2. IX. 67; Hirschau 20. VI. 52 — 1. VI. 77; Hittersdorf 8. VII. 65; Immenstetten 22. V. 45; Köfering 28. VIII. 58; Lintach 19. VII. 68; Mendorferbuch 9. VII. 63; Pittersberg 15. VI. 56 — 28. VII. 62 — 19. VI. 63; Raigering 13. IV. 65; Schnaittenbach 2. IX. 67; Thanheim 30. VI. 73; Unterammersricht 17. VIII. 56; Ursensollen 23. VI. 78; Ursulapoppenricht 27. VI. 52.

Amorbach. Boxbrunn 25. VI. 44 — 23. VI. 75 — 4. V. 78;

Ansbach St. 30. VI. 68 — 19. VII. 71 — 17. VII. 75.

Ansbach Ldg. Bernhardswinden 28. VII. 73 — 28. VII. 73; Brodswinden 30. VI. 59; Brünst 24. VI. 70; Elgersdorf 31. VII. 61; Forsthof 14. VI. 61; Haasgang 29. VII. 64; Hennenbach 30. IV. 72; Kleinhaslach 20. VI. 61; Lehrberg 18. IV. 73; Neuses 4. VIII. 55 — 2. X. 69 — 28. VII. 73 — 4. VII. 75; Neustetten 25. VII. 69; Ruppersdorf 25. VII. 76; Schalkhausen 17. VI. 61; Virnsberg 4. VII. 75; Weihenzell 27. IV. 70; Wernsbach 25. VII. 69 — 7. VI. 76; Zailach 25. V. 49 — 25. VII. 78.

Arnstein. Altbessingen 10. VIII. 63; Gänheim 18. V. 69; Gauaschach 24. VI. 67 — 29. VI. 79; Gramschatz 28. VI. 75; Hundsbach 29. VI. 79; Mühlhausen 2. VIII. 77; Reuchelheim 29. V. 52; Schwebenried 1. VIII. 54; Wülfershausen 25. VII. 53.

Aschaffenburg St. 1. VIII. 54 — 16. VII. 55.

Aschaffenburg Ldg. Goldbach 28. VII. 72; Grossostheim 24. VI. 67; Unterafferbach 10. V. 73; Weiler 9. VIII. 48.

Aub. Allersheim 7. VI. 67; Aub 14. VIII. 59; Aufstetten 18. V. 69; Gelchsheim 27. VI. 44; Lenzenbronn 11. VII. 68; Sachsenheim 7. VI. 49.

Auerbach. Bärnhof 25. VI. 71; Ebersberg 16. VII. 57; Grünreuth 2. X. 69; Haag 14. VII. 73 — 1. VIII. 73; Hartenstein 28. VIII. 73; Hopfenohe 8. VII. 73; Kaundorf 5. IV. 68; Krottensee 24. V. 72; Lehnersdorf 1. VI. 77; Loch 31. V. 78; Neuzirkendorf 5. VI. 73; Oberfrankenohe 10. V. 65 — 18. VI. 73; Thurndorf 29. VII. 53.

Augsburg St. 5. VI. 70 — 17. IV. 73 — 17. V. 73 — 17. V. 73.

Augsburg Ldg.[1]) Diedorf 14. IV. 51 — 29. VI. 79; Gablingen 15. VII. 66; Gersthofen 16. VI. 55 — 29. III. 77; Gessertshausen 7. VII. 78; Göggingen 29. VIII.

---

1) Früher Ldg. Göggingen und unter diesem Namen in Tabelle V aufgeführt.

65 — 18. VII. 66; Hainhofen 24. V. 52; Hammel 15. VII. 66; Haunstetten 27. VII. 79; Langwaid 6. IV. 52; Leitershofen 20. XII. 62; Lizelburg 30. V. 49; Margertshausen 23. VII. 63; Oberhausen 9. VI. 76; Reinhardshausen 15. VIII. 62; Stadtbergen 25. VII. 64 und 28. VII. 72.

Bamberg St. 18. VI. 52 — 17. VI. 54 — 12. V. 56 — 5. VIII. 59 — 11. VI. 65 — 9. III. 68 — 18. VIII. 68 — 30. VI. 76 — 14. VI. 78.

Bamberg I Ldg. Buttenheim 6. VII. 50; Dreuschendorf 4. VII. 75; Hallstadt 2. VI. 50; Hirschaid 1. VIII. 51; Teuchatz 3. I. 58.

Bamberg II Ldg. Buch 4. VI. 72; Reundorf 3. VII. 71; Stegaurach 3. VI. 72; Wildensorg 18. VII. 60.

Baunach. Freudeneck 22. V. 72; Hemmendorf bei Glaubendorf 18. VIII. 68; Salmsdorf 31. V. 56.

Bayreuth St. 25. IV. 45 — 31. V. 56 — 18. VII. 68 — 14. VI. 69 — 9. VI. 76, 9. VI. 76, 9. VI. 76.

Bayreuth Ldg. Altstadt 25. VII. 69; Creez 10. VIII. 59; Donndorf 29. VII. 50 — 31. VII. 70; Glashütten 18. VI. 73; Laineck 2. X. 69; Mengersdorf 17. VI. 70; Meyernberg 18. VII. 75; Mistelbach 19. IX. 50; Oberschreez 18. VII. 75; Oberkonnersreuth 9. VIII. 58; Oberpreuschwitz 29. VII. 53; Schrammelsberg 18. VII. 75; Tannenbach bei Heinersreuth 27. VII. 76; Unternschreez 18. V. 75.

Beilngries. Beilngries 28. VII. 55 — 3. VI. 79; Berching 25. VIII. 69; Dietersberg 11. VI. 76; Ermersdorf 29. VIII. 65; Friebertshofen 10. VIII. 49; Ittelhofen 19. VI. 64 — 7. VIII. 70; Kevenhüll 24. VI. 79; Oenning 4. VIII. 55; Paulushofen 6. VI. 67; Töging 14. VIII. 48; Sulzkirchen 24. VII. 68; Schnufenhofen 10. VII. 68; Weidenwang 18. VII. 52.

Berchtesgaden. Berchtesgaden 19. VIII. 77; Schellenberg 10. VII. 49.

Berneck. Bischofsgrün 18. VII. 60; Leisau 30. VII. 73; Marktschorgast 11. VIII. 56 — 21. V. 60 — 22. VII. 64; Nemmersdorf 18. IV. 73; Streitau 17. VI. 70; Witzleshofen 16. VIII. 56.

Bischofsheim. Frankenheim 24. V. 72; Ginolfs 22. IV. 78; Oberelsbach 21. VI. 77; Sandberg 18. VIII. 68; Waldberg 9. IX. 78; Weisbach 9. VI. 59.

Bogen. Albertsried 7. VIII. 72; Bogenberg 6. VII. 46; Grosslindach 15. VI. 75; Landorf 25. IV. 72; Niederwinkling 11. VIII. 57; Perasdorf 25. VI. 70; Pfelling 7. VI. 67; Schwarzach 13. V. 72; Waltendorf 26. VII. 65;

Brückenau. Brückenau 24. VI. 67; Detter 9. IX. 78 — 18. IX. 79; Kothen 17. VII. 75; Oberleichtersbach 1. VII. 53; Pletz 8. VI. 46; Rupboden 14. VIII. 71; Schondra 9. IX. 78; Weissenbach 28. VI. 79.

Bruck. Alling 23. VI. 66; Althegnenberg 18. VII. 77; Aufkirchen 21. VI. 57; Bairaberg 5. IX. 57 — 5. V. 68; Biburg 14. VII. 77; Bruck 5. VIII. 69 —

23. V. 75; Dünzelbach 24. VI. 45 — 2. VIII. 64; Ebertshausen 14. VI. 58 — 8. VIII. 66; Eggenhofen 13. VII. 77; Geiselbullach 17. X. 49; Germerswang 26. VII. 64; Grunertshofen 3. VIII. 71; Hattenhofen 23. VII. 63; Hausen b./H. 15. V. 67 — 23. VI. 73: Landsberied 24. VII. 77; Mammendorf 23. VII. 63 — 14. VIII. 71; Mittelstetten 17. V. 70; Olching 13. VII. 64; Pfaffenhofen 22. VII. 64; Puch 5. VI. 75; Steinbach 8. VIII. 77; Türkenfeld 5. V. 68; Wenigmünchen 17. VIII. 56.

Buchloe. Asch 13. VIII. 61; Buchloe 10. V. 68 — 8. VI. 76 — 5. VIII. 79; Denklingen 26. VIII. 71; Frankenhofen 14. VI. 56; Honsolgen 15. V. 54; Kleinkitzighofen 4. VI. 66; Koneberg 2. VII. 78; Lindenberg 2. VIII. 64; Menhofen 24. VII. 68; Seestall 1. VII. 57; Waal 17. VIII. 56.

Babenhausen. Babenhausen 28. VII. 62 — 8. V. 68; Heinertingen 30. VII. 49; Oberschönegg 23. VI. 73; Pless 22. VI. 48 — 5. V. 68; Winterrieden 3. VIII. 62.

Burgau. Burgau 8. VII. 59; Burtenbach 16. IV. 56; Ettenbeuren 23. IV. 78; Glöttweng 28. V. 53 — 3. VIII. 62; Jettingen 9. V. 64 — 21. VI. 76 — 25. IV. 79; Landesberg 30. V. 59; (Unter-)Knöringen 7. VI. 64.

Burgebrach. Burgebrach 9. VII. 75; Kloster-Ebrach 23. X. 45 — 10. IV. 55; Klebheimerhof bei Koppenwind 27. VI. 78; Kötsch 4. VII. 75; Koppenwind 10. VI. 58; Oberköst 3. VI. 68; Schönbrunn 10. VII. 68 — 4. VII. 75.

Burghausen. Burghausen 7. VI. 53 — 25. VII. 54; Feichten 23. VII. 71; Halsbach 1. VIII. 69; Schützing 31. VIII. 69; Wald 2. VII. 67.

Burglengenfeld. Bubach a./N. 10. VI. 79; Burglengenfeld 3. IX. 73; Dachelhofen 17. VI. 63; Enchhof 4. VIII. 54; Hirschhof 15. VI. 78; Katzdorf 10. VI. 79; Kirchenrodenhard 22. VII. 61; Oder 24. V. 65; Pilsheim 23. VI. 61; Pottenstetten 14. VIII. 71; Ramsbau 31. VIII. 55.

Cham. Cham 4. IX. 49; Thal 6. VII. 75.

Cadolzburg. Egersdorf bei Steinbach 9. VIII. 78; Hörbach 26. VII. 65; Kirchfarrnbach 31. VII. 70 — 1. VI. 77; Tuchenbach 19. V. 63; Unterschlauersbach. 22 I. 63 — 19. V. 62; Weinzierlein 31. VII. 48.

Dachau. Ainhofen 26. VIII. 71; Amperpettenbach 25. VII. 46 — 6. VII. 46; Augustenfeld 30. VII. 73; Bergkirchen 16. VIII. 50; Bieberbach 22. VI. 45; Einsbach 28. VIII. 75; Feldgading 28. VIII. 57; Getzendorf 29. VIII. 57; Gönding 2. VIII. 64; Hirtelbach 23. VII. 61; Langenpettenbach 30. VII. 57; Niederroth 6. VII. 44; Oberweilbach 15 VII. 77; Odelzhausen 8. VII. 59; Pasenbach 16. V. 67; Prittlbach 22. VIII. 79; Schönbrunn 30. VI. 46; Schwabhausen 16. VIII. 50; Sigmartshausen 6. VII. 55 — 2. I. 60; Vierkirchen 13. VII. 61.

Deggendorf. Kleinfülling bei Mietraching 13. VI. 77; Otzing 2. X. 69 — 19. VI. 71 — 2. X. 71; Rottersdorf 22. VI. 52.

Dettelbach. Albertshofen 21. V. 72; Dipbach 10. IX. 76; Esseldorf 25. VI. 67; Gerlachhausen 29. VI. 79; Hörblach 15. IV. 59; Mainstockheim 21. V. 72;

Neuses a./Berg 14. V. 62; Püssenheim 26. X. 70 — 8. VIII. 78 — 29. VIII. 78; Schnepfenbach 29. VI. 79; Stadtschwarzach 21. V. 72.

Dillingen. Bergheim 10. VI. 72 — 21. V. 79; Dillingen 26. V. 52 und 20. IV. 53 — 21. VII. 58 — 25. VIII. 68 — 6. VIII. 79; Eppisburg 19. VII. 47; Fristingen 22. VI. 52; Glött 25. VIII. 68; Holzheim 25. VI. 53 — 23. VII. 78; Rechbergreuthen 1. VII. 77; Schabringen 3. IX. 73; Wittislingen 29. VI. 75.

Dingolfing. Aiglkofen bei Poxau 30. VI. 79; Bubach 13. V. 72; Dingolfing 23. VII. 63; Gottfriedingerschwaig 29. VI. 79; Haberskirchen 13. VI. 44; Langthal 25. VII. 64; Liebertsöd bei Poxau 8. VII. 79; Mamming 6. VII. 46 — 19. V. 49; Niederviehbach 30. VII. 62; Oberviehbach 5. VIII. 45; Poxau 4. IX. 61; Teisbach 12. VI. 55.

Dinkelsbühl St. 16. VI. 61 — 23. VI. 61 — 30. VII. 62 — 25. VI. 71 — 19. VII. 73 — 29. VI. 75.

Dinkelsbühl Ldg. Dürrwangen 5. VI. 73; Frankenhofen 30. IV. 72 — 22. VI. 77; Greisselbach 31. V. 68; Halsbach 25. V. 62; Haslach 9. VI. 72; Illenschwang 11. IV. 77; Knittelsbach 11. VII. 71; Mönchsroth 30. V. 53 — 30. IV. 72; Sinbronn 19. VII. 73; Untermühlbach 29. VII. 62; Weidelbach 3. VII. 69 — 2. X. 69 — 18. VII. 75; Willburgstetten 17. VI. 58; Wittelshofen 30. VIII. 52 — 30. VII. 73; Wolfertsbronn 8. IV. 67.

Donauwörth St. 7. VI. 64 — 8. III. 68 — 19. VII. 68.

Donauwörth Ldg. Asbach 11. VII. 71; Auchsessheim 23. VI. 66; Buchdorf 22. VI. 61 — 20. VII. 71; Deubling 14. VIII. 71; Ebermergen 2. VIII. 46 — 28. VII. 65; Gunzenheim 8. VIII. 78; Hafenreuth 23. VI. 66; Harburg 12. V. 53 — 10. V. 56; Mertingen 12. V. 53 und 25. VI. 71 — 16. VI. 73; Mündling 2. X. 69; Münster 12. V. 53; Nordheim 14. VI. 59; Riedlingen 5. IX. 58 — 28. VII. 62; Schäfstall 23. VI. 66; Stadelhof bei Harburg 13. VI. 77; Wörnitzstein 10. V. 56.

Ebern. Altenstein 29. VII. 53 — 18. VIII. 73; Eichelberg 20. VI. 77; Frikendorf 1. IV. 61; Junkersdorf 16. V. 54 — 24. VI. 78; Maroldsweisach 1. IX. 56.

Ebersberg. Anzing 5. VII. 46 — 18. VI. 60 — 28. VI. 60; Adling b. Glonn 27. VII. 76; Baiern 10. VII. 49; Ebersberg 30. VII. 71; Eglharting 19. VII. 71; Eicherloh bei Fiesing 5. VI. 75; Frauenneuharting 2. VI. 65 — 10. VII. 68; Gasta bei Nettelkofen 13. IX. 78; Glonn 18. VIII. 57 — 10. VI. 76; Grafing 30. V. 49; Grossaschau bei Frauenneuharting 29. VI. 79; Parsdorf 14. VI. 61; Plieming 26. VI. 63; Poring 6. VIII. 69; Oelkofen 27. V. 68; Untereichhofen bei Loitersdorf 8. VII. 76; Zaissing bei Steinhöring 22. V. 79; Zorneding 1. VIII. 69.

Eggenfelden. Diepoldskirchen 7. IV. 75; Döttenau bei Jägerndorf 27. VI. 76; Eggenfelden 1. VIII. 73; Fünfleiten 21. IX. 58; Hochholzen bei Jägerndorf 29. VII. 76; Jägerndorf 22. VII. 50; Lohbruck 9. VIII. 72 — 26. VIII. 79; Martinskirchen

12. VII. 47; Oberzaun bei Wolfsegg 27. VI. 78; Reicheneibach 3. VII. 72; Schönau (II) 19. VII. 71; Staudach 26. VII. 54; Unterdietfurt 19. VII. 71; Wolfsegg 23. VII. 63.

Eichstädt St. 17. VIII. 73 — 16. VIII. 76 — 10. VI. 79.

Eichstädt Ldg. Adelschlag 17. VIII. 63; Pollenfeld 14. VII. 73.

Ellingen. Alesheim 16. VII. 75; Emmertsheim 11. VII. 50; Gundelsheim 10. IX. 63; Holzingen 31. VII. 75; Massenbach 12. V. 53; Pleinfeld 20. VII. 71; Stirn 20. VII. 47 — 28. VII. 73; St. Veit 14. VI. 59; Walkerszell 20. IX. 79.

Eltmann. Eltmann 28. VIII. 58 — 31. VII. 72 — 5. VI. 75 — 27. III. 78; Kirchaich 10. VII. 63.

Erbendorf. Bärenhöhe 9. VI. 76; Lochau 10. VI. 51; Napfberg 10. VII. 68; Wildenreuth 5. IX. 58; Zwergau 18. III. 62.

Erding. Altenerding 11. IV. 57; Auerbach 5. VIII. 45; Eitting 5. V. 68; Erding 24. VIII. 50 — 26. VII. 69; Eubach 12. V. 53 — 10. VII. 53; Frauenberg 3. VIII. 53; Gebensbach 9. VI. 44; Hausmehring 3. VII. 71; Kirchberg 10. V. 68; Langenpreising 28. VIII. 57 — 14. V. 61; Langengeisling 3. VII. 72 — 17. VII. 75; Meiselsberg bei Moosen 8. III. 78; Matzbach 16. V. 46; Moosinning 27. V. 68; Niederding 29. VI. 79; Niederstraubing 22. V. 79; Oberding 17. VII. 46 — 6. VIII. 62 — 17. VIII. 63; Pastetten 3. VIII. 71; Salmannskirchen 12. VII. 73; Schwaig bei Oberding 29. VI. 79; Seeon bei Matzbach 31. VIII. 72; Starzell 22. V. 79; Steinkirchen 14. V. 61; Sulting 23. VII. 63.

Erlangen St. 22. VII. 59 — 6. I. 65 — 8. III. 68 — 14. IV. 70 — 4. IX. 71 — 5. VII. 75.

Erlangen Ldg. Brand 20. VII. 58; Bruck 27. IV. 70 — 14. VII. 77; Bubenreuth 6. V. 69; Eltersdorf 8. III. 68 — 8. III. 68; Eschenau 31. V. 56 — 9. V. 65; Forth 27. VI. 78; Kalchreuth 11. IX. 63; Lohe 19. V. 60; Möhrendorf 23. VII. 71; Sack 7. VI. 76; Schnepfenreuth 3. VI. 75 — 8. VIII. 75; Tennenlohe 14. VI. 62 — 18. VII. 68 — 27. VII. 73; Wellerstadt 22. VI. 46.[1])

Eschenbach. Blankenmühle 26. X. 70; Dirolsreuth 6. V. 69; Eschenbach 8. III. 68 — 23. VI. 78; Grafenwöhr 17. VII. 65; Kirchentumbach 4. IX. 71; Leuzenhof 8. VI. 76; Moos 24. VI. 70; Münchsreuth 21. V. 69; Neustadt am Kulm 23. VII. 75; Pappenberg 10. V. 68 — 25. VI. 71 — 10. V. 75; Thomasreuth 26. VII. 49 — 10. VII. 68; Trag 9. V. 67; Schlammersdorf 21. V. 60.

1) Erst beim Drucke dieses Bogens hat sich ergeben, dass trotz aller Sorgfalt in Folge eines Missverständnisses doch in Tabelle V sowie auf dem vorigen Bogen noch einige kleine Unrichtigkeiten stehen blieben, die hier durch Anmerkungen beseitigt werden sollen. So sind in Tabelle V unter Erlangen Ldg. 3 Fälle zu viel aufgeführt, von denen 2 zu Nürnberg Ldg. (siehe später) und 1 zu Cadolzburg zu rechnen gewesen wäre; der letztere war: „Veitsbronn 4. VI. 72."

Euerndorf. Albertshausen 24. VII. 61; Ebenhausen 20. V. 72; Eltingshausen 9. VII. 71.

Falkenstein. Falkenstein 17. VIII. 63; Haag 20. VI. 60; Hohenrad 9. VI. 77; Schillertswiesen 30. VIII. 65.

Feuchtwangen. Aichenzell 29. VI. 75; Banzenweiler 10. VIII. 75; Breitenau 30. VII. 53; Dentlein 3. VII. 53 — 17. VIII. 63; Dorfgütingen 17. VIII. 68; Grossmühle 4. IV. 50; Kropfenau 25. VIII. 50; Mosbach 14. VI. 64.

Forchheim. Forchheim 12. V. 56 — 24. VI. 67 — 7. VIII. 70. — 17. VII. 75 — 8. III. 78; Gosberg 7. VII. 73; Hallerndorf 24. VII. 77 — 3. IV. 76; Langensendelbach 29. IV. 72; Neuses 21. VIII. 68; Reuth 29. VII. 68 — 8. III. 78; Schnaid 2. X. 69; Willersdorf 16. V. 78.

Freising. Achering 6. V. 46; Allershausen 15. V. 65; Dintenhausen 12. VIII. 53; Dürneck 29. VI. 79; Eching 19. VIII. 62; Freising 20. IV. 44 — 8. VIII. 44 — 11. VI. 62; Giggenhausen 12. V. 53; Gremertshausen 23. VII. 63 — 13. VII. 64; Haindlfing 19. VII. 66 — 28. VIII. 78; Jarzt 20. VI. 56; Kranzberg 2. IX. 61; Thalhausen 9. VIII. 70; Vötting 10. VII. 63; Wippenhausen 5. VIII. 59.

Friedberg. Brechern 8. VI. 45; Dasing 5. VII. 61; Friedberg 30. V. 57 — 24. VIII. 67 — 25. VI. 72; Lechhausen 19. V. 73 — 30. VI. 73 — 13. VI. 77 — 10. VI. 79; Meringerau 2. VIII. 64 — 18. VII. 66 — 14. VII. 68; Merching 23. VII. 44 — 21. VI. 77; Mering 29. VII. 62; Ottmaring 24. VII. 68; Ried 31. VIII. 79; Wassiszell 9. VII. 58; Wiffertshausen 17. VI. 61.

Fürth St. 8. III. 68 — 8. III. 69 — 27. IV. 70 — 12. VI. 73 — 22. VI. 78 — 19. VIII. 78.

Füssen. Bernbeuern 4. VIII. 47; Engenstetten 18. VIII. 56; Langenwang 24. VIII. 47; Lechbruck 15. VIII. 51 — 9. VI. 62 — 8. VI. 76; Nesselwang 13. VI. 60 — 18. VII. 64 — 31. VII. 69; Pfrontenberg 13. VIII. 68; Reute bei Langenwang 31. VIII. 77; Rieden 4. VII. 72; Rinkholz 26. VIII. 55; Rosshaupten 2. VII. 77; Schwangau 5. VIII. 79; Seeg 25. VII. 78.

Furth.[1]) Walting 17. VIII. 77.

Gemünden. Adelsberg 13. V. 67; Gemünden 10. VI. 79; Höllrich 10. VII. 71; Schaippach 23. VIII. 73.

Gerolzhofen. Dingolshausen 17. VII. 57; Gerolzhofen 20. VI. 56 — 5. VI. 73; Herlheim 29. VI. 79; Oberspiesheim 5. VIII. 47 — 31. V. 56; Oberschwarzach 11. VI. 56; Rüpshofen 24. VII. 78.

---

1) Früher zu Cham gehörig, weshalb der hier genannte Fall in Tabelle V. auch unter Cham aufgeführt ist.

Gräfenberg. Dachstadt 30. V. 52; Dornitz 15. VIII. 52; Gräfenberg 27. VII. 65 — 24. VI. 67; Hetzles 7. VII. 73 — 28. VIII. 73; Kleinsendelbach 29. IX. 59. Oberehrenbach 18. III. 72; Oberrüsselbach 7. VII. 73; Thuisbrunn 15. VI. 56 — 4. IV. 61; Wolfersdorf 3. VIII. 61.

Grafenau. Innernzell 11. VI. 55; Lueg bei Kirchberg 27. II. 76; Thürmannsberg 29. V. 45.

Greding. Aue 26. IV. 60; Erkertshofen 16. VIII. 72; Esselberg 5. VI. 73; Greding 28. VIII. 57; Kleinhöbing 5. VIII. 79; Nenneslingen 11. VI. 65; Obermässing 24. VII. 67; Oesterberg 5. IX. 58; Pyras 26. V. 52; Schwimmlach 12. VI. 73.

Griesbach. Birnbach 22. VII. 65; Griesbach 23. VII. 63; Haarbach 6. VIII. 69; Karpfham 15. VII. 46; Poigham 21. IV. 72; Rottersham 11. VI. 75; Salvator 3. VII. 72.

Grönenbach.[1]) Altusried 26. VII. 69; Buxach 14. VIII. 56 — 24. IX. 71; Dickenreisshausen 15. VII. 55; Dietmansried 3. VI. 45 — 28. V. 59; Frauenzell 6. IX. 57; Greut 6. VIII. 78; Grönenbach 24. VII. 73; Legau 27, IV. 70; Reicholzried 14. VII. 59; Steinbach 22. VIII. 79; Volkertshofen 30. V. 49; Woringen 30. V. 59 — 27. VI. 69 — 30. VIII. 69.

Günzburg. Anhofen 8. V. 77; Autenried 1. VIII. 54; Günzburg 16. VII. 75 — 17. VII. 75 — 29. VI. 79 — 8. VII. 79; Harthausen 21. V. 79; Hochwang 13. VII. 68; Ichenhausen 15. VIII. 59 — 14. VII. 69; Leinheim 23. IV. 78; Leipheim 1. VIII. 54 — 7. VIII. 61; Nersingen 20. V. 45; Rettenbach 15. V. 67; Riedheim 20. VI. 46 — 1. VII. 57 — 20. VI. 66; Waldstetten 21. VI. 72.

Gunzenhausen. Absberg 20. VII. 47; Enderndorf 28. VII. 73; Gräfensteinberg 30. VI. 66; Gunzenhausen 7. VII. 76; Kolbensteinberg 14. III. 67; Sinderlach 7. VII. 76; Streudorf 21. VIII. 77; Theilenhofen 17. VIII. 56.

Haag. Obertaufkirchen 23. VI. 66; Rechtmehring 21. V. 67; Schnaupping 26. VII. 55; Winden 25. VI. 63; St. Wolfgang 16. VI. 79.

Hammelburg. Dittlofsroda 5. VIII. 45; Hetzlos 17. VI. 61; Pfaffenhausen 18. VII. 68, Schwärzelbach 6. VI. 73; Volkersleier 4. VI. 56.

Hassfurt. Hassfurt 5. X. 58; Oberschwappbach 29. IV. 71; Westheim 7. VII. 78; Wohnfurt 18. VII. 71.

Heidenheim. Auernheim 29. VI. 79; Berolzheim 2. X. 69; Bergershof 27.

---

1) In Tabelle V sind bei „Grönenbach" unter p″ drei Fälle angeführt, die zu Ottobeuern zu rechnen waren, so dass für p″ bei Grönenbach 8, bei Ottobeuern 21 zu setzen ist und dementsprechend auch die Werthe von q″ und q′ + q″ etwas zu ändern sind.

VI. 44; Dittenheim 20. VI. 78; Döckingen 5. VI. 57 — 29. VII. 66; Hechlingen 17. VIII. 73; Westheim 10. VII. 68; Windischhausen 3. VII. 69.

Heilsbronn. Beerbach 19. V. 73; Langenloh bei Herpersdorf 1. VI. 77; Mittelnscherbach 6. IV. 48; Petersaurach 29. VI. 63 — 10. VI. 65; Seitendorf 30. IV. 72; Windsbach 5. VII. 75.

Hemau. Aichkirchen 8. III. 78; Beratzhausen 9. VII. 45 — 28. VII. 62 — 30. VI. 73 — 21. VI. 77; Bügerl bei Aichkirchen 22. VIII. 79; Eggertshofen 9. VII. 65; Haugenrieth 20. VII. 58; Kemnathen 21. VIII. 52; Mausheim 24. VII. 51; Rechberg 30. VI. 73.

Hengersberg. Aussernzell 7. VI. 59; Ausserrötzing 30. VI. 79; Engolling 2. VI. 69; Hunding 12. VI. 50; Seebach 9. VIII. 46; Schwankirchen 19. VI. 48; . . . . . ? 1. IV. 61.

Herrieden. Aurach 11. VI. 65 — 3. VII. 71; Burgoberbach 13. IX. 73 — 16. VII. 75; Grossenried 29. VI. 75; Mörsach 14. VIII. 71 — 1. VI. 77; Ornbau 3. VI. 53; Rauenzell 13. VIII. 63 — 31. V. 68 — 17. VIII. 68; Wiesetbruck 8. I. 49.

Hersbruck. Förrenbach 19. VII. 71; Henfenfeld 23. VII. 75; Hersbruck 23. VIII. 71 — 28. VIII. 73; Hohenstadt 18. V. 72; Pollanden 31. VII. 75; Treuf 20. IV. 71; Viehhofen 29. IV. 72 — 5. VI. 73.

Herzogenaurach. Boxbrunn 29. VII. 53; Hannberg 6. I. 65; Hesselberg 24. VII. 77; Kairlindach 17. VIII. 63; Untereichenbach 19. V. 72; (Buschen-) Puschendorf 18. VII. 64 — 4. VI. 72; Röttenbach 14. IV. 70; Zweifelsheim 17. VIII. 61 — 4. VI. 72.

Hilters. Lahrbach 24. VII. 51; Reulbach 6. VIII. 60; Siemershausen 31. V. 64.

Hilpoltstein. Allersberg 19. VI. 66; Bischofsholz 28. VI. 68; Brunau 5. VI. 73; Ebenried 31. VII. 51; Heideck 30. VI. 77; Höfen 28. V. 78; Kleinweingarten bei Mischebach 16. VII. 77; Laffenau 2. X. 69; Mannholz 5. VI. 73; Meckenhausen 24. VIII. 73; Weinsfeld 18. V. 73.

Höchstadt a. A. Elsendorf 3. IX. 61 — 4. VII. 75 — 20. VII. 76 — 24. VII. 76; Fetzelhofen 30. VI. 76; Trimmersdorf 24. VII. 76; Heuchelheim 25. VII. 75; Pommersfelden 19. VII. 49; Schirnsdorf 18. IV. 73.

Höchstädt a. D. Amerdingen 24. VII. 56; Bissingen 5. VIII. 79; Brachstadt 27. VI. 50; Fronhofen 31. V. 68; Hochstein 5. VIII. 79; Höchstädt 17. VIII. 50 — 14. VII. 68; Lutzingen 20. V. 44; Mauren 15. VII. 52; Mörslingen 11. VI. 76; Oberfinningen 21. VI. 58 — 21. V. 79; Oberinningen 8. VII. 75; Schweningen 27. VII. 57 — 6. VIII. 78; Steinheim 19. V. 60 — 2. VII. 69; Tapfheim 24. VI. 70; Unterglauchheim 22. VI. 61.

Hof. Brunnenthal 13. VI. 61 — 18. III. 72; Feilitzsch 18. VII. 73; Gattendorf 6. VII. 45 — 1. VIII. 54; Leupoldsgrün 5. IX. 57 — 19. V. 60; Münchenreuth 10. VI. 79; Silberbach 9. V. 72; Töpen 24. VIII. 56; Wöllbattendorf 25. VI. 67 — 3. V. 68; Zedtwitz 25. IV. 45 — 24. V. 56.

Hofheim. Aidhausen 25. IV. 45; Bundorf 28. IX. 76; Coburg (Enklave) 1. IX. 56 — 19. VIII. 58; Friesenhausen 10. V. 73; Gemeinfeld 5. VI. 73; Gossmannsdorf 2. VIII. 45 — 17. VIII. 68; Kerbfeld 18. VII. 71; Lendershausen 3. VIII. 72; Manau 25. VI. 67; Rügheim 11. IX. 49; Schweinshaupten 4. VII. 54; Stadtlauringen 8. VIII. 76.

Hollfeld. Aufsees 23. V. 44; Breitenlösau 31. V. 55; Bukendorf 24. V. 57; Kainach 21. I. 75; Neuhaus 15. VIII. 59; Treunitz 28. V. 53; Weiher 23. VII. 66; Wonsees 6. I. 65.

Illertissen. Au 29. VII. 62; Aufheim 3. VIII. 62; Bettlinshausen 17. VII. 64; Buch 12. IX. 68; Oberroth 18. IX. 46 — 5. VIII. 79; Osterberg 13. IX. 56; Thal 4. V. 48.

Immenstadt. Gunzesried 20. VII. 71; Untergiessen bei Stein 21. VIII. 77; Stiefenhofen 13. V. 67.

Ingolstadt St. 6. I. 65 — 30. VII. 73 — 17. VI. 75.

Ingolstadt Ldg. Brunreuth 19. VI. 45; Hartacker 8. VII. 75; Ilmendorf 15. VII. 66; Irsching 21. VII. 58; Kösching 23. VII. 63; Oberhaunstadt 1. VII. 77.

Karlstadt. Karlstadt 28. VI. 50; Rohrbach 22. VI. 77 — 8. VII. 77; Thüngen 25. VII. 77; Wiesenfeld 29. VIII. 75.

Kastl. Berg 6. V. 46 — 6. VII. 46; Berghausen 7. VIII. 75; Engelsberg 30. VI. 47; Hagenhausen 20. VI. 61; Hausheim 9. VI. 55; Kastl 4. IX. 49; Laaber 27. VI. 52; Pfeffertshofen 21. VI. 58; Reichertshofen 3. VI. 45; Utzenhofen 10. VI. 51 — 23. VIII. 59.

Kaufbeuren St. 31. VIII. 77.

Kaufbeuren Ldg. Apfeltrang 9. VI. 72; Dösingen 27. VII. 78; Frankenried 20. V. 60; Mauerstetten 18. VII. 66; Rieden 11. V. 65; Schwäbishofen 31. VIII. 79; Thalhofen 31. VIII. 77.

Kehlheim. Abbach 1. VIII. 73; Hirnheim 11. VI. 62; Kehlheimwinzer 17. VIII. 63 — 25. V. 72; Saal 27. VII. 54; Viehhausen 13. V. 78; Walddorf 3. VI. 68.

Kemnath. Babilon bei Lenau 10. VI. 75; Berndorf 6. VIII. 70; Brand 16. VIII. 62; Haidennaab 19. VI. 63; Höflas 9. VIII. 44 — 24. IX. 46 — 15. VII. 72; Immenreuth 17. VII. 46 — 18. VI. 73 — 8. VIII. 77; Kastl bei Kemnath 25. VII. 65; Kemnath 5. VII. 75; Lettenhof bei Haidennaab 5. VII. 75; Mehlmeisl 16. VII.

55; Mitterlind 17. XII. 69 — 19. VIII. 77; Neusteinreuth 11. IV. 67; Pullenreuth 11. VI. 63; Wolframshof 30. VIII. 59.

Kempten St. 21. VIII. 53 — 5. VIII. 69 — 24. VII. 73 — 10. VI. 76 — 9. VI. 77.

Kempten Ldg. Betzigau 28. VII. 72; Buchen bei Mittelberg 4. VIII. 79; Durach 28. VII. 62 — 13. VII. 72; Ellensberg bei Lauben 29. VIII. 78; Faistenoy bei Mittelberg 23. VI. 79; Haneberg bei Wiggensbach 5. VII. 75; Hinterschwarzenberg bei Mittelberg 31. VIII. 77; Krugzell 28. VI. 60 — 4. VI. 75; Lauben 26. VIII. 71; Lenzfried bei St. Mang 16. VII. 75; Martinszell 1. VIII. 73; Masers bei Buchenberg 27. VI. 76; Memhölz 12. VI. 73; Mittelberg 25. VI. 67 — 21. VIII. 67; Rechtis 28. VIII. 73; Sct. Lorenz 4. VIII. 59 — 16. VII. 66; Sct. Mang 28. VII. 62 — 27. IV. 69 — 5. VIII. 69 — 30. VI. 73 — 24 VII. 73; Staig bei Krugzell 29. VIII. 78; Steig bei Haldenwang 22. VIII. 79; Sulzberg 12. VIII. 59; Waltenhofen 29. VIII. 53; Weitenau 16. VI. 70; Wiggersbach 12. VII. 64 — 31. VIII. 77; Wilpoldsried 4. VI. 65.

Kipfenberg. Bitz 2. VIII. 72; Dörndorf 14. VII. 73; Hofstetten 21. V. 79; Irlahüll 5. VI. 75; Kirchenhausen 3. V. 49; Walting 20. VI. 77.

Kirchenlamitz. Brücklas bei Grün 8. VI. 76; Dörflas 5. VII. 75; Grün 17. VII. 46; Neudes 31. VII. 69; Neudorf 10. VII. 68; Reicholdsgrün 10. VII. 68 — 20. VI. 77; Weissenstadt 30. VI. 54 — 20. VI. 77.

Kissingen. Aschach 6. VI. 73 — 2. IV. 76; Bocklet 29. IV. 72. — 21. V. 72; Kissingen 26. VI. 67; Oehrberg 9. IX. 78.

Kitzingen. Fröstockheim 28. VII. 70; Mainbernheim 20. IX. 58; Marktsteft 13. VI. 55; Sulzfeld 23. VII. 51.

Klingenberg. Röllbach 4. VII. 75; Wörth a. M. 25. VI. 70.

Königshofen. Alsleben 3. VII. 55 — 5. VI. 75; Aubstadt 6. VI. 73; Grosseibstadt 6. VI. 73; Herbstadt 22. VI. 51 — 6. VI. 77; Kleineibstadt 1. VII. 67; Königshofen 21. V. 72; Ottelmannshausen 20. VIII. 56; Schauerfeld 10. VI. 64; Sulzdorf a. L. 9. V. 75; Trappstadt 1. V. 71; Zimmerau 27. VI. 78.

Kötzting. Grafenwiesen 3. IX. 70; Grub 6. VI. 56; Hainbühl 11. VIII. 57; Liebenstein 5. VIII. 69; Rittsteig 1. VIII. 62; Roggendorf 31. V. 58; Schwarzenberg 6. VI. 70.

Kronach. Gehülz 8. III. 68; Gundelsdorf 29. VI. 79; Grossviechtach 26. VII. 69; Hummendorf 16. VII. 53; Kleinviechtach 14. VII. 77; Kronach 20. VI. 77 — 20. VI. 77; Küps 29. VI. 79; Mitwitz 2. VII. 70 — 6. VIII. 70; Neufang 20. VI. 77; Oberrodach 20. VI. 77.

Krumbach. Aichen 12. V. 53; Balzhausen 30. VII. 62 — 2. VIII. 64 — 28. VIII. 75; Behlingen 28. VII. 78; Burk 16. V. 48 — 6. VII. 51; Edelstetten 4. IX.

67 — 5. V. 68; Langenneufnach 28. V. 53; Münsterhausen 30. VII. 72; Neuburg a. K. 8. VIII. 78; Niederraunau 5. VIII. 79; Walkertshofen 21. VII. 58 — 3. VI. 68; Waltenhausen 5. IX. 57; Ziemetshausen 16. V. 48.

Kulmbach. Buch a. S. 6. IX. 76; Brücklein 30. VII. 73; Kulmbach 30. VI. 73; Lehenthel I. V. 71; Melkendorf 9. IX. 78; Oberzettlitz bei Leuchau 24. VI. 78; Schlömen bei Hegnabrunn 17. VIII. 77; Wernstein 7. VIII. 70.

Landau a. Is. Eichendorf 26. IV. 46; Aufhausen 16. VIII. 57; Exing 18. VIII. 56 — 21. IX. 77; Grossköllnbach 29. VI. 57; Ganacker 27. VI. 72; Harburg 30. VII. 62; Kammern 23. VII. 63; Landau a. I. 11. IX. 67; Mettenhausen 8. VIII. 46; Niederhöcking 7. VIII. 46; Oberköllnbach 8. VII. 47; Ruhstorf 23. VII. 63; Schmiedorf 7. VI. 65; Reichersdorf 22. VII. 50; Wallersdorf 9. VII. 63 — 13. VII. 63.

Landsberg. Dettenschwang 21. VIII. 67; Erpfting 27. V. 71; Jedelstetten bei Kaltenberg 14. VIII. 77; Landsberg 11. VI. 59 — 27. VIII. 66 — 16. VI. 79; Ludenhausen 18. VI. 66; Oberigling 27. VIII. 60; Penzing 23. VII. 63; Pflugdorf 22. VII. 64 — 18. VII. 66; Pittriching 10. VII. 63 — 8. III. 78; Raisting 28. V. 54; Rott 3. VIII. 61; Schnuring 20. V. 60; Schwabhausen 2. VIII. 64; Stoffen 3. IV. 62; Tettenschwang 9. VII. 58; Theining 15. VI. 56; Weil 21. VI. 67; Walleshausen 31. VIII. 79.

Landshut Ldg. Altheim 4. VI. 73; Ebensland bei Weihmichl 29. VI. 79; Essenbach 4. VI. 73 — 5. VII. 75; Garnzell 23. VII. 63; Inkofen 15. IX. 50; Niederkam 15. IX. 54 — 5. V. 72; Petersglaim 14. IV. 70; Reichersdorf 24. V. 60; Tiefenbach 23. IX. 53; Veitsbuch 4. VI. 75; Vilsheim 29. V. 72; Wölflkofen bei Jenkofen 13. IX. 78.

Lauf. Behringersdorf 20. V. 60; Grossbellhofen 26. VII. 65; Hormersdorf 19. VII. 71; Hüttenbach 2. X. 69; Lauf 24. XI. 68 — 24. XII. 68; Mausgesees bei Herpersdorf 14. VI. 78; Neunhof 11. VII. 71 — 11. VII. 71 — 4. VI. 72; Neunkirchen a. S. 30. VI. 76; Rollhofen 3. VI. 68; Rückersdorf 23. VI. 78; Schnaittach 15. IV. 59 — 26. V. 68 — 9. VI. 76 — 9. VI. 76; Siemenshofen 15. VII. 55.

Laufen. Amring 23. V. 70; Feldkirchen 27. VII. 57; Hausmoning 17. VII. 46; Holzhausen 19. VII. 66; Patting 17. VIII. 61 — 28. VII. 63; Rückstetten 15. III. 59; Saaldorf 28. VII. 68; Surheim 22. VIII. 79; Wonneberg 12. VIII. 60.

Lauingen. Bachhagel 28. VIII. 75 — 28. VIII. 75; Haunsheim 13. V. 44; Gundelfingen 15. VII. 68 — 26. X. 70 — 14. VIII. 71 — 11. VI. 76; Lauingen 12. VII. 58; Veitriedhausen 29. VI. 75.

Leutershausen. Binzwangen 9. VI. 59; Büchelberg 2. VIII. 50; Colmberg 31. V. 68; Dornhausen 12. VII. 73; Egenhausen 17. VIII. 68; Frammetsfelden 17. VI. 64; Leutershausen 24. VI. 70; Mitteldachstetten 14. VI. 64; Sachsen 4. VII. 75.

Lichtenfels. Draisdorf 13. VIII. 68; Hochstadt 20. VI. 77; Horsdorf 29. VI 75; Kleinhereth 20. VI. 60; Lahm 17. VIII. 78; Medlitz 31. X. 69; Mistelfeld 10. VI. 79; Staffelstein 23. IX. 62; Trieb 19. VII. 71; Wolfsdorf 27. VIII. 53; (Markt-) Zeuln 19. V. 53.

Lindau St. —.

Lindau Ldg. Bodolz 18. VIII. 75; Hergensweiler 24. VI. 70; Hochsträss bei Bodolz 5. VIII. 79; Nonnenhorn 16. V. 57; Reutin 5. VIII. 69; Sigmarszell 16. VII. 58; Zeisertsweiler bei Bösenreutin 28. VIII. 75.

Lohr. Frammersbach 20. VI. 77; Partenstein 20. VI. 77; Rechtenbach 25. V. 54; Rodenbach 4. VI. 51 — 28. VI. 79.

Ludwigstadt. Buchbach 13. VIII. 75; Lauenstein 8. VIII. 56; Marienroth 23. VI. 73; Reichenbach 6. VI. 77; Rothenkirchen 3. VI. 54; Steinbach 31. V. 67; Teuschnitz 30. V. 59.

Mallersdorf. Eitting 25. VI. 54; Mallersdorf 8. VI. 64; Martinsbuch 9. VII. 70; Oberdeggenbach 19. V. 60; Oberellenbach 23. VII. 63.

Markt-Bibart. Altmannshausen 9. IV. 45; Hellmitzheim 21. I. 75; Langenfeld 26. VII. 54; Sugenheim 16. I. 48 — 28. VII. 65.

Marktbreit. Gnötzheim 8. IV. 68; Obernbreit 31. VIII. 60; Wässerndorf 15. VI. 75.

Markt-Erlbach. Bräuersdorf 3. VII. 71; Dürrnbuch 1. VII. 75; Erlbach 19. V. 44; Fschenbach 18. VII. 75; Meiersberg bei Dippoldsberg 2. VII. 76; Neuhof 7. VIII. 72; Stockach 15. VI. 45; Vockenroth bei Neuhof 25. VII. 76.

Marktheidenfeld. Lengfurt 31. I. 75; Marktheidenfeld 7. V. 44 — 21. VI. 77; Uettingen 29. V. 61.

Mellrichstadt. Bastheim 21. VI. 77; Frickenhausen 22. IV. 78; Mellrichstadt 9. IX. 78; Mittelstreu 25. VI. 67; Neustädtles 29. VII. 62; Oberfladungen 19. IV. 44; Oberstreu 7. VIII. 70; Rappershausen 13. VIII. 63 — 30. VII. 64; Reihersbach 30. VI. 60; Völkershausen 20. V. 60 — 26. VI. 66.

Miesbach. Bayrischzell 5. VIII. 63; Holzkirchen 24. VIII. 73; Mitterdarching bei Valley 19. VI. 75; Schliersee 25. VII. 73.

Miltenberg. Bürgstadt 19. IX. 79; Kleinheubach 13. V. 61; Laudenbach 21. I. 75; Miltenberg 19. V. 72 — 28. III. 76; Neunkirchen 14. VII. 68 — 5 VIII. 69 — 21. I. 75 — 7. VII. 76; Umpfenbach 13. VI. 64.

Mindelheim. Breitenbrunn 26. V. 57 — 6. VIII. 57; Dirlewang 15. IX. 67; Egelhofen 31. VIII. 63; Kirchdorf 21. V. 79; Mindelheim 30. VII. 49 — 16. VII. 56. — 28. VIII. 73; Nassabeuern 18. VII. 60; Oberauerbach 23. VII. 63; Oberrieden 31. VIII. 63; Peternau 25. VII. 64; Unterkambach 31. VIII. 63 — 22. VII. 64.

Mitterfels. Landorf 14. VIII. 71; Gaishausen 20. VII. 59; Rattiszell 7. VIII. 46; Stallwang 22. VIII. 67; Wiesenfelden 6. VIII. 57.

Monheim. Ammerfeld 14. VII. 73; Burgmannshofen 14. VII. 73; Daiting 1. IX. 57; Flotzheim 31. VIII. 52; Graisbach 12. V. 53; Itzing 19. V. 78; Laub 15. VII. 55; Mauren 31. VIII. 72; Monheim 12. V. 53 — 19. VI. 58; Weilheim 19. VI. 58.

Moosburg. Brückbergerau 14. V. 61; Gammelsdorf 12. V. 73; Grafendorf 19. VII. 71; Grünnberg 22. IV. 51; Holzhof bei Hemhausen 31. VIII. 79; Hörgertshausen 16. V. 67 — 2. X. 69; Kleinwolfersdorf bei Figlsdorf 25. VI. 78; Leibersdorf 14. VII. 73; Moosburg 25. VI. 78 — 13. VI. 79; Obersüssbach 18. VI. 69 — 13. VI. 77; Tegernbach 5. VIII. 57; Thonstetten 14. VIII. 49 — 10. VI. 76; Wang 8. VII. 66 — 3. VI. 68; Wolfersdorf 28. VII. 62.

Mühldorf. Altmühldorf 10. VII. 68; Aschau 21. VI. 69; Erharding 3. VI. 60; Flossing 29. VI. 57 — 3. V. 72; Klugham 31. VII. 75; Mühldorf 26. VIII. 71; Rückl bei Taufkirchen 2. VII. 77; Oberneunkirchen 24. V. 65; Polling 7. VII. 73; Zeiling 24. VIII. 67.

Münchberg. Ahornberg 8. IV. 67; Ahornis bei Poppenreuth 19. V. 78; Enchenreuth 8. VII. 55; Hohenberg 6. I. 65; Mackersreuth 20 VI. 53; Mechlenreuth 6. VIII. 79; Münchberg 14. VI. 64 — 24. VI. 70 — 5. VI. 75; Neuensorg 29. IX. 59 — 22. IX. 61; Stammbach 4. VIII. 68; Sparneck 14. V. 50 — 13. V. 72; Straas 6. VI. 45 — 3. VIII. 47 — 3. VI. 59; Unterweissenbach 26. IV. 46; Weisdorf 25. V. 65; Wüstenselbitz 20. VI. 53 — 26. V. 68.

München St. 15. VI. 56 — 7. VI. 67 — 5. V. 68 — 31. V. 68 — 1. VIII. 70 — 19. VII. 71.

München.[1]) Allach 27. IV. 53; Aubing 24. VIII. 53 — 31. V. 68 — 1. V. 78; Feldmoching 12. V. 53 — 31. VIII. 69; Moosach 31. V. 67; Oberhaching 6. VII. 77; Obermenzing 4. VI. 66; Pasing 28. VI. 60; Schwabing 1. VIII. 73; Unterhaching 17. VII. 77.

Münnerstadt. Nüdlingen 2. IV. 76; Steinach a. S. 14. IX. 73; Volkershausen 8. IV. 68.

Nabburg. Altfalter 23. VII. 67; Diendorf 12. VI. 55; Ettsdorf 16. V. 60 — 18. VII. 64; Guteneck 27. IV. 70; Iffelsdorf 6. I. 65; Kögl 10. V. 65; Losau 11. VI. 64; Pamsendorf 29. VI. 63 — 28. VII. 65; Perschen 5. VI. 53; Schmiedgaden

---

1) In Tabelle V sind unter Ldg. München 2 Fälle mitgezählt, die unter Au bei München aufzuführen waren, nämlich „Daglfing 24. VIII. 67“ und „Oberföhring 28. VII. 73“; es ist demnach p″ bei München in 8 und bei Au in 2 zu corrigiren, q′ + q″ aber in 3,6 bezw. 0,7.

6. VIII. 58; Söllitz 9. VI. 72 — 23 VII. 67; Stulln 16. VIII. 62; Unterkatzbach 13. VI. 66; Weiding 29. VII. 62 — 11. V. 63 — 8. III. 68; Weihern 19. VIII. 56; Wolfsbach 5. VIII. 58.

Naila. Döbra 18. VII. 68; Geroldsgrün 4. VI. 52; Karlsgrün 23. VI. 44; Lichtenberg 9. VI. 76; Obersteben 23. VII. 78; Räumlas 6. VIII. 70; Rödesgrün 10. VI. 64; Steinbach 4. VI. 52; Schwarzenbach a. W. 14. VIII. 68.

Neuburg a. D. St. 20. VII. 71 — 7. IV. 75.

Neuburg a. D. Ldg. Baar 9. VI. 72; Dünkelshausen 17. VII. 48; Ehekirchen 13. VII. 61; Hütting 3. VI. 64; Karlshuld 13. VII. 72; Karlskron 8. VII. 45 — 13. VI. 48 — 16. VII. 55 — 19. VII. 71; Leidling 30. V. 59; Lichtenau 24. V. 57 — 23. VI. 71; Oberstimm 24. V. 60; Manching 7. VII. 47; Rohrenfels 30. V. 68 — 27. III. 71 — 8. VII. 72; Unterhausen 29. VI. 79.

Neumarkt i. O.B. Fundhobel bei Niederbergkirchen 8. VIII. 78; Hörbering 11. VI. 56; Kiening bei Niederbergkirchen 8. VIII. 78; Niederbergkirchen 23. VII. 59; Oberbergkirchen 8. III. 78; Oberhofen 13. V. 67; Schönberg 10. VI. 75; Tegernbach 16. VII. 73; Walkersaich 9. VII. 65 — 1. V. 71; Wolfsberg 25. V. 47 — 18. VIII. 63.

Neumarkt. Arzthofen bei Oberbuchfeld 20. VI. 77; Freistadt 6. VIII. 58; Grassahof 11. VIII. 69 — 21. V. 79; Grossthundorf 2. VIII. 47; St. Helena 14. VIII. 46; Hofen 24. VII. 68; Kleinaltfalterbach 4. VIII. 55; Köstlbach 28. VII. 67; Kruppach 28. VIII. 57; Mönnig 24. VII. 68 — 14. VII. 73; Mühlhausen 10. VII. 71; Neumarkt 3. VII. 72 — 14. VII. 73 — 5. VII. 75; Oberndorf 28. VIII. 62; Oberbuchfeld 28. VII. 65 — 21. V. 79; Pavelsbach 31. V. 56; Pelchenhofen 17. VI. 58; Pölling 20. VI. 56 — 13. VI. 60; Röckersbühl 29. VIII. 65; Rockersdorf bei Kruppach 29. VIII. 75; Siegenhofen 20. VII. 59; Stauf 25. VI. 71; Unterbuchfeld 31. VII. 51; Weihersdorf 26. V. 59.

Neunburg v. W. Egelsried 30. VII. 69 — 1. VIII. 73; Fuhren 5. VII. 75; Haag 28. VII. 62; Katzdorf 18. VI. 73; Kleinwinklarn 10. XII. 45; Neukirchen 6. I. 65; Pillmersried 12. V. 57; Schwarzhofen 20. VII. 79; Sonnenried 9. VII. 65; Stockarn 8. V. 69; Thann 2. V. 69; Uckersdorf 20. I. 63; Unterstocksried bei Egelsried 27. VII. 76; Ziegelöd 25. VII. 67.

Neustadt a. A. Baudenbach 8. VII. 75; Birnbaum 8. VII. 59; Coburg (?) bei Königshofen (?) 10. IX. 63; Dispeck 13. VI. 48 — 25. V. 72; Dettendorf 29. VII. 53; Guttenstetten 29. VI. 53 — 24. VI. 75; Hambühl 31. VII. 70; Peppenhöchstädt 14. VI. 64 — 18. IV. 73; Reinhardshofen 18. VI. 52 — 19. V. 63; Rennhofen 4. IX. 71; Riedfeld bei Neustadt a. A. 21. V. 79; Schauerheim 25. V. 72; Schornweisach 18. VII. 50; Tragelhöchstädt 29. VII. 53; Uehlfeld 31. V. 56.

Neustadt a. S. Brendlorenzen 3. V. 78; Hohenroth 29. VI. 79; Hollstadt

28. VII. 75 — 13. VI. 79; Salz 9. IX. 78; Unsleben 30. VII. 73; Wollbach 15. IV. 51.

Neustadt a. Wn. Floss 8. III. 68 — 18. VI. 73; Lanz bei St. Quirin 21. I. 75; Neustadt a. Wn. 1. VIII. 70; Mühlberg 30. V. 57.

Neu-Ulm. Erbishofen 31. VIII. 52; Ettlishofen 4. IV. 62; Holzschwang 8. VI. 76; Leibi 23. VIII. 65; Neu-Ulm 18. V. 57 — 20. VII. 71; Nersingen 18. V. 57 — 23. VI. 61; Oberelchingen 22. VI. 77; Oberfahlheim 20. IV. 53 — 30. VI. 66 — 16. VII. 75; Offenhausen 21. V. 79; Pfaffenhofen a. R. 28. VI. 63 — 10. VII. 68; Pfuhl 9. VII. 58; Radelshofen 5. V. 49; Steinheim 5. VI. 70; Unterelchingen 23. V. 75; Unterfahlheim 26. IV. 79; Volkertshofen 28. VI. 63.

Nittenau. Buchhof 20. VIII. 66; Bruck 15. VIII. 59; Dangelsdorf 14. VII. 70; Kienleiten bei Reichenbach 7. V. 78.

Nördlingen St. 19. II. 52 — 16. VIII. 57 — 16. VIII. 57 — 2. VIII. 69.

Nördlingen Ldg. Allerheim 24. VI. 71; Appetshofen 29. VIII. 65; Balgheim 31. V. 61; Bollstadt 27. VII. 76[1]); Böpfingen 3./4. VIII. 55[1]); Deggingen 27. VII. 73; Grosselfingen 27. VII. 73; Hürnheim 20. VI. 61; Niederaltheim 23. VII. 67; Schmähingen 7. VI. 64; Zwisingen 29. IV. 72 — 22. VIII. 72.

Nordhalben. Nordhalben 25. VII. 67 — 1. VII. 75.

Nürnberg St. 9. VII. 57 — 28. VIII. 58 — 9. VI. 59 — 22. VII. 59 — 6. I. 65 — 24. VII. 67 — 27. III. 68 — 27. IV. 70 — 25. VI. 71 — 4. VI. 72 — 19. V. 73 — 28. VII. 73 — 24. VII. 77; Galgenhof 6. VII. 46; Schoppershof 29. IV. 71.

Nürnberg Ldg. Burgfarrnbach 4. VI. 72; Grossreuth h. V. 19. V. 72; Höfen 23. VI. 66 — 23. VI. 66; Kleinreuth h. V. 2. VIII. 69 — 9. VI. 76 — 19. IX. 79; Lauf am Holz 17. VI. 56; Mögeldorf 16. VII. 55; Sündersbühl 22. V. 65; Unterfarrnbach 28. VII. 73; Wetzendorf 2. VI. 60.

Oberdorf. Altorf 17. VII. 68; Bidingen 22. VIII. 77 — 22. VIII. 79; Klosterhof bei Wald 4. VIII. 79; Leuterschach 26. VII. 69; Löchlers bei Rettenbach 4. VIII. 79; Rudratshofen 24. VII. 69; Thalhofen 23. VI. 68; Tremmelschwang bei Bidingen 12. V. 78; Wies bei Wald 31. VIII. 77.

Obergünzburg. Friesenried 17. VI. 73 — 16. V. 79; Görwangs bei Aitrang 22. VIII. 79; Mittelberg 16. VII. 75; Obergünzburg 29. VIII. 78; Reinhardsried 5. V. 72; Untrasried 27. VI. 50; Willofs 2. V. 52 — 24. VI. 54 — 27. VI. 66 — 5. V. 68.

Obernburg. Grosswallstadt 18. VII. 75 — 16. V. 77.

---

1) Früher zu Bissingen gehörig und unter diesem Ldg. in Tabelle V aufgeführt.

Oberviechtach. Dietersdorf 14. IX. 57; Friedrichshäng 9. VII. 65; Gleiritsch 31. VII. 75; Niedermurach 20. VI. 77; Nottersdorf 27. VII. 52 — 20. VI. 61; Nunzenried 10. IX. 67 — 28. VI. 69; Pirk 20. VI. 77; Schönau 20. VI. 77; Stadlern 7. VII. 65; Wildstein 11. VI. 56.

Ochsenfurt. Eibelstadt 29. VI. 53 — 27. VI. 78; Essfeld 5. VI. 56; Fuchsstadt 12. VIII. 56; Giebelstadt 13. VI. 77; Hohestadt 10. V. 56; Ochsenfurt 14. V. 62 — 31. VII. 69 — 20. VI. 78.

Orb. Alsberg 9. VI. 62; Orb 22. IV. 54.

Osterhofen. Altenmarkt 26. IV. 46; Buchhofen 24. VIII. 50 — 19. VIII. 58 — 29. VI. 79; Künzing 8. VIII. 44 — 19. VII. 47 — 10. IX. 52 — 8. IV. 60; Oberviehhausen bei Wallerfing 22. VIII. 79.

Oettingen. Belzheim 6. IX. 52; Fessenheim 15. V. 69 — 30. VI. 76 — 18. VIII. 79; Fremdingen 20. VII. 55 — 9. V. 67; Hochaltingen 16. V. 72; Lohenbach 13. IV. 46; Niederhofen 6. II. 67; Utzwingen 30. VII. 73.

Ottobeuren.[1]) Amendingen 7. VII. 78; Arlesried 25. VI. 70; Attenhausen 22. VI. 52; Betzisried 27. VI. 66; Böhen 23. VI. 66; Buxheim 5. VIII. 79; Dietratsried 6. IV. 56; Frechenrieden 7. VII. 50 — 5. VIII. 79; Günz 1. VI. 76; Guggenberg 31. VIII. 52 — 14. VIII. 56; Haitzen 23. VIII. 50 — 6. VII. 69; Hatzelberg bei Engetried 13. IX. 77; Lachen 8. VII. 47; Lauben 1. VI. 77; Lauberhart 28. VIII. 75; Lauenberg 21. V. 60; Moosbach 11. VI. 76; Niederdorf 15. VI. 56 — 10. V. 65; Eck 4. VII. 55; Ottobeuren 16. VII. 56 — 9. VI. 76 — 16. VI. 79; Rettenbach 20. V. 60 — 20. VII. 77; Rummeltshausen bei Günz 14. VI. 78; Schwaighausen 6. IX. 76; Sontheim 8. VII. 45; Steinheim 14. VI. 56 — 19. VIII. 77; Stephansried 8. VIII. 78; Unterholzgünz bei Holzgünz 7. VII. 78; Unterwesterheim bei Westerheim 21. V. 79.

Parsberg. Darshofen 17. VI. 64; Eichenhofen 13. VIII. 67 — 29. IV. 72; Hörmannsdorf 11. VI. 76; Klapfenberg 31. VIII. 55; Kühnhausen 28. VII. 70; Oberwiesenacker 11. IV. 53; Rammersberg bei Mantlach 7. VI. 76; Ronsolden 16. VII. 57; Seibersdorf 20. VI. 77.

Passau St. —.

Passau I Ldg. Fürstenstein 6. VIII. 62; Salzweg 20. VII. 71; Rettenbach 27. VI. 76; Tiefenbach 16. VII. 68.

Passau II Ldg. Altenmarkt 10. VII. 68; Egelsee 5. VIII. 59 — 7. VIII. 60; Eholfing 5. VIII. 45; Engertsham 2. VII. 67; Höhenstadt 28. VII. 77; Neuburg 26. VII. 54; Neukirchen 11. VI. 58; Sandsbach 8. VIII. 65; Sulzbach 21. IX. 58.

---

1) Siehe die Anmerkung bei Grönenbach.

Pappenheim. Geislohn 16. VII. 72; Göhren 21. V. 68; Haardt 14. VIII. 71.

Pegnitz. Creussen 4. VIII. 55 — 7. VII. 66; Eichenstruth bei Spies 13. VI. 77; Gottsfeld 2. X. 69; Haidhof 8. III. 68; Kleinwaiglareuth bei Gottsfeld 18. VII. 75; Otlenhof 7. VIII. 72; Spiess 1. IX. 57; Prebitz 6. VIII. 45; Seidwitz 30. VII. 72; Tiefenthal 31. V. 76; Zips 22. VII. 51 — 4. VIII. 56.

Pfaffenhofen. Aufham 14. V. 61 — 10. VI. 76; Euernbach 23. VI. 66; Eschelbach 14. V. 61; Förnbach 12. VIII. 46; Haimpertshofen 22. VI. 77; Ilmünster 8. VIII. 46 — 10. VI. 75; Langenbruck 25. V. 49 — 9. VI. 55; Nötting 9. VI. 55; Paindorf 30. VI. 73; Reichertshausen 13. VI. 55 — 17. VI. 63; Rottenegg 9. VII. 65; Steinerskirchen 24. VIII. 72; Tegernbach 8. VI. 45 — 5. VIII. 57; Pfaffenhofen 30. VI. 44; Vieth 19. V. 60; Weiden 25. IV. 45; Wollnzach 4. IX. 61.

Pfarrkirchen. Brombach 4. VIII. 72; Geretsham bei Neukirchen 17. IX. 77; Mitterhausen 11. V. 65; Neukirchen 29. VI. 66; Untergrafendorf 23. VIII. 46; Untergrafensee 23. VII. 63.

Pottenstein. Ottenberg 14. VI. 61; Kleingesee 6. VII. 73; Trockau 1. IX. 57.

Prien. Endorf 24. IX. 53 — 6. VIII. 57 — 2. VII. 77; Hüttenkirchen 31. VIII. 58; Rimsting 15. VII. 62.

Rain. Etting 30. VII. 62 — 25. VII. 65; Rain 23. VI. 66 — 14. VII. 73; Thierhaupten 2. IX. 73.

Regen. Kandlbach bei Kasberg 18. VII. 76; Regen 20. IX. 69.

Regensburg St. 16. VIII. 57 — 29. VIII. 78.

Regensburg Ldg. Barbing 2. IX. 67; Gebelkofen 3. IX. 52; Geisling 24. VII. 73; — 10. VII. 75; Langenerling 24. VII. 51; Moosham 10. VII. 69; Niedertraubling 13. IX. 78; Obersending 14. VI. 56; Pfatter 8. III. 78; Rogging 10. VII. 68.

Regenstauf. Diefenbach 25. VI. 54; Grünthal 17. VII. 58; Reinhardshofen 21. VIII. 66; Schönberg 3. VI. 68.

Rehau. Autengrün 15. VI. 61; Draisendorf 6. VI. 77; Förbau 17. VI. 75; Fohrenreuth 10. VIII. 59; Martinlamitz 20. VI. 54 — 20. VI. 55; Oberkotzau 18. VII. 76 — 6. VI. 77 — 21. VI. 77; Pilgramsreuth 12. VII. 63; Prax 30. VII. 53 — 6. I. 65; Quellenreuth 18. VI. 70 — 12. V. 73; Rehau 18. VI. 52 — 12. VI. 54 — 15. VI. 61; Schwarzenbach 15. VI. 61 — 12. VI. 63.

Riedenburg. Dietfurt 10. XI. 69; Eggersberg 25. IV. 45; Gimpertshausen 8. VI. 56 — 28. VII. 62; Otterzhofen 19. V. 73; Tettenagger bei Hüttenhausen 18. VII. 75; Unterbürg 30. VI. 73.

Roggenburg. Balmertshofen 18. VII. 60; Bieberach 14. IV. 51 — 16. IV. 51; Breitenthal 10. VI. 79; Edelstetten 17. IX. 61; Ellzen 16. VI. 61; Gannertshofen 16. VIII. 63 — 3. V. 76 — 31. VIII. 79; Grafertshofen 8. VI. 62; Hösel-

hurst 2. IX. 67; Messhofen 3. VII. 62 — 3. VII. 63; Nordholz 30. VII. 62; Obenhausen 8. VII. 75; Tafertshofen 13. VI. 60; Weissenhorn 30. VIII. 69.

Roding. Beucherling 30. VI. 47; Regenpeilstein 14. VI. 55; Roding 4. VIII. 70.

Rosenheim.[1]) Flinsbach 13. IX. 46; Grossholzhausen 21. VI. 58; Kirchdorf a.H. 2. VIII. 63; Oberaudorf 6. VIII. 72; Raischenhardt 1. VIII. 69; Sulmaring bei Vogtareuth 6. VII. 77.

Roth. Abenberg 29. VIII. 78; Auerau 10. V. 75; Belmbrach 12. VI. 73; Eckersmühlen 4. VII. 75; Hauslach 8. III. 68; Obersteinbach 19. V. 73; Pfaffenhofen 29. VII. 62 — 4. VI. 72; Roth 26. VII. 69; Rothaurach 24. VI. 67; Spalt 2. VI. 72 — 7. VIII. 75; Weingarten 23. IV. 46.

Rothenburg a. T. St. —

Rothenburg a. T. Ldg. Gattenhofen 6. VI. 73; Gebsattel 21. VII. 59 — 16. V. 78; Leuzenbronn 12. V. 44; Lohr 10. VII. 71; Steinsfeld 21. VII. 63.

Rothenfels. Birkenfeld 29. VI. 75; Karbach 21. I. 75; Neustadt a. M. 26. V. 57; Steinfeld 3. V. 72 — 14. VI. 76; Urspringen 2. IX. 67.

Rottenburg. Andermannsdorf 17. IX. 68; Gatzkofen bei Kirchberg 14. VII. 77; Högldorf 19. VII. 66 — 8. III. 78; Holzhausen 23. VIII. 50; Hohenthann 10. VII. 75; Inkofen 9. VII. 65; Oberergoldsbach 6. VII. 73; Oberhatzkofen 17. VIII. 77; Pfaffendorf 9. VII. 65 — 2. VII. 67; Pfeffenhausen 7. VIII. 70; Unterlauterbach 24. V. 52.

Rotthalmünster. Asbach 21. V. 67; Harham bei Malching 23. VI. 76; Indling 8. VI. 67; Malching 23. VIII. 64; Sofferstetten bei Füssig 30. VIII. 69.

Selb. Erkersreuth 28. VII. 73; Längenau 25. IV. 69; Schönwald 31. V. 67.

Sesslach. Dietersdorf 5. IX. 58; Gemünda 3. VIII. 78; Gleussen 18. VIII. 68; Kaltenbrunn 24. V. 60; Lahm 21. V. 72; Obereldorf 1. VIII. 70; Rattelsdorf 3. IX. 61; Schottenstein 12. VII. 73; Sesslach 1. IX. 48.

Simbach. Eiberg bei Zimmern 25. VI. 78; Ering 5. VIII. 56; Julbach 23. VI. 68; Machendorf bei Kirchdorf a. I. 13. VI. 77; Obertürken 17. VIII 59; Piering bei Wittibreuth 22. VIII. 79; Randling 28. V. 57; Simbach 14. VII. 46; Zimmern 14. VI. 54 — 22. IX. 54.

Schesslitz. Bojendorf 11. VIII. 69; Merkendorf 30. V. 57; Oberoberndorf 31. VII. 69; Strassgiech 4. V. 78; Unteroberndorf 8. VII. 59.

---

1) In Tabelle V sind durch einen Schreibfehler die Werthe von p′ und p″ für Roth und Rosenheim vertauscht worden und müssen demnach die Werthe von q′+q″ heissen: bei Roth 2,6 und bei Rosenheim 1,8.

Schillingsfürst. Diebach 29. IV. 71; Erzberg 15. IV. 59; Frankenheim 1. VII. 77 — 24. VI. 78; Kloster Sülz 13. VI. 60.

Scheinfeld. Fürstenforst 22. V. 75; Hohlweiler 24. VII. 56; Holzberndorf 12. V. 68; Niederndorf 5. VII. 73 — 12. VII. 73; Oberimbach 25. VII. 76 — 13. VI. 77; Obersteinbach 16. V. 78; Prühl 11. VII. 71; Taschendorf 9. VIII. 48.

Schöllkrippen. Dörnsteinbach 8. VII. 75.

Schongau. Altenstadt 15. V. 54 — 14. VI. 64 — 9. VI. 77; Bayersoien 16. VI. 79; Bernbeuern 3. VIII. 71; Böbing 6. VIII. 69 — 27. VI. 78; Burggenn 5. V. 48 — 15. V. 54 — 9. VII. 54 — 16. VIII. 57; Hohenfurth 8. VII. 45 — 2. VIII. 64; Kurzenried bei Peiting 25. VII. 78; Hohenpeissenberg 3. VIII. 71; Langegg bei Bernbeuern 6. IX. 79; Peiting 20. V. 60; Reichling 3. VII. 71; Rottenbuch 22. VII. 79; Schönberg 23. VII. 45; Schongau 2. VI. 60 — 25. VII. 78; Schwabbruck 5. V. 68; Schwabsoien 14. VII. 77; Trauchgau 12. VIII. 60; Unterobland bei Peiting 31. VIII. 77; Urspring 14. VII. 68; Wildsteig 24. IX. 55.

Schrobenhausen. Aresing 17. VII. 57; Berg i. G. 6. VIII. 54; Gachenbach 14. VII. 77; Klenau 28. VII. 73; Langenmoosen 23. VI. 66; Lichthausen bei Gerolsbach 21. VI. 77; Pobenhausen 6. VII. 46; Sandizell 26. IV. 46; Sattelberg 30. VI. 59; Schreck 19. VII. 47; Seibersdorf 3. VIII. 47; Steingriff 10. V. 60; Volkersdorf 23. VIII. 62; Waidhofen 20. VI. 46; Weilach 12. IX. 47.

Schwabach St. 22. VIII. 62 — 14. III. 67 — 23. V. 75 — 6. VI. 75.

Schwabach Ldg. Büchenbach 23. V. 53; Grossschwarzenlohe 6. VI. 75; Gustenfelden 5. VIII. 63 — 28. VI. 67; Igelsdorf bei Walpersdorf 20. VI. 78; Kleinschwarzenlohe 9. VI. 72; Ottersdorf 27. VII. 65; Regelsbach 11. VII. 68; Raubersried 6. VI. 75; Untereichenbach 3. VIII. 60; Wendelstein 25. VI. 71 — 31. VII. 75; Worgeldorf 10. IV. 73.

Schwabmünchen. Bobingen 17. V. 57 — 23. VII. 63; Grossaitingen 29. VII. 62; Kleinkitzighofen 23. VII. 63; Königsbrunn 25. VI. 44 — 28. V. 53; Langenerringen 13. VII. 61; Mittelstetten 17. V. 73; Ottmarshausen 7. VIII. 57; Schwabmühlhausen 28. VI. 60; Schwabmünchen 29. V. 66 — 28. VIII. 75; Siegertshofen 21. IX. 58; Wehringen 29. VII. 62.

Schwandorf.[1]) Ettmannsdorf 8. VII. 76; Freihöls bei Kronstetten 31. VII. 75.

Schweinfurt St. —

Schweinfurt Ldg. Grafenrheinfeld 29. VII. 47 — 22. VII. 63; Grettstadt 9. II. 69; Oberndorf 30. VI. 69; Pfändhausen 21. VI. 77; Reichelshof bei Weiler

---

1) Früher zu Burglengenfeld gehörig, zu welchem auch die beiden Fälle in Tabelle V gerechnet wurden.

14. II. 69; Reichmannshausen 26. V. 68; Schwebheim 25. VI. 67; Sennfeld 23. VI. 68; Uechtelhausen 14. VII. 73; Weipoltshausen 14. VII. 73.

Sonthofen. Burgberg 7. VI. 67; Hindelang 12. VII. 64; Maiselstein 30. VIII. 47; Oberstdorf 15. VI. 76; Rieden 18. V. 75.

Stadtamhof. Burgweinting 6. VII. 64 — 20. VII. 71; Kareth 1. VII. 76; Kneiting 1. VII. 76; Lappersdorf bei Oppersdorf 9. VI. 77; Oppersdorf 3. VI. 68 — 14. VIII. 71; Pentling 7. VII. 73; Prüll 13. VI. 61; Rodau 14. VIII. 71; Schwabelweis 16. V. 72; Steinweg 5. VI. 73; Walhallastrass bei Schwabelweis 22. VIII. 79.

Stadtsteinach. Heinersreuth 18. VI. 58; Kupferberg 16. IV. 67 — 10. VI. 75; Marienweiher 4. VII. 71 — 23. VI. 72; Marktleugast 28. VII. 78; Schlopp bei Wildenstein 21. VI. 78; Untersteinach 29. VI. 79; Vorderreuth bei Schwand 13. VII. 77; Weidmes 12. VI. 78.

Stadtprozelten. Esselbach 4. VII. 75; Michelrieth 19. VIII. 70.

Starnberg. Argelsried 16. V. 55; Berchting 14. VI. 56; Frieding 22. VIII. 79; Iming 11. VII. 71 — 26. VIII. 73; Kempfenhausen 15. VII. 77; Krailing 24. VIII. 67; Oberpfaffenhofen 5. VI. 61; Percha 9. V. 54; Rösslberg bei Tutzing 14. VII. 77; Unterbrunn 17. VII. 65; Wangen 31. VII. 69; Wessling 11. VI. 65.

Straubing St. 26. VI. 49 — 18. VIII. 65 — 9. VI. 72 — 6. IX. 76.

Straubing Ldg. Ackerhof 24. V. 67; Aholfing 15. VII. 68; Alburg 4. VIII. 52; Feldkirchen 29. VI. 79; Hardt bei Obersünzing 8. III. 78; Harthof bei Alburg 15. VI. 75; Kössnach 12. V. 47; Mitterharthausen 17. VI. 64; Niederharthausen 9. VI. 72; Oberbiebing 7. IV. 53; Peinkofen bei Grafling 22. VIII. 79; Pönning 26. IV. 46; Wolferkofen 4. VIII. 70; Zeitldorn 25. V. 73.

Sulzbach. Ammersricht 26. V. 59; Augsberg 19. VI. 45 — 1. VIII. 52; Eckeltshof 5. VIII. 79; Eschenfeld 22. VIII. 47; Kauerheim bei Alfeld 5. VIII. 79; Königstein 30. VI. 73 — 19. VIII. 77; Lohe 14. IV. 70; Namsreuth 25. VII. 76; Neidstein 8. VIII. 72; Obermainshof 24. VI. 67; Poppenricht 21. VIII. 51; Röckenricht 17. VII. 75.

Tegernsee. Ostin 3. VIII. 62; Wiessee 31. V. 67.

Tirschenreuth. Bärnau 28. VIII. 52 — 17. VI. 63; Ellenfeld 13. V. 72; Hohenthann 17. VI. 63; Mähring 6. VIII. 70; Neuhaus 4. VI. 59; Oedwaldhausen 19. VI. 65; Plössberg 17. V. 46; Schönkirch 11. VI. 64; Tirschenreuth 27. V. 52 — 1. VIII. 52 — 28. VII. 73 — 14. VII. 77.

Thiersheim. Arzberg 9. IX. 56 — 14. VI. 69; Mittelhochstadt 31. V. 56; Röthenbach 30. VII. 72; Schirnding 30. VII. 73; Seussen 17. IV. 73 — 24. VI. 78; Thiersheim 20. V. 60 — 23. VII. 78.

Tittmoning. Asten 3. V. 60 — 1. V. 71; Freitsmoos 21. IV. 51; Kirchheim

14. VII. 69; Pielting 27. VII. 45; Tengling 3. IV. 76; Tittmoning 5. VIII. 56; Törring 17. VIII. 62.

Tölz. Lenggries 17. VII. 47; Tölz 8. VIII. 44.

Traunstein. Egerndach 27. VII. 65; Eisenärzt 14. VII. 61; Haslach 13. VII. 72; Hassmonning 26. VIII. 71; Inzell 29. VII. 73; Matzing 23. VI. 61; Oberhochstätt 17. V. 57; Ruhpolding 9. VII. 53; Surrberg 24. VIII. 67 — 9. VII. 72 — 13. VII. 72; Traunstein 9. VII. 72 — 21. IX. 77; Unterwessen 4. V. 71; Wolkersdorf 28. VII. 68.

Trostberg. Albertaich 3. V. 75; Altenmarkt 14. VIII. 49; Ammerang 28. VI. 63; Breitbrunn 1. VI. 61; Chiemsee 24. IV. 51; Emertsham 2. VIII. 46 — 19. VII. 71; Engelsberg 5. IX. 57; Oberfeldkirchen 21. V. 73; Obing 15. III. 59; Pittenhart 8. IV. 67 — 2. IX. 73; Rabenden 5. VIII. 45 — 9. VII. 65; Trostberg 2. IX. 73.

Türkheim. Ettringen 3. VIII. 45; Haselbach 11. VI. 76; Konradshofen 17. VIII. 56; Mattsies 30. VI. 73; Mittelneufnach 9. VII. 65; Schwabegg 22. VIII. 79; Siebnach 17. V. 75; Spöck 15. V. 54; Traunried 31. V. 68; Türkheim 3. VII. 63 — 27. VIII. 67; Tussenhausen 23. VII. 68 — 28. VIII. 73 — 1. VII. 77; Wald 9. V. 64 — 22. VIII. 79.

Thurnau. Langenstadt 30. VII. 73 — 30. VII. 73; Limmersdorf 13. VIII. 57.

Uffenheim. Bergtheim 14. V. 65; Gollhofen 7. VIII. 46; Gülchsheim 1. X. 60; Herbolzheim 29. VIII. 78; Pfaffenhofen 14. V. 78; Reusch 23. VII. 67; Uffenheim 4. VI. 66.

Viechtach. Geiersthal 3. VII. 59; Kirchaitnach 28. VII. 57; Moosbach 21. VIII. 47 — 22. VIII. 58; Teisnach 25. VII. 46; Viechtach 19. VII. 47.

Vilsbiburg. Aich 18. IV. 66; Altenkirchen bei Rampaltstetten 9. IX. 78; Angersdorf bei Kröming 30. VI. 79; Babing 9. VIII. 72; Bayerbach 7. V. 79; Bergham 1. VII. 65; Dietelskirchen 20. VII. 71; Frauensattling 27. V. 78; Hölsbrunn 15. IX. 54; Holzhausen 20. VI. 49 — 23. VIII. 64; Horbach 18. IV. 73; Lichtenhang 20. VI. 44; Münster 18. V. 73; Neufrauenhofen 12. VIII. 68; Ramplstetten 6. V. 46; Reichreit bei Wolferting 9. IX. 78; Rothenwörth 7. VI. 64; Salksdorf 19. VIII. 56 — 17. VI. 61; Schalksham 15. IX. 54; Seidlthal bei Feilizenzell 15. VII. 77; Seiboldsdorf 4. VIII. 56; Vilslern 26. VII. 69; Wolferting 3. VII. 57; Wurmsham 7. VI. 64.

Vilseck. Ebersbach bei Gressenwöhr 3. V. 78; Kürmreuth 22. VII. 58 — 24. VI. 67; Schlicht 18. VII. 64 — 13. VI. 77; Schönlind bei Irlbach 10. VI. 75; Sigl 25. VII. 65; Sigras 13. IV. 50 — 8. VII. 65 — 26. VII. 65; Vilseck 28. VII. 57 — 18. VII. 64 — 8. VII. 65.

Vilshofen. Alkofen 15. VII. 58; Aunkirchen 24. V. 52 — 18. V. 75; Zaundorf bei Hilgartsberg 7. VIII. 75.

Vohenstrauss. Albesrieth 1. VI. 68; Altentresswitz 16. V. 60; Eslarn 28. VII. 72; Etzgersrieth 19. VII. 71; Finkenhammer 28. VII. 65; Kleinschwand 18. IV. 73; Lohma 26. VIII. 67; Leuchtenberg 30. VI. 53; Miesbrunn 12. V. 57 — 24. VII. 76; Moosbach 2. X. 69; Oedpillmannsberg 26. VII. 67; Oelschlag bei Moosbach 7. VIII. 79; Tännesberg 17. VIII. 63; Tresswitz 28. VII. 65; Vohenstrauss 17. VII. 72; Waidhaus 10. IV. 62; Wieselrieth 24. VI. 67; Witschau 1. VI. 68.

Volkach. Astheim 11. IV. 67; Dimbach 27. VII. 51; Eichfeld 21. V. 68 — 18. VII. 75; Kolitzheim 27. VII. 76; Nordheim 6. VIII. 58 — 19. V. 63; Obereisenheim 7. VI. 67; Obervolkach 3. VIII. 65; Reupelsdorf 31. V. 68; Sommerach 20. V. 51 — 10. VII. 65; Stadelschwarzach 9. IV. 67 — 29. VIII. 73; Volkach 31. VIII. 60 — 22. VI. 68.

Waldmünchen. Rhan 17. VI. 68; Treffelstein 29. V. 53.

Waldsassen. Fuchsmühle 3. VI. 55 — 3. VI. 59; Güttern 2. VII. 67; Hofteich 14. VI. 69; Konnersreuth 28. VIII. 52; Maiersreuth bei Wernersreuth 8. VIII. 77; Mitterteich 2. VII. 69; Münchenreuth 29. VIII. 51 — 23. VI. 66 — 7. VI. 67; Pechtnersreuth bei Münchenreuth 18. VII. 76; Neualbenreuth 11. IV. 67; Pechofen 31. VII. 52; Pfaffenreuth 3. VIII. 46 — 18. IV. 73; Pleussen 14. VI. 64; Rodenzenreuth 28. VIII. 52; Waldershof 24. IX. 67; Waldsassen 12. II. 66 — 6. VI. 77; Wernersreuth 25. VII. 46; Wiesau 4. V. 78; Wolfsbühl 8. IX. 66.

Wallerstein. Ehringen 19. VII. 71; Deiningen 31. VIII. 52 — 25. VI. 63 — 10. VII. 63; Marktoffingen 17. VI. 64; Wallerstein 20. VI. 53 — 18. IX. 58 — 26. VII. 65.

Wasserburg. Amerang 21. VIII. 67; Freiham 5. VIII. 45; Penzing 23. VIII. 73; Wald 17. VIII. 56; Wang 6. VII. 77.

Wassertrüdingen. Altentrüdingen 17. VIII. 68 — 28. VII. 73; Dambach 25. VII. 64; Grosslellenfeld 4. VII. 75; Heinersdorf 8. VII. 49; Röckingen 3. VII. 69; Unterkönigshofen 2. VIII. 50; Unterschwaningen 2. X. 69.

Wegscheid. Eidenberg 29. IV. 64; Gegenbach 19. VII. 47 — 8. VII. 62; Jandelsbrunn 2. VIII. 61; Klafferstrass 17. VIII. 61; Lammersdorf 4. VIII. 56; Messnerschlag 22. VI. 45 — 8. VII. 56; Möslberg 1. VI. 67; Neumühle bei Windpassing 2. VII. 76; Niedernreuth 30. V. 69; Thalberg 19. VII. 71.

Weiden. Edeldorf 18. VIII. 56; Mantel 21. VI. 71; Schirmitz 5. VI. 53; Weiden 9. VII. 47 — 12. VI. 55 — 28. VII. 73 — 24. VII. 76.

Weidenberg. Fichtelberg 18. VI. 73; Neubau 27. V. 68.

Weiler. Gestratz 28. VIII. 57 — 23. VIII. 68; Heimenkirch 13. VIII. 71;

Lindenberg 20. IV. 55 — 16. VI. 71; Oberreute 31. VIII. 52; Opfenbach 20. IV. 53 — 4. VIII. 53; Scheffau 18. VIII. 62; Simmersberg 27. VII. 54; Weitenau 23. VII. 63.

Weilheim Ammerhöfe 12. VII. 64 — 5. VI. 75; Antdorf 21. IX. 75; Grossweil 16. VI. 75; Haunshofen 3. VI. 67; Murnau 13. VIII. 50 — 23. VI. 67 — 5. VIII. 69; Pähl 8. VIII. 77 — 16. VI. 79; Unkundenwald bei Schöffau 22. VIII. 79; Unterpeissenberg 23. V. 75 — 3. IV. 76; Uffing 11. VI. 58 — 30. VI. 59; Schlehdorf 6. VI. 56; Weilheim 20. V. 60 — 12. VII. 73 — 4. VI. 75 — 25. VIII. 76.

Weihers. Thalau 25. V. 53 — 12. V. 57; Weihers 22. XII. 63.[1])

Weismain. Burgkundstadt 20. V. 60; Mainroth 4. IX. 49; Pfaffendorf 31. V. 59.

Weissenburg. Gersdorf 25. VII. 76; Weissenburg 1. VIII. 73 — 15. VI. 78.

Wemding Fünfstetten 30. IV. 72; Gosheim 29. VI. 66; Huisheim 12. V. 60 — 30. VI. 66; Wolferstadt 30. VII. 73.

Werdenfels. Garmisch 3. IX. 59 — 12. VIII. 68 — 22. VIII. 77; Mittenwald 12. VIII. 59; Oberammergau 1. VII. 77; Ohlstadt 26. VIII. 71; Unterammergau 1. VI. 68 — 30. IX. 75.

Werneck. Bergrheinfeld 1. IX. 56 — 23. VI. 71; Essleben 23. V. 58 — 3. VII. 71 — 21. V. 72; Hergolshausen 25. V. 72; Kronungen 17. V. 72; Theilheim 4. VII. 75; Wipfeld 28. V, 58.

Wertingen. Affaltern 28. VIII. 62; Biberbach 10. V. 68; Binswangen 20. VII. 71; Ehingen 6. VI. 75; Emersacker 14. VIII. 71; Erlingen 4. VI. 66 — 25. VI. 72; Frauenstetten 3. VII. 71; Gottmannshofen 4. VIII. 59; Hegnenbach 27. V. 53; Heratsried 16. IV. 51; Hettlingen 20. VII. 47; Hirschbach 21. VIII. 65; Laugna 6. VI. 60; Nordendorf 3. VII. 71; Ostendorf 14. IV. 70; Wengen 11. VI. 76; Zusamaltheim 20. V. 53; Zusamzell 5. VIII. 79.

Wiesentheid. Atzhausen 29. VI. 79; Castell 16. V. 78; Wiesentheid 7. VIII. 72 — 7. VIII. 72.

Windsheim. Berolzheim 7. VI. 73; Buch 29. VIII. 65; Burgbernheim 22. V. 68 — 14. VI. 69 — 27. VII. 73; Gallmertsgarten 18. VII. 75; Illesheim 3. VI. 66; Külsheim 28. VII. 65; Markt-Bergel 18. III. 62 — 31. V. 68; Unterntief 27. VII. 73; Rüdsbronn 31. V. 56; Windsheim 19. VII. 47 — 1. VI. 61 — 10. VII. 68 — 27. VII. 73 — 27. VII. 73.

---

1) In der älteren Arbeit wurden bei Weihers 4 Fälle angegeben und ist diese Zahl auch noch in Tabelle V aufgeführt, es war jedoch für einen derselben nicht mehr möglich, die genaueren Angaben aufzufinden.

Wörth Kieferholz 24. V. 52; Niederachdorf 13. IX. 78; Obermithnach 23. VII. 63; Sulzbach 25. VI. 70.

Wolfratshausen. Ascholding 27. VII. 77; Egling 1. VII. 69; Endlhausen 23. VIII. 64; Degerndorf 14. VIII. 68; Gelting 14. VIII. 68; Gumpertshofen bei Arget 5. VI. 75; Herrnhausen 24. VIII. 67; Höhenrain 19. VIII. 58; Neufahrn 7. VII. 72; Otterfing 28. VII. 73; Strassbach 13. VIII. 71.

Wolfstein. Heindlschlag 17. VII. 75; Mauth 12. V. 57; Prombach bei Prassreuth 6. VII. 77.

Würzburg St. 31. VIII. 46 — 20. I. 63 — 6. I. 65 — 9. V. 65 — 25. VII. 65 — 25. VII. 67 — 31. VII. 68 — 12. IX. 69 — 12. IX. 69 — 21. I. 75 — 6. IX. 76.

Würzburg Ldg. (r. u. l. M.). Eisingen 24. VII. 76; Heidingsfeld 16. VIII. 78; Kirchheim 30. VI. 73; Reichenberg 27. VII. 73; Rimpar 18. V. 69; Rottenbauer 21. V. 65; Theilheim 10. VII. 46 — 20. V. 60 — 6. VII. 75; Veitshöchheim 25. VI. 70 — 21. I. 75.

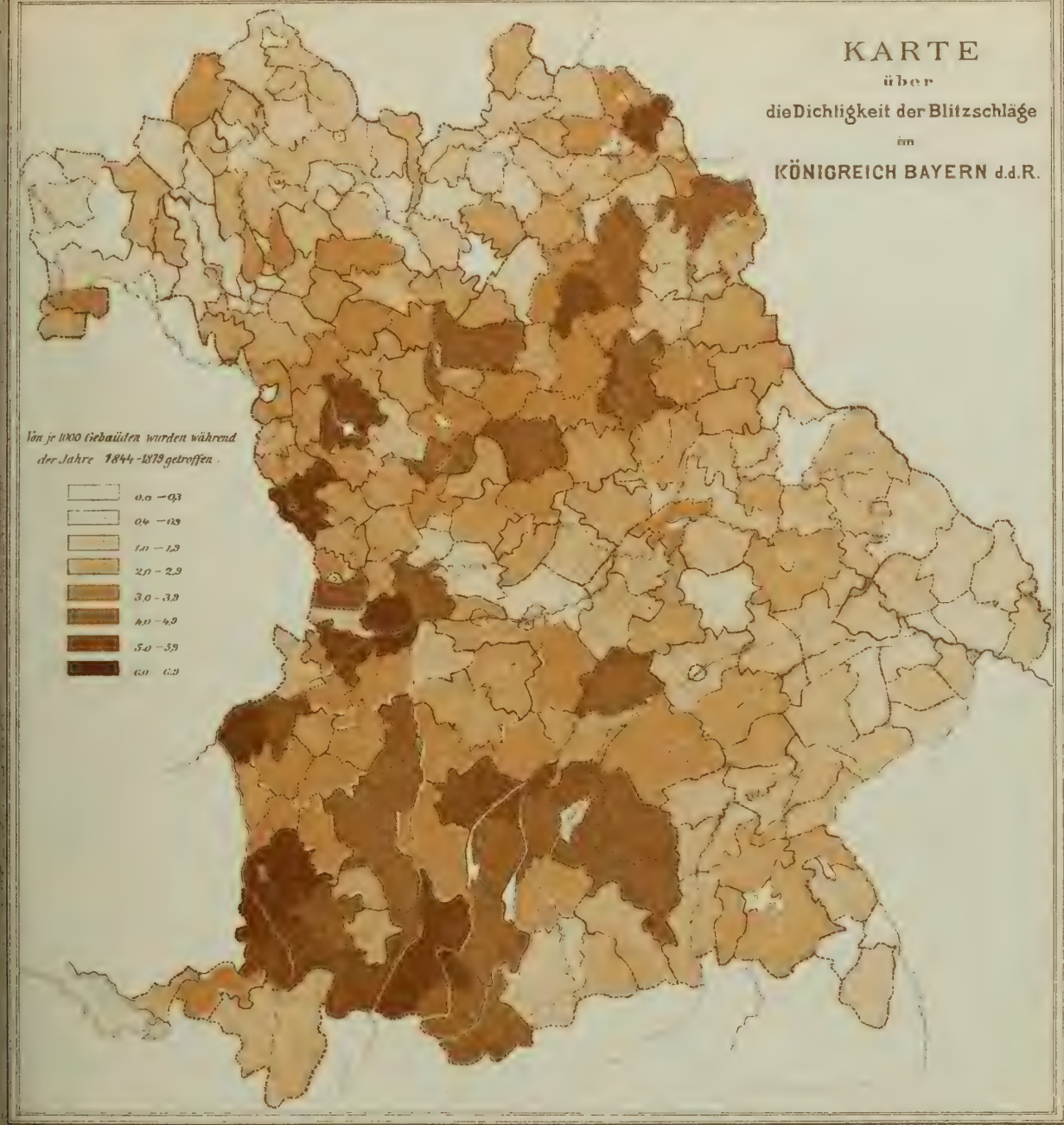
Wunsiedel. Lorenzreuth 22. VII. 50; Nagel 6. VIII. 70; Rohrmühle 20. VII. 79; Schönbrunn 16. VII. 54; Sichersreuth 23. VI. 66; Vordorf 5. VII. 75.

Zusmarshausen. Anried 28. V. 78; Biburg 23. VII. 63 — 17. VIII. 73; Dinkelscherben 23. VII. 53; Eppishofen 9. VII. 75; Grünebaindt 17. VIII. 63; Hennhofen 1. VII. 76; Oberschöneberg 3. VIII. 62; Steinkirch 27. V. 53; Unternefsried bei Agawang 6. VI. 75; Vollried 14. VI. 56; Wollishausen 6. VI. 75; Wollmetshofen 17. VIII. 56; Wörleschwang 14. VI. 78.

Bemerkung zu nebenstehender Karte.

In dem unterhalb der Landkarte stehenden Diagramm versinnlicht die obere gestrichelte Curve die Häufigkeit der Sonnenflecken nach Wolfs Relativzahlen, und zwar in der Weise, dass die Ordinaten von oben nach unten aufgetragen sind, wie auch aus den ausserhalb des Netzes stehenden Zahlen zu entnehmen ist. Die Ordinaten der ausgezogenen Curven dagegen geben die Anzahl der zündenden Blitze reducirt auf eine Million versicherter Gebäude; sie sind in gewöhnlicher Weise von unten nach oben aufgetragen und lassen sich ihre Werthe aus den auf beiden Seiten noch innerhalb des Netzes stehenden Angaben entnehmen. Durch Abrundung der zweiten Curve nach dem auf S. 176 beschriebenen Verfahren wurde ausserdem noch die sich zwischen hindurchziehende abgestumpfte Curve erhalten.

NATURAL HISTORY



Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XV. Bd. I. Abth.

Lith. Anst. v. Joh. Roth sel. Wtw. München.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Inhalt.

Seite

Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. Von *Carl Max von Bauernfeind.* Zweite Mittheilung, enthaltend weitere Thatsachen und ihre Erklärung. Mit zwei Steindrucktafeln 1

Ueber neue Exemplare von jurassischen Medusen. Von *Ludwig von Ammon.* Mit fünf Tafeln 103

Ueber zündende Blitze im Königreich Bayern während des Zeitraumes 1833 bis 1882. Von *Wilhelm von Bezold.* Mit einer Karte 169

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

26 NOV 1885

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

FÜNFZEHNTEN BANDES

ZWEITE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LIII. BAND.

MÜNCHEN 1885.

VERLAG DER K. AKADEMIE

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Die

Beugungserscheinungen

einer kreisrunden Oeffnung

und

eines kreisrunden Schirmchens

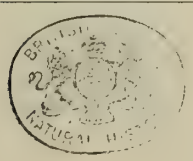
theoretisch und experimentell

bearbeitet

von

E. Lommel.

Mit lithographirten Tafeln.



Seinem

hochverehrten Lehrer und Freunde

Herrn Professor Dr. Ph. von Jolly

zur

Feier des hundertsten Semesters

seiner

akademischen Lehrthätigkeit

in dankbarer Verehrung

gewidmet

vom Verfasser.

Vorbemerkung.

Die Beugungserscheinungen, welche durch eine kreisförmige Oeffnung oder durch ein kreisförmiges Schirmchen hervorgebracht werden, haben bisher nur für den besonderen Fall, dass die einfallende Welle eben ist und der Auffangschirm sich in unendlicher Entfernung befindet, oder, was auf dasselbe hinauskommt, im Falle der Fraunhofer'schen Beobachtungsmethode, eine erschöpfende Bearbeitung gefunden[1]). In dem allgemeinen der Fresnel'schen Beobachtungsmethode entsprechenden Falle dagegen, wo sich Lichtpunkt und Auffangschirm in beliebigen endlichen Entfernungen vom beugenden Schirme befinden, schienen die Integrale, durch welche die Lichtstärke in einem beliebigen Punkte des Beugungungsbildes ausgedrückt wird, unüberwindliche Schwierigkeiten darzubieten. Jedoch hatte schon Poisson, als Mitglied der akademischen Commission, welche Fresnels grosse Arbeit über die Diffraction zu prüfen hatte, bemerkt, dass sich diese Integrale wenigstens für den Mittelpunkt des Beugungsbildes leicht berechnen lassen, und im Falle eines kreisrunden Schirmchens die nämliche Lichtstärke ergeben, welche auch bei völliger Abwesenheit des Schirmchens herrschen würde, im Falle einer kreisförmigen Oeffnung dagegen eine mit der Entfernung vom beugenden Schirm veränderliche Intensität, welche für gewisse durch ein

1) Schwerd, die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.
Airy, über die Diffraction eines Objectivs mit kreisrunder Apertur. Pogg. Ann. Bd. 45. 1838.
Knochenhauer, die Undulationstheorie des Lichtes. Berlin, 1839.
Lommel, Schlömilchs Zeitsch. f. Math. u. Phys. 15. p. 141. 1870.

einfaches Gesetz bestimmte Entfernungen sogar Null ist. Fresnel[1]) und später Abria[2]) haben diese unerwarteten und auf den ersten Blick anscheinend paradoxen Consequenzen der Theorie experimentell geprüft und vollständig bestätigt gefunden.

Auch die Behandlung des allgemeinen Problems blieb nicht unversucht; Knochenhauer[3]), der sie unternahm, gelangte jedoch zu Formeln, die so weitschweifig und so wenig übersichtlich sind, dass er allgemeinere Schlussfolgerungen aus ihnen nicht zu ziehen vermochte, und vor der mühevollen numerischen Berechnung mit Recht zurückscheute. Es stehen daher noch immer jenes nur für die Mitte des Beugungsbildes gewonnene Resultat einerseits, und andrerseits die vollständige theoretische Kenntniss der Erscheinung im Fraunhofer'schen Grenzfall unvermittelt und ohne Zusammenhang neben einander. Diese Lücke der Theorie auszufüllen, die ganze unerschöpfliche Mannigfaltigkeit der Erscheinungen aus der Wellenlehre abzuleiten, endlich die theoretischen Ergebnisse experimentell zu prüfen, bildet die Aufgabe der gegenwärtigen Abhandlung.

---

1) Fresnel, Calcul de l'intensité de la lumière au centre de l'ombre d'un ecran et d'une ouverture circulaires éclairés par un point radieux; Oeuvres complètes de Fresnel, t. I. p. 365. 1819.

2) Abria, Sur la diffraction de la lumière, Journal de Math. de Liouville, IV, p. 248. 1838.

3) Knochenhauer, die Undulationstheorie des Lichtes. Berlin 1839.

I. Abschnitt.

Aufstellung und Entwickelung der Integrale.

1. Wir wählen den Auffangschirm zur xy-Ebene und die vom Mittelpunkt der einfallenden Kugelwelle, deren Radius = a sei, auf ihn gefällte Senkrechte zur z-Axe eines Systems rechtwinkliger Coordinaten. Diese Senkrechte sei zugleich die Polaraxe eines Systems sphärischer Coordinaten, so dass der Ort eines Punktes der Kugel einerseits durch seine rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, andrerseits durch seine Poldistanz ψ, seine Länge φ und den Kugelradius a bestimmt ist. Ist $2\pi t/T$, wo t die laufende Zeit und T die Schwingungsdauer bezeichnet, die im Augenblick t auf der Kugelwelle herrschende Phase, so erzeugt das im Punkte x, y, z gelegene Flächenelement

$$a^2 \sin\psi \, d\psi \, d\varphi$$

derselben im Punkte ξ, η des Auffangschirmes, dessen Abstand vom Punkte x, y, z mit d bezeichnet werde, mit Rücksicht darauf, dass die Vibrationsintensitäten den Entfernungen a und d umgekehrt proportional sind, die Schwingungsgeschwindigkeit:

$$\frac{a}{d} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot \sin\psi \, d\psi \, d\varphi,$$

wo λ wie üblich die Wellenlänge bedeutet, und die Vibrationsintensität für die Flächeneinheit der mit dem Radius 1 um den Lichtpunkt beschriebenen Kugelwelle = 1 angenommen ist.

Die von einem beliebigen Theil der Kugelwelle in dem Punkte ξ, η des Schirms hervorgebrachte Bewegung wird alsdann ausgedrückt durch das Doppelintegral:

$$a \int\int \frac{1}{d} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot \sin\psi \, d\psi \, d\varphi,$$

wenn dasselbe über alle wirksamen Theile der Kugelwelle a ausgedehnt wird.

2. Im Falle einer kreisförmigen Oeffnung, deren Mittelpunkt auf der Polaraxe liegt, und deren Ebene mit dem Auffangschirm parallel ist, wird der wirksame Theil der Kugelwelle von dem Rande der Kreisöffnung begrenzt, und die Vibrationsgeschwindigkeit im Punkte ξ, η wird ausgedrückt durch:

$$a \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_1} \frac{1}{d} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right) \cdot \sin \psi \, d\psi \, d\varphi ,$$

wenn ψ_1 der Winkel ist, den ein vom Lichtpunkt nach dem Rande der Oeffnung gehender Strahl mit der Axe des Strahlenkegels bildet.

Darin ist die Entfernung d gegeben durch die Gleichung:

$$d^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$$

oder:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi x - 2\eta y.$$

Wird die Entfernung des Poles der Kugelwelle vom Auffangschirm mit b bezeichnet, so ist:

$$x = a \sin \psi \cos \varphi, \quad y = a \sin \psi \sin \varphi, \quad z = a + b - a \cos \psi ,$$

und demnach:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + (a + b)^2 - 2a(a + b) \cos \psi \\ &= b^2 + 4a(a + b) \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi ; \end{aligned}$$

bezeichnet man ferner mit ζ den Abstand des Bildpunktes ξ, η von der Bildmitte, indem man setzt:

$$\xi = \zeta \cos \varphi_0 , \qquad \eta = \zeta \sin \varphi_0 ,$$

so ist:

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2 , \qquad \xi x + \eta y = a\zeta \sin \psi \cos (\varphi - \varphi_0).$$

Man hat also:

$$d^2 = b^2 + \zeta^2 - 2a\zeta \sin \psi \cos (\varphi - \varphi_0) + 4a(a + b) \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi .$$

Da die von einer kreisförmigen Oeffnung hervorgebrachte Beugungserscheinung nach allen Richtungen rings um die Bildmitte nothwendig von der gleichen Beschaffenheit ist, so bleibt es gleichgiltig, von welcher dieser Richtungen aus man den Winkel φ_0 zählt; setzen wir ihn $= 0$, so ergibt sich:

$$d^2 = b^2 \left(1 + \frac{\zeta^2}{b^2} - \frac{2a\zeta \sin \psi \cos \varphi}{b^2} + \frac{4a(a + b)}{b^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi \right).$$

3. Wir nehmen nun an, dass der Winkel ψ_1, und dann um so mehr der Winkel ψ, so klein sei, dass sein Sinus mit dem Bogen vertauscht, oder, was dasselbe heisst, seine höheren Potenzen von der dritten an gegen die niedrigeren vernachlässigt werden dürfen, und dass das Verhältniss ζ/b von derselben Grössenordnung sei wie ψ. Dann darf man schreiben:

$$d = b + \frac{\zeta^2}{2b} - \frac{a\zeta \sin\psi \cos\varphi}{b} + \frac{2a(a+b)}{b} \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi.$$

Setzt man nun noch:

$$a \sin\psi = \varrho \quad \text{oder} \quad a\psi = \varrho,$$

also auch:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\varrho^2}{4a^2},$$

und bezeichnet den Radius der kreisförmigen Oeffnung mit r, so nimmt unser Doppelintegral, wenn wir noch das im Nenner unter dem Integralzeichen vorkommende d mit b vertauschen (was erlaubt ist, wenn die Betrachtung auf Punkte beschränkt wird, die der Polaraxe nahe liegen), folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{ab} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{\zeta^2}{2b\lambda} + \frac{\zeta \cos\varphi}{b\lambda} \varrho - \frac{a+b}{2ab\lambda} \varrho^2 \right) . \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$

4. Bringen wir jetzt das vorstehende Integral, welches die resultirende schwingende Bewegung in einem Punkte des Auffangschirmes ausdrückt, unter Weglassung des Factors 1/ab auf die Form:

$$M \sin(p - \chi),$$

indem wir

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{\zeta^2}{2b\lambda} \right) = p,$$

ferner:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a+b}{2ab} \varrho^2 - \frac{\zeta \cos\varphi}{b} \varrho \right) . \varrho \, d\varrho \, d\varphi = C,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a+b}{2ab} \varrho^2 - \frac{\zeta \cos\varphi}{b} \varrho \right) . \varrho \, d\varrho \, d\varphi = S$$

setzen, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{S}{C},$$

und die Lichtstärke, welche auf einem mit dem Radius ζ um die Bildmitte beschriebenen Kreise herrscht, ist dem Ausdruck:

$$M^2 = C^2 + S^2$$

proportional.

5. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a+b}{2ab} = \tfrac{1}{2}k \text{ und } \frac{2\pi\zeta}{\lambda b} = 1,$$

so ist:

$$C = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \cos\left(\tfrac{1}{2}k\varrho^2 - l\varrho\cos\varphi\right).\varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

$$= \int_0^{r} \cos\left(\tfrac{1}{2}k\varrho^2\right)\int_0^{2\pi}\cos(l\varrho\cos\varphi).d\varphi.\varrho\,d\varrho + \int_0^{r}\sin\left(\tfrac{1}{2}k\varrho^2\right)\int_0^{2\pi}\sin(l\varrho\cos\varphi).d\varphi.\varrho\,d\varrho,$$

oder, da offenbar

$$\int_0^{2\pi}\sin(l\varrho\cos\varphi)\,d\varphi = 0$$

ist:

$$C = \int_0^{r}\cos\left(\tfrac{1}{2}k\varrho^2\right)\int_0^{2\pi}\cos(l\varrho\cos\varphi).d\varphi.\varrho\,d\varrho.$$

Es ist aber:

$$\int_0^{2\pi}\cos(l\varrho\cos\varphi)\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\cos(l\varrho\cos\varphi)\,d\varphi = 2\pi I_0(l\varrho),$$

wenn I_0 die Bessel'sche Function erster Art mit dem Index o bedeutet.

Wir haben demnach:

$$C = 2\pi\int_0^{r} I_0(l\varrho)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\varrho^2\right).\varrho\,d\varrho,$$

und finden ebenso:

$$S = 2\pi\int_0^{r} I_0(l\varrho)\sin\left(\tfrac{1}{2}k\varrho^2\right).\varrho\,d\varrho.$$

6. Um diese transscendenten Integrale in Reihen zu entwickeln, wenden wir die Methode der theilweisen Integration an, indem wir zunächst $I_0(l\varrho)\,\varrho\,d\varrho$ als zu integrirenden Factor betrachten, und von der Formel [1]):

$$\int_0^z z^\nu I_{\nu-1}(z)\,dz = z^\nu I_\nu(z)$$

Gebrauch machen. Es ergibt sich:

$$C = 2\pi\cdot\frac{r}{l}\cdot I_1(lr)\cos(\tfrac{1}{2}kr^2) + 2\pi\cdot\frac{k}{l}\int_0^r \varrho^2 I_1(l\varrho)\sin(\tfrac{1}{2}k\varrho^2)\cdot d\varrho,$$

wo nun auf den in letzterem Integral vorkommenden Factor $\varrho^2 I_1(l\varrho)\,d\varrho$ die obige Formel von neuem Anwendung findet. So fortfahrend erhalten wir:

$$C = 2\pi\cos(\tfrac{1}{2}kr^2)\left[\frac{r}{l}I_1(lr) - \frac{k^2r^3}{l^3}I_3(lr) + \frac{k^4r^5}{l^5}I_5(lr) - + \ldots\right]$$

$$+ 2\pi\sin(\tfrac{1}{2}kr^2)\left[\frac{kr^2}{l^2}I_2(lr) - \frac{k^3r^4}{l^4}I_4(lr) + \frac{k^5r^6}{l^6}I_6(lr) - + \ldots\right],$$

oder, in mehr übersichtlicher Schreibweise:

$$C = \pi r^2\cdot\frac{\cos(\frac{1}{2}kr^2)}{\frac{1}{2}kr^2}\left[\frac{kr^2}{lr}I_1(lr) - \left(\frac{kr^2}{lr}\right)^3 I_3(lr) + \left(\frac{kr^2}{lr}\right)^5 I_5(lr) - + \ldots\right]$$

$$+ \pi r^2\cdot\frac{\sin(\frac{1}{2}kr^2)}{\frac{1}{2}kr^2}\left[\left(\frac{kr^2}{lr}\right)^2 I_2(lr) - \left(\frac{kr^2}{lr}\right)^4 I_4(lr) + \left(\frac{kr^2}{lr}\right)^6 I_6(lr) - + \ldots\right].$$

Setzen wir der Einfachheit wegen:

$$kr^2 = y \text{ und } lr = z,$$

so dass

$$y = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{a+b}{ab}\cdot r^2 \text{ und } z = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\zeta}{b}\cdot r$$

ist, so erscheint C unter folgender Form:

---

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 20. Leipzig 1868.

$$C = \pi r^2 \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}\left[\frac{y}{z}I_1(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^5 I_5(z) - + \ldots\right]$$

$$+ \pi r^2 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{3}y}\left[\left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^6 I_6(z) - + \ldots\right].$$

Auf demselben Wege findet man:

$$S = \pi r^2 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}\left[\frac{y}{z}I_1(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^5 I_5(z) - + \ldots\right]$$

$$- \pi r^2 \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}\left[\left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^6 I_6(z) - + \ldots\right].$$

7. Bezeichnet man die beiden in diesen Ausdrücken vorkommenden nach Potenzen von y/z und nach Bessel'schen Functionen fortlaufenden Reihen resp. mit $U_1(y,z)$ und $U_2(y,z)$, oder auch kürzer mit U_1 und U_2, so dass:

$$U_1 = \frac{y}{z}I_1(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^5 I_5(z) - + \ldots.$$

$$= \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{2p+1} I_{2p+1}(z),$$

$$U_2 = \left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^6 I_6(z) - + \ldots$$

$$= \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{2p+2} I_{2p+2}(z)$$

ist, so hat man schliesslich:

$$C = \pi r^2 \left(\frac{\cos\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}U_1 + \frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}U_2\right),$$

$$S = \pi r^2 \left(\frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}U_1 - \frac{\cos\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}U_2\right).$$

8. Eine andere Entwickelung der Integrale C und S erhält man, wenn man sie in Bezug auf den Factor $\cos(\frac{1}{2}k\varrho^2).\varrho\,d\varrho$ und beziehungsweise $\sin(\frac{1}{2}k\varrho^2).\varrho\,d\varrho$ theilweise integrirt, und dabei die Formel

$$\frac{\partial(z^{-\nu}I_\nu(z))}{\partial z} = -z^{-\nu}I_{\nu+1}(z)$$

fortgesetzt in Anwendung bringt. Es ergibt sich auf diese Weise der Reihe nach:

$$C = 2\pi \int_0^r I_0(l\varrho) \cdot \cos(\tfrac{1}{2}k\varrho^2) \cdot \varrho \, d\varrho$$

$$= \frac{2\pi}{k} I_0(lr) \sin(\tfrac{1}{2}kr^2) + \frac{2\pi l^2}{k^2} \int_0^r (l\varrho)^{-1} I_1(l\varrho) \cdot \sin(\tfrac{1}{2}k\varrho^2) \cdot k\varrho \, d\varrho$$

$$= \frac{2\pi}{k} I_0(lr) \cdot \sin(\tfrac{1}{2}kr^2) + \frac{2\pi l^2}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{I_1(lr)}{lr} \cos(\tfrac{1}{2}kr^2) \right)$$

$$- \frac{2\pi l^4}{k^3} \int_0^r (l\varrho)^{-2} I_2(l\varrho) \cdot \cos(\tfrac{1}{2}k\varrho^2) \cdot k\varrho \, d\varrho,$$

u. s. f., also schliesslich:

$$C = \pi r^2 \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}kr^2)}{\frac{1}{2}kr^2} \left[I_0(lr) - \left(\frac{lr}{kr^2}\right)^2 I_2(lr) + \left(\frac{lr}{kr^2}\right)^4 I_4(lr) - + \ldots \right]$$

$$- \pi r^2 \cdot \frac{\cos(\frac{1}{2}kr^2)}{\frac{1}{2}kr^2} \left[\frac{lr}{kr^2} I_1(lr) - \left(\frac{lr}{kr^2}\right)^3 I_3(lr) + \left(\frac{lr}{kr^2}\right)^5 I_5(lr) - + \ldots \right]$$

$$+ \pi r^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}kr^2} \left[\frac{l^2}{2k} - \frac{1}{3!} \left(\frac{l^2}{2k}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{l^2}{2k}\right)^5 - + \ldots \right].$$

Bedenkt man nun, dass

$$\frac{l^2}{2k} - \frac{1}{3!} \left(\frac{l^2}{2k}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{l^2}{2k}\right)^5 - + \ldots = \sin \frac{l^2}{2k}$$

ist, und setzt wieder:

$$kr^2 = y \text{ und } lr = z,$$

so ergibt sich:

$$C = \pi r^2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[I_0(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4(z) - + \ldots \right]$$

$$- \pi r^2 \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[\frac{z}{y} I_1(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5(z) - + \ldots \right] + \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}y} \sin \frac{z^2}{2y}.$$

In gleicher Weise findet man:

$$S = -\pi r^2 \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}\left[I_0(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4(z) - + \ldots\right]$$

$$-\pi r^2 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}\left[\frac{z}{y} I_1(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5(z) - + \ldots\right] + \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}y}\cos\frac{z^2}{2y}.$$

9. Werden die hierin vorkommenden nach Potenzen von z/y und nach Bessel'schen Functionen fortschreitenden unendlichen Reihen resp. mit $V_0(y,z)$ und $V_1(y,z)$, oder kürzer mit V_0 und V_1 bezeichnet, so dass

$$V_0 = I_0(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4(z) - + \ldots$$

$$= \Sigma(-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{2p} I_{2p}(z),$$

$$V_1 = \frac{z}{y} I_1(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5(z) - + \ldots$$

$$= \Sigma(-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{2p+1} I_{2p+1}(z)$$

ist, so erscheinen die Grössen C und S auch noch in folgender Gestalt:

$$C = \pi r^2\left(\frac{2}{y}\sin\frac{z^2}{2y} + \frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} V_0 - \frac{\cos\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} V_1\right),$$

$$S = \pi r^2\left(\frac{2}{y}\cos\frac{z^2}{2y} - \frac{\cos\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} V_0 - \frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} V_1\right).$$

10. Aus den gewonnenen Ausdrücken für C und S geht zunächst hervor, dass zwischen den Functionen U und V folgende Beziehungen:

$$U_1\cos\tfrac{1}{2}y + U_2\sin\tfrac{1}{2}y = \sin\frac{z^2}{2y} + V_0\sin\tfrac{1}{2}y - V_1\cos\tfrac{1}{2}y,$$

$$U_1\sin\tfrac{1}{2}y - U_2\cos\tfrac{1}{2}y = \cos\frac{z^2}{2y} - V_0\cos\tfrac{1}{2}y - V_1\sin\tfrac{1}{2}y,$$

oder, was dasselbe ist:

$$V_1 + U_1 = \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right),$$

$$V_0 - U_2 = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

stattfinden.

11. Der Ausdruck für die Lichtstärke

$$M^2 = C^2 + S^2,$$

welche eine kreisförmige Oeffnung in irgend einem Punkte des Beugungsbildes hervorbringt, ergibt sich jetzt, wenn man den Flächeninhalt πr^2 der Oeffnung gleich 1 annimmt, in folgenden zwei Formen:

$$M^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2 (U_1^2 + U_2^2),$$

oder

$$M^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(1 + V_o^2 + V_1^2 - 2V_o \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) - 2V_1 \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)\right),$$

welche vermöge vorstehender Relationen identisch sind.

Ehe wir jedoch zur Discussion dieses Ausdrucks übergehen, erscheint es nothwendig, einige Eigenschaften der Functionen U und V kennen zu lernen.

II. Abschnitt.

Die Functionen U_n und V_n.

12. Statt der im vorigen Abschnitte eingeführten speciellen Functionen U_1, U_2, V_o, V_1 betrachten wir jetzt die allgemeineren Functionen:

$$U_n(y, z) = \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2} I_{n+2}(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^{n+4} I_{n+4}(z) - + \cdots$$

$$= \Sigma (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2p} I_{n+2p}(z)$$

und

$$V_n(y, z) = \left(\frac{z}{y}\right)^n I_n(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^{n+2} I_{n+2}(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^{n+4} I_{n+4}(z) - + \cdots$$

$$= \Sigma (-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{n+2p} I_{n+2p}(z)$$

wo n beliebig positiv oder negativ ganz oder Null ist.

Diese Reihen sind convergent für alle Werthe von y und z. Denn da dem absoluten Werthe nach

$z^{-(n+2p)} I_{n+2p}(z)$ stets kleiner ist als $\frac{1}{2^{n+2p}(n+2p)!}$,

so bleibt der absolute Werth von U_n immer kleiner als die stets convergente Reihe:

$$\Sigma \frac{(\frac{1}{2}y)^{n+2p}}{(n+2p)!};$$

und da V_n auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$V_n = \Sigma (-1)^p \left(\frac{z^2}{y}\right)^{n+2p} z^{-(n+2p)} I_{n+2p}(z),$$

so muss der absolute Werth von V_n kleiner sein als derjenige der immer convergirenden Reihe:

$$\Sigma \frac{\left(\frac{z^2}{y}\right)^{n+2p}}{(n+2p)!}.$$

13. Da vermöge der bekannten Gleichung:

$$(I_0)^2 + 2(I_1)^2 + 2(I_2)^2 + 2(I_3)^2 + \ldots = 1$$

der absolute Werth der Function I_0 niemals grösser als 1, und die absoluten Werthe der übrigen Bessel'schen Functionen niemals grösser als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ werden können, so erkennt man unmittelbar, dass, wenn $y/z < 1$ ist, die Reihe U_n rascher convergirt als die geometrische Reihe

$$\Sigma \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2p}.$$

Ist dagegen $y/z > 1$, so convergirt die Reihe V_n schneller als die geometrische Reihe

$$\Sigma \left(\frac{z}{y}\right)^{n+2p}.$$

Zur numerischen Berechnung sind daher im ersteren Fall die U-, im letzteren die V-Reihen bequemer.

14. Wenn $y = z$ ist, so hat man:

$$U_0(z,z) = V_0(z,z) = I_0 - I_2 + I_4 - I_6 + - \ldots$$

$$U_1(z,z) = V_1(z,z) = I_1 - I_3 + I_5 - I_7 + - \ldots .$$

Da nun

$$I_0 - 2I_2 + 2I_4 - 2I_6 + - \ldots = \cos z$$

und

$$2I_1 - 2I_3 + 2I_5 - 2I_7 + - \ldots = \sin z$$

ist, so ergibt sich:

$$U_0(z,z) = \tfrac{1}{2}(I_0(z) + \cos z), \qquad V_0(z,z) = \tfrac{1}{2}(I_0(z) + \cos z)$$
$$U_1(z,z) = \tfrac{1}{2}\sin z \qquad V_1(z,z) = \tfrac{1}{2}\sin z$$
$$U_2(z,z) = \tfrac{1}{2}(I_0(z) - \cos z), \qquad V_2(z,z) = \tfrac{1}{2}(I_0(z) - \cos z)$$
u. s. f. u. s. f.

oder allgemein

$$U_{2n}(z,z) = V_{2n}(z,z) = \frac{(-1)^n}{2}(I_0(z) + \cos z) - \sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^{n+p} I_{2p}(z)$$

und

$$U_{2n+1}(z,z) = V_{2n+1}(z,z) = \frac{(-1)^n}{2}\sin z - \sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^{n+p} I_{2p+1}(z).$$

15. Addirt man die beiden Gleichungen:

$$U_n(y,z) = \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n - \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2} I_{n+2} + \left(\frac{y}{z}\right)^{n+4} I_{n+4} - + \cdots$$

$$U_{n+2}(y,z) = \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2} I_{n+2} - \left(\frac{y}{z}\right)^{n+4} I_{n+4} + - \cdots,$$

so ergibt sich sofort:

$$U_n + U_{n+2} = \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n.$$

Ebenso findet man:

$$V_n + V_{n+2} = \left(\frac{z}{y}\right)^n I_n$$

Hienach besteht zwischen den Functionen U und V die Relation:

$$z^{2n}(U_n + U_{n+2}) = y^{2n}(V_n + V_{n+2}).$$

Da

$$I_{-n} = (-1)^n I_n$$

ist, so hat man:

$$V_{-n} + V_{-n+2} = (-1)^n \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n,$$

folglich:

$$U_n + U_{n+2} = (-1)^n (V_{-n} + V_{-n+2})$$

und

$$V_n + V_{n+2} = (-1)^n (U_{-n} + U_{-n+2}).$$

16. Wir setzen nun:

$$z = \sqrt{\zeta},$$

und erhalten:

$$U_n(y, \sqrt{\zeta}) = \Sigma(-1)^p y^{n+2p} \zeta^{-\frac{n+2p}{2}} I_{n+2p}(\sqrt{\zeta}).$$

Differentiirt man diese Gleichung m mal nach ζ, indem man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial^m \left(\zeta^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(\sqrt{\zeta})\right)}{\partial \zeta^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot \zeta^{-\frac{\nu+m}{2}} I_{\nu+m}(\sqrt{\zeta})$$

ist, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^m U_n(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = \Sigma (-1)^p y^{n+2p} (-\tfrac{1}{2})^m \zeta^{-\frac{n+m+2p}{2}} I_{n+m+2p}(\sqrt{\zeta})$$

oder

$$\frac{\partial^m U_n(y, (\sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = (-\tfrac{1}{2})^m y^{-m} U_{n+m}(y, \sqrt{\zeta}),$$

woraus für $m = 1$:

$$\frac{\partial U_n(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} U_{n+1}(y, \sqrt{\zeta}),$$

oder, wenn man mit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 2z$$

multiplicirt und wieder z^2 statt ζ schreibt,

$$\frac{\partial U_n(y, z)}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_{n+1}(y, z)$$

hervorgeht. Hieraus folgt weiter noch:

$$\frac{\partial^m U_n}{\partial z^m} = -\frac{z}{y} \cdot \frac{\partial^{m-1} U_{n+1}}{\partial z^{m-1}} - \frac{m-1}{y} \cdot \frac{\partial^{m-2} U_{n+1}}{\partial z^{m-2}}.$$

17. Differentiirt man in gleicher Weise

$$V_n(y, \sqrt{\zeta}) = \Sigma (-1)^p y^{-(n+2p)} \zeta^{\frac{n+2p}{2}} I_{n+2p}(\sqrt{\zeta})$$

m mal nach ζ unter Anwendung der Formel:

$$\frac{\partial^m \left(\zeta^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(\sqrt{\zeta})\right)}{\partial \zeta^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot \zeta^{\frac{\nu-m}{2}} I_{\nu-m}(\sqrt{\zeta}),$$

so erhält man:

$$\frac{\partial^m V_n(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = \Sigma (-1)^p \cdot y^{-(n+2p)} (\tfrac{1}{2})^m \zeta^{\frac{n-m+2p}{2}} I_{n-m+2p}(\sqrt{\zeta})$$

oder:

$$\frac{\partial^m V_n(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = (\tfrac{1}{2})^m y^{-m} V_{n-m}(y, \sqrt{\zeta}),$$

woraus wie vorhin

$$\frac{\partial V_n(y,z)}{\partial z} = \frac{z}{y} V_{n-1}(y,z)$$

und

$$\frac{\partial^m V_n}{\partial z_m} = \frac{z}{y} \cdot \frac{\partial^{m-1} V_{n-1}}{\partial z^{m-1}} + \frac{m-1}{y} \cdot \frac{\partial^{m-2} V_{n-1}}{\partial z^{m-2}}$$

hervorgeht.

18. Wir haben oben (10) bereits gefunden:

$$U_1(y,z) + V_1(y,z) = \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right).$$

Setzen wir hierin $\sqrt{\zeta}$ statt z, und differentiiren wir die Gleichung

$$U_1(y,\sqrt{\zeta}) + V_1(y,\sqrt{\zeta}) = \frac{1}{2i}\left(e^{(\frac{1}{2}y+\frac{\zeta}{2y})i} - e^{-(\frac{1}{2}y+\frac{\zeta}{2y})i}\right)$$

n mal nach ζ, so erhalten wir zur Linken:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n y^{-n} U_{n+1}(y,\sqrt{\zeta}) + \left(\frac{1}{2}\right)^n y^{-n} V_{-n+1}(y,\sqrt{\zeta})$$

und zur Rechten:

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{i}{2y}\right)^n \left(e^{(\frac{1}{2}y+\frac{\zeta}{2y})i} - (-1)^n e^{-(\frac{1}{2}y+\frac{\zeta}{2y})i}\right).$$

Wir gelangen demnach, wenn wir wiederum z^2 statt ζ schreiben, zu der Gleichung

$$(-1)^n U_{n+1}(y,z) + V_{-n+1}(y,z) = \frac{i^n}{2i}\left(e^{(\frac{1}{2}y+\frac{z^2}{2y})i} - (-1)^n e^{-(\frac{1}{2}y+\frac{z^2}{2y})i}\right).$$

Für 2n statt n ergibt sich hieraus:

$$U_{2n+1} + V_{-2n+1} = (-1)^n \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right),$$

und für $2n+1$ statt n:

$$-U_{2n+2} + V_{-2n} = (-1)^n \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right),$$

welche Gleichungen die bereits oben (10) hingestellten:

$$U_1 + V_1 = \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

$$-U_2 + V_0 = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

als Specialfälle für $n = 0$ in sich schliessen.

19. Die letzteren zwei Gleichungen sagen aus, dass für die Bessel'schen Functionen die bemerkenswerthen Gleichungen:

$$\Sigma(-1)^p\left(\left(\frac{y}{z}\right)^{2p+1}+\left(\frac{z}{y}\right)^{2p+1}\right)I_{p+1}(z)=\sin\left(\tfrac{1}{2}y+\frac{z^2}{2y}\right)$$

$$I_o(z)-\Sigma(-1)^p\left(\left(\frac{y}{z}\right)^{2p+2}+\left(\frac{z}{y}\right)^{2p+2}\right)I_{2p+2}(z)=\cos\left(\tfrac{1}{2}y+\frac{z^2}{2y}\right)$$

stattfinden. Die beiden Gleichungen:

$$2I_1-2I_3+2I_5-2I_7+-\ldots=\sin z\,,$$
$$I_o-2I_2+2I_4-2I_6+-\ldots=\cos z\,,$$

von welchen wir oben (14) Gebrauch machten, sind als besondere Fälle für $y=z$ in denselben enthalten.

20. Durch Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes ergibt sich zunächst:

$$U_n(y,\sqrt{\zeta+h})=\Sigma\frac{h^p}{p!}\cdot\frac{\partial^p U_n(y,\sqrt{\zeta})}{\partial\zeta^p}\,,$$

sodann mit Rücksicht auf (16):

$$U_n(y,\sqrt{\zeta+h})=\Sigma(-1)^p\cdot\frac{h^p}{(2y)^p\cdot p!}U_{n+p}(y,\sqrt{\zeta}).$$

Setzt man darin z^2 statt ζ, und bestimmt h aus der Gleichung:

$$\sqrt{z^2+h}=z+\varepsilon\,,$$

so findet man:

$$U_n(y,z+\varepsilon)=\Sigma(-1)^p\cdot\frac{h^p}{(2y)^p\cdot p!}U_{n+p}\,,$$

wo h aus

$$h=2\varepsilon z+\varepsilon^2$$

zu bestimmen ist, und die Coefficienten U_{n+p}, wenn zwei aufeinanderfolgende derselben bekannt sind, mittels der Recursionsformel (15):

$$U_n+U_{n+2}=\left(\frac{y}{z}\right)^n I_n$$

leicht berechnet werden.

21. In der nämlichen Weise führt der Taylor'sche Lehrsatz unter Berücksichtigung von (17) zu der Gleichung:

$$V_n(y, z+\varepsilon) = \Sigma \frac{h^p}{(2y)^p \cdot p!} V_{n-p},$$

wo h in derselben Weise wie oben zu berechnen ist, und die Coefficienten V_{n-p} successive aus der Gleichung (15):

$$V_n + V_{n+2} = \left(\frac{z}{y}\right)^n I_n$$

hervorgehen.

22. Differentiirt man

$$U_n(y, z) = \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2p} I_{n+2p}(z)$$

nach y, so kommt zunächst:

$$\frac{\partial U_n(y, z)}{\partial y} = \frac{1}{y} \Sigma(-1)^p (n+2p) \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2p} I_{n+2p}(z),$$

oder, da bekanntlich:

$$(n+2p) I_{n+2p} = \tfrac{1}{2} z I_{n+2p-1} + \tfrac{1}{2} z I_{n+2p+1}$$

ist:

$$\frac{\partial U_n}{\partial y} = \tfrac{1}{2} \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{n-1+2p} I_{n-1+2p} + \tfrac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{n+1+2p} I_{n+1+2p}.$$

Man hat demnach:

$$\frac{\partial U_n}{\partial y} = \tfrac{1}{2} U_{n-1} + \tfrac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_{n+1}.$$

Durch dasselbe Verfahren findet man:

$$\frac{\partial V_n}{\partial y} = -\tfrac{1}{2} V_{n+1} - \tfrac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{n-1}.$$

23. Nach dem Vorhergehenden ist:

$$\tfrac{1}{2} z^2 U_{n+1} = y^2 \left(\frac{\partial U_n}{\partial y} - \tfrac{1}{2} U_{n-1}\right).$$

Differentiirt man diese Gleichung m mal nach y, indem man zur Rechten den Satz:

$$\frac{\partial^m PQ}{\partial y^m} = \sum_{p=o}^{p=m} \frac{m^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{\partial^p P}{\partial y^p} \cdot \frac{\partial^{m-p} Q}{\partial y^{m-p}}$$

anwendet, so ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2} z^2 \cdot \frac{\partial^m U_{n+1}}{\partial y^m} = y^2 \left(\frac{\partial^{m+1} U_n}{\partial y^{m+1}} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial^m U_{n-1}}{\partial y^m} \right) + 2my \left(\frac{\partial^m U_n}{\partial y^m} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial^{m-1} U_{n-1}}{\partial y^{m-1}} \right)$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2 \left(\frac{\partial^{m-1} U_n}{\partial y^{m-1}} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial^{m-2} U_{n-1}}{\partial y^{m-2}} \right),$$

woraus hervorgeht:

$$\frac{\partial^{m+1} U_n}{\partial y^{m+1}} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^m U_{n-1}}{\partial y^m} - \frac{2m}{y} \cdot \frac{\partial^m U_n}{\partial y^m} + \tfrac{1}{2} \left(\frac{z}{y} \right)^2 \frac{\partial^m U_{n+1}}{\partial y^m}$$

$$+ \frac{m}{y} \cdot \frac{\partial^{m-1} U_{n-1}}{\partial y^{m-1}} - \frac{m(m-1)}{y^2} \frac{\partial^{m-1} U_n}{\partial y^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{2y^2} \frac{\partial^{m-2} U_{n-1}}{\partial y^{m-2}}.$$

Auf demselben Wege gelangt man, indem man von der Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} z^2 V_{n-1} = -y^2 \left(\frac{\partial V_n}{\partial y} + \tfrac{1}{2} V_{n+1} \right)$$

ausgeht, zu der Formel:

$$\frac{\partial^{m+1} V_n}{\partial y^{m+1}} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial^m V_{n+1}}{\partial y^m} - \frac{2m}{y} \cdot \frac{\partial^m V_n}{\partial y^m} - \tfrac{1}{2} \left(\frac{z}{y} \right)^2 \frac{\partial^m V_{n-1}}{\partial y^m}$$

$$- \frac{m}{y} \cdot \frac{\partial^{m-1} V_{n+1}}{\partial y^{m-1}} - \frac{m(m-1)}{y^2} \frac{\partial^{m-1} V_n}{\partial y^{m-1}} - \frac{m(m-1)}{2y^2} \frac{\partial^{m-2} V_{n+1}}{\partial y^{m-2}}.$$

24. Betrachten wir y als eine Function von z, so ist der totale Differentialquotient von $U_n(y, z)$ nach z:

$$\left(\frac{\partial U_n}{\partial z} \right) = \frac{\partial U_n}{\partial z} + \frac{\partial U_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$= -\frac{z}{y} U_{n+1} + \frac{1}{2} \left(U_{n-1} + \left(\frac{z}{y} \right)^2 U_{n+1} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Ist nun

$$y = cz,$$

wo c eine Constante ist, und demnach:

$$\frac{z}{y} = \frac{1}{c}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = c,$$

so hat man:

$$\frac{\partial U_n(cz, z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(cU_{n-1} - \frac{1}{c}U_{n+1}\right).$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{\partial^2 U_n(cz, z)}{\partial z^2} = \frac{1}{4}c\left(cU_{n-2} - \frac{1}{c}U_n\right) - \frac{1}{4c}\left(cU_n - \frac{1}{c}U_{n+2}\right),$$

oder:

$$\frac{\partial^2 U_n(cz, z)}{\partial z^2} = \frac{1}{4}(c^2 U_{n-2} - 2U_n + c^{-2}U_{n+2}).$$

Bildet man so fortschreitend die höheren Differentialquotienten, so lässt sich auf inductorischem Wege leicht beweisen, dass allgemein:

$$\frac{\partial^m U_n(cz, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m}\Sigma(-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} \cdot c^{m-2p} U_{n-m+2p}$$

ist.

25. Ist insbesondere $c = 1$, oder $y = z$, so hat man:

$$\frac{\partial U_n(z, z)}{\partial z} = \tfrac{1}{2}(U_{n-1} - U_{n+1})$$

$$\frac{\partial^2 U_n(z, z)}{\partial z^2} = \tfrac{1}{4}(U_{n-2} - 2U_n + U_{n+2})$$

$$\frac{\partial^3 U_n(z, z)}{\partial z^3} = \tfrac{1}{8}(U_{n-3} - 3U_{n-1} + 3U_{n+1} - U_{n+3})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

und allgemein:

$$\frac{\partial^m U_n(z, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m}\Sigma(-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} \cdot U_{n-m+2p}.$$

Hieraus ergibt sich also, dass diese Differentialquotienten das nämliche Bildungsgesetz befolgen, wie die nach n genommenen endlichen Differenzen zwischen je der zweiten Function. mit dem einzigen Unterschied, dass jede dieser Differenzen noch mit der sovielten Potenz von 2 dividirt erscheint, als die jedesmalige Ordnung des Differentialquotienten angibt.

Kennt man daher für irgend einen Werth von z zwei aufeinanderfolgende der Functionen $U_n(z, z)$, und verschafft sich die übrigen, soweit sie erforderlich sind, mittels der Gleichung (15):

$$U_n + U_{n+2} = I_n ,$$

so lassen sich obige Differentialquotienten durch einen einfachen Mechanismus berechnen.

26. Aehnliches gilt für die Function V_n. Denn man findet, von (17) und (22) Gebrauch machend:

$$\frac{\partial V_n(cz, z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} V_{n-1} - c\, V_{n+1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V_n(cz, z)}{\partial z^2} = \frac{1}{4}(c^{-2} V_{n-2} - 2V_n + c^2 V_{n+2})$$

u. s. f.,

also allgemein:

$$\frac{\partial^m V_n(cz, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m} \Sigma (-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} c^{-m+2p} V_{n-m+2p} .$$

27. Da

$$\frac{\partial U_n(z, z)}{\partial z} = \tfrac{1}{2}(U_{n-1} - U_{n+1}),$$

und (nach 15) für $y = z$:

$$I_{n-1} = U_{n-1} + U_{n+1}$$

ist, so ergibt sich noch die bemerkenswerthe Beziehung:

$$2I_{n-1} \frac{\partial U_n(z, z)}{\partial z} = U_{n-1}^2 - U_{n+1}^2 ,$$

welche ebenso auch für $V_n(z, z)$ gilt, da ja $V_n(z, z) = U_n(z, z)$ ist.

28. Wie die Reihen U_1, U_2, V_0, V_1 aus der Entwickelung der bestimmten Integrale

$$C = 2\pi \int_0^r I_0(l\varrho) \cos(\tfrac{1}{2} k\varrho^2) \cdot \varrho \, d\varrho = 2\pi r^2 \int_0^r I_0\left(z \frac{\varrho}{r}\right) \cos\left(\tfrac{1}{2} y \frac{\varrho^2}{r^2}\right) \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{d\varrho}{r},$$

oder

$$C = 2\pi r^2 \int_0^1 I_0(zu) \cos(\tfrac{1}{2} yu^2) \cdot u \, du$$

und

$$S = 2\pi r^2 \int_0^1 I_0(zu) \sin(\tfrac{1}{2} yu^2) \cdot u \, du$$

hervorgegangen sind, müssen auch die verallgemeinerten Reihen U_n und V_n mit analogen bestimmten Integralen in Zusammenhang stehen.

Aus (7) ergibt sich ohne weiteres:

$$C\cos\tfrac{1}{2}y + S\sin\tfrac{1}{2}y = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}y}U_1,$$

$$C\sin\tfrac{1}{2}y - S\cos\tfrac{1}{2}y = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}y}U_2,$$

oder:

$$\int_0^1 I_0(zu)\cos\left[\tfrac{1}{2}y(1-u^2)\right].u\,du = \frac{1}{y}U_1,$$

und:

$$\int_0^1 I_0(zu)\sin\left[\tfrac{1}{2}y(1-u^2)\right].u\,du = \frac{1}{y}U_2.$$

Setzt man hierin $\sqrt{\zeta}$ statt z, und differentiirt beiderseits m mal nach ζ, indem man zur Linken von der Formel:

$$\frac{\partial^m I_0(\sqrt{\zeta})}{\partial\zeta^m} = (-\tfrac{1}{2})^m.\zeta^{-\frac{m}{2}}I_m(\sqrt{\zeta}),$$

zur Rechten aber von der Formel (15):

$$\frac{\partial^m U_n(y,\sqrt{\zeta})}{\partial\zeta^m} = (-\tfrac{1}{2})^m y^{-m}\,U_{n+m}(y,\sqrt{\zeta})$$

Gebrauch macht, so erhält man zunächst:

$$\zeta^{-\frac{m}{2}}\int_0^1 I_m(u\sqrt{\zeta})\cos\left[\tfrac{1}{2}y(1-u^2)\right].u^{m+1}.du = \frac{1}{y}\cdot y^{-m}U_{m+1}(y,\sqrt{\zeta}),$$

$$\zeta^{-\frac{m}{2}}\int_0^1 I_m(u\sqrt{\zeta})\sin\left[\tfrac{1}{2}y(1-u^2)\right]u^{m+1}.du = \frac{1}{y}\cdot y^{-m}U_{m+2}(y,\sqrt{\zeta}),$$

und schliesslich, wenn man wieder z^2 statt ζ und in der ersten Gleichung $n-1$, in der zweiten $n-2$ statt m schreibt:

$$\int_0^1 I_{n-1}(zu) \cdot \cos\left[\tfrac{1}{2} y (1 - u^2)\right] \cdot u^n \, du = \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^{n-1} \cdot U_n,$$

$$\int_0^1 I_{n-2}(zu) \cdot \sin\left[\tfrac{1}{2} y (1 - u^2)\right] \cdot u^{n-1} \, du = \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^{n-2} U_n.$$

Vermöge der Beziehungen, welche (gemäss 18) zwischen den Functionen U_n und V_n bestehen, ist hiemit auch der Zusammenhang dieser Integrale mit der Function V_n gegeben. Es ist übrigens ersichtlich, dass diese Gleichungen sich auch direct ergeben, wenn man vorstehende Integrale derselben Behandlung durch successive theilweise Integration unterwirft, wie die Integrale C und S im ersten Abschnitt.

29. Da (nach 14) für $y = z$ die Function U_n in endlicher Form durch goniometrische und Bessel'sche Functionen ausgedrückt wird, indem man nämlich hat:

$$U_{2n}(z, z) = \frac{(-1)^n}{2} (I_0(z) + \cos z) - \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p}(z),$$

$$U_{2n+1}(z, z) = \frac{(-1)^n}{2} \sin z - \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p+1}(z),$$

so ergeben sich für diesen Fall aus obigen Formeln folgende bemerkenswerthe Resultate:

$$\int_0^1 I_{2n-1}(zu) \cdot \cos\left[\tfrac{1}{2} z (1 - u^2)\right] \cdot u^{2n} \cdot du = \int_0^1 I_{2n-2}(zu) \cdot \sin\left[\tfrac{1}{2} z (1 - u^2)\right] \cdot u^{2n-1} \, du$$

$$= \frac{(-1)^n}{2z} (I_0 + \cos z) - \frac{1}{z} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p},$$

$$\int_0^1 I_{2n}(zu) \cos\left[\tfrac{1}{2} z (1 - u^2)\right] \cdot u^{2n+1} \, du = \int_0^1 I_{2n-1}(zu) \sin\left[\tfrac{1}{2} z (1 - u^2)\right] \cdot u^{2n} \, du$$

$$= \frac{(-1)^n}{2z} \sin z - \frac{1}{z} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p+1},$$

welche sich (für resp. $n = 1$ und $n = o$) noch wie folgt:

$$\int_o^1 I_1(zu)\cos\left[\tfrac{1}{2}z(1-u^2)\right].u^2\,du = \int_o^1 I_o(zu).\sin\left[\tfrac{1}{2}z(1-u^2)\right].u\,du$$
$$= \frac{1}{2z}(I_o - \cos z),$$

$$\int_o^1 I_o(zu)\cos\left[\tfrac{1}{2}z(1-u^2)\right]u\,du = -\int_o^1 I_1(zu)\sin\left[\tfrac{1}{2}z(1-u^2)\right].du$$
$$= \frac{\sin z}{2z}$$

vereinfachen.

30. Gemäss (5) und (9) haben wir, mit Rücksicht darauf, dass

$$y = kr^2, \qquad z = lr$$

ist:

$$\int_o^r I_o(l\varrho)\cos(\tfrac{1}{2}k\varrho^2).\varrho\,d\varrho = \frac{1}{k}\sin\frac{l^2}{2k} + \frac{1}{k}\sin\tfrac{1}{2}kr^2.V_o - \frac{1}{k}\cos\tfrac{1}{2}kr^2.V_1$$

und

$$\int_o^r I_o(l\varrho).\sin(\tfrac{1}{2}k\varrho^2).\varrho\,d\varrho = \frac{1}{k}\cos\frac{l^2}{2k} - \frac{1}{k}\cos\tfrac{1}{2}kr^2.V_o - \frac{1}{k}\sin\tfrac{1}{2}kr^2.V_1.$$

Ist nun weder k noch l der Null gleich, und lassen wir die obere Grenze r der Integrale unendlich gross werden, so verschwinden die Functionen V_o und V_1. Denn für $r = \infty$ verschwindet nicht nur

$$\frac{z}{y} = \frac{l}{kr},$$

sondern es verschwinden, da $z = lr$ unendlich gross wird, auch sämmtliche Bessel'sche Functionen.

Wir gelangen daher zu den folgenden beiden bestimmten Integralen:

$$\int_o^\infty I_o(l\varrho)\cos(\tfrac{1}{2}k\varrho^2).\varrho\,d\varrho = \frac{1}{k}\sin\frac{l^2}{2k},$$

$$\int_o^\infty I_o(l\varrho)\sin(\tfrac{1}{2}k\varrho^2).\varrho\,d\varrho = \frac{1}{k}\cos\frac{l^2}{2k},$$

welche, wie wir weiterhin sehen werden, für das vorliegende Problem von Bedeutung sind.

31. Auch diese Formeln sind der Verallgemeinerung fähig. Addirt man sie nämlich, nachdem man die zweite mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt hat, und schreibt $\sqrt{\zeta}$ statt l, so erhält man:

$$\int_0^\infty I_0(\varrho\sqrt{\zeta})\, e^{\frac{1}{2}k\varrho^2 i}\,.\,\varrho\,d\varrho = \frac{i}{k}\cdot e^{-\frac{\zeta}{2k}i}.$$

Differentiirt man diese Gleichung beiderseits m mal nach ζ, indem zur Linken die Relation:

$$\frac{\partial^m I_0(\varrho\sqrt{\zeta})}{\partial\zeta^m} = \frac{(-1)^m}{2^m}\,\varrho^m\,\zeta^{-\frac{m}{2}}\,I_m(\varrho\sqrt{\zeta})$$

anwendet, so findet man zunächst:

$$\frac{(-1)^m}{2^m}\,\zeta^{-\frac{m}{2}}\int_0^\infty I_m(\varrho\sqrt{\zeta})\,.\,e^{\frac{1}{2}k\varrho^2 i}\,.\,\varrho^{m+1}\,d\varrho = i\,\frac{(-1)^m}{k}\cdot\left(\frac{i}{2k}\right)^m e^{-\frac{\zeta}{2k}i}$$

oder, wenn man wieder l^2 statt ζ setzt:

$$\int_0^\infty I_m(l\varrho)\,.\,e^{\frac{1}{2}k\varrho^2 i}\,.\,\varrho^{m+1}\,d\varrho = \frac{i^{m+1}}{k}\left(\frac{l}{k}\right)^m e^{-\frac{l^2}{2k}i}.$$

Hieraus aber gehen, wenn man zuerst 2m, dann $2m+1$ statt m setzt, die folgenden vier Gleichungen hervor:

$$\int_0^\infty I_{2m}(l\varrho)\,.\,\cos(\tfrac{1}{2}k\varrho^2)\,.\,\varrho^{2m+1}\,d\varrho = \frac{(-1)^m}{k}\cdot\left(\frac{l}{k}\right)^{2m}\cdot\sin\frac{l^2}{2k};$$

$$\int_0^\infty I_{2m}(l\varrho)\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}k\varrho^2)\,.\,\varrho^{2m+1}\,d\varrho = \frac{(-1)^m}{k}\cdot\left(\frac{l}{k}\right)^{2m}\cdot\cos\frac{l^2}{2k};$$

$$\int_0^\infty I_{2m+1}(l\varrho)\cos(\tfrac{1}{2}k\varrho^2)\,.\,\varrho^{2m+2}\,d\varrho = \frac{(-1)^{m+1}}{k}\cdot\left(\frac{l}{k}\right)^{2m+1}\cdot\cos\frac{l^2}{2k};$$

$$\int_0^\infty I_{2m+1}(l\varrho)\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}k\varrho^2)\,.\,\varrho^{2m+2}\,d\varrho = \frac{(-1)^m}{k}\cdot\left(\frac{l}{k}\right)^{2m+1}\cdot\sin\frac{l^2}{2k},$$

in deren beiden ersteren die obigen zwei Formeln (30) für $m = 0$ als specielle Fälle enthalten sind.

III. Abschnitt.

Der Fraunhofer'sche Grenzfall.

32. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $y = o$, oder

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)r^2 = o$$

ist.

Diess tritt ein, entweder wenn $a = b = \infty$, oder wenn $b = -a$ ist.

Ersteres findet statt, wenn der Lichtpunkt in unendlicher Ferne liegt, die einfallende Welle sonach eben ist, und die von der beugenden Oeffnung nach irgend einer Richtung unter sich parallel ausgehenden und nach dem in dieser Richtung gelegenen unendlich fernen Punkt hinzielenden Elementarstrahlen zur Interferenz kommen.

Da Linsen in Strahlenbündel zwischen ihren conjugirten Punkten keine neuen Gangunterschiede einführen, so kann dieser Fall verwirklicht werden, wenn die Beugungserscheinung durch ein Spectrometer beobachtet wird, dessen Collimator und Fernrohr auf unendliche Entfernung eingestellt sind, und den beugenden Schirm zwischen sich enthalten.

33. Wenn $b = -a$ ist, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich, dass entweder a negativ, oder a positiv ist.

Ist a negativ und sonach das ebenso grosse b positiv, so ist die einfallende Kugelwelle nach ihrer Fortpflanzungsrichtung zu concav, und der Auffangschirm geht durch ihren Mittelpunkt.

Dieser Fall wird realisirt, wenn mittels einer Sammellinse, welche um mehr als ihre Brennweite von dem Lichtpunkt absteht, dessen scharfes Bild auf dem durch den conjugirten Punkt gelegten Auffangschirm entworfen und die beugende Oeffnung zwischen die Linse und diesen Schirm gebracht wird.

34. Ist dagegen a positiv und das gleichgrosse b negativ, so wendet die einfallende Kugelwelle ihre convexe Seite nach der Fortpflanzungsrichtung, und die zur Interferenz kommenden Elementarstrahlenbündel gehen so von der beugenden Oeffnung aus, als kämen sie von Punkten, welche in einer durch den Lichtpunkt selbst als Mittelpunkt der Kugelwelle gelegten Ebene liegen.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man die beugende Oeffnung vor das auf den Lichtpunkt accommodirte Auge hält.

Um denselben Fall objectiv zu verwirklichen, bringt man die beugende Oeffnung zwischen den Lichtpunkt und eine Sammellinse, welche von demselben um mehr als ihre Brennweite absteht, und stellt den Auffangschirm da auf, wo die Linse das scharfe Bild des Lichtpunktes entwirft.

In diesem wie in dem vorigen Falle kann man auch eines materiellen Auffangschirmes ganz entrathen, indem man von der Hinterseite her das freie oder mit einer Lupe bewaffnete Auge auf die Ebene, welche der Schirm einnahm, accommodirt. Auf der Netzhaut entstehen alsdann die scharfen Bilder aller Punkte dieser Ebene.

Da in einem astronomischen Fernrohr Sammellinse und Lupe sich vereinigt finden, so genügt es, um die in diesem Falle sich zeigende Erscheinung zu beobachten, ein solches Fernrohr, vor dessen Objectiv die beugende Oeffnung angebracht ist, auf den Lichtpunkt einzustellen.

Hierin besteht die Beobachtungsmethode Fraunhofer's. Danach sind die Beugungserscheinungen, bei welchen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = o$$

ist, mit Recht Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen genannt worden.

35. Die drei besprochenen Fälle (32, 33, 34) dieser Art von Beugungserscheinungen haben den Umstand mit einander gemein, dass der Beobachtungsapparat, sei es bei objectiver Darstellung der Auffangschirm, oder bei subjectiver Betrachtung das blosse oder mit Lupe bewaffnete Auge, oder ein Fernrohr, stets auf das scharfe Bild des Lichtpunktes accommodirt oder eingestellt ist.

Man könnte daher die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen auch als accommodirte oder eingestellte bezeichnen, die Fresnel'schen Beugungserscheinungen dagegen als nicht accommodirte. Jene bilden den besonderen Grenzfall, welchem diese sich stetig nähern, wenn y gegen Null rückt.

36. Obgleich der Fraunhofer'sche Grenzfall für die kreisförmige Oeffnung, wie oben bereits bemerkt, schon mehrfach und erschöpfend

behandelt worden ist, so erscheint es doch, eben wegen dieses Zusammenhangs mit dem weiterhin zu behandelnden allgemeinen Problem, unumgänglich nothwendig, denselben hier in Kürze nochmals zu besprechen.

Für $y = o$ ist:

$$\frac{2}{y} U_1 = \frac{2}{z} I_1(z) - 2 \cdot \frac{y^2}{z^3} I_3(z) + 2 \cdot \frac{y^4}{z^5} I_5(z) - + \ldots$$

$$= \frac{2}{z} I_1(z),$$

und

$$\frac{2}{y} U_2 = 2 \cdot \frac{y}{z^2} I_2(z) - 2 \cdot \frac{y^3}{z^4} I_4(z) + 2 \cdot \frac{y^5}{z^6} I_6(z) - + \ldots$$

$$= o.$$

Der Ausdruck für die Lichtstärke M^2 (11) des Beugungsbildes ergibt sich daher in der folgenden einfachen Gestalt:

$$M^2 = \left(\frac{2}{z} I_1\right)^2.$$

Schon Airy[1]) hat die convergente unendliche Reihe:

$$1 - \frac{z^2}{2 \cdot 4} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{z^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + - \ldots,$$

welche nichts anderes ist als $2z^{-1} I_1$, und von ihm durch Entwickelung des bestimmten Integrals:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \cos zu \sqrt{1 - u^2} \cdot du$$

erhalten wurde, zur Berechnung einer Tabelle benutzt, welche die Functionswerthe für alle um 0,2 von einander verschiedene Werthe des Arguments von $z = o$ bis $z = 12$ enthält. Aus derselben Reihe hat Knochenhauer[2]) die Maxima und Minima der Lichtstärke annähernd berechnet. Schon vor ihnen hatte Schwerd[3]) auf dem mühsamen Wege der Zerlegung des Kreises in 180 trapezförmige Zonen eine Tabelle hergestellt, welche mit einem Increment von $15^0 = 0{,}2618$ bis $z = 1125^0 = 19{,}635$ reicht.

---

1) Airy, l. c.
2) Knochenhauer, l. c. p. 24.
3) Schwerd, l. c. p. 67.

37. Die Bemerkung aber, dass M^2 im gegenwärtigen Fall durch die Bessel'sche Function I_1 dargestellt wird, führt uns mit Leichtigkeit zu einer noch umfassenderen und genaueren Tabelle der Werthe von M und M^2. Schon Bessel[1]) hat Tabellen der Functionen I_0 und I_1 gegeben, welche jedoch nur bis $z = 3{,}2$ gehen und desshalb für das vorliegende Problem nicht ausreichen. Hansen[2]) dagegen berechnete später für diese beiden Bessel'schen Functionen Tafeln von grösserem Umfang, welche auch meinem oben bereits citirten Schriftchen[3]) über die Bessel'schen Functionen als Anhang beigegeben sind. Aus diesen ergibt sich fast mühelos eine Tabelle der Werthe von $2z^{-1}I_1$, indem man die verdoppelten Werthe von I_1 durch das zugehörige Argument dividirt. Die so berechnete Tafel[4]) folgt am Schlusse dieser Abhandlung (Tab. I); sie reicht mit einem Incremente $= 0{,}1$ bis $z = 20$. In der dritten Columne finden sich die Werthe von M^2, d. i. die Lichtintensitäten selbst, auf diejenige der Bildmitte als Einheit bezogen. Die Fig. 1 gibt eine graphische Darstellung dieser Intensitäten, oder vielmehr der Werthe $1000\ M^2$, von $z = 3$ bis $z = 20$.

Für den Gebrauch der Tabelle in speciellen Fällen erinnern wir uns, dass (nach 6 und 5):

$$z = lr = \frac{2\pi\zeta}{\lambda b} r$$

ist. Wird der Beugungswinkel mit χ bezeichnet, so ist

$$\frac{\zeta}{b} = \mathrm{tg}\chi\,,$$

oder auch, wenn der Beugungswinkel sehr klein ist, ebensogut:

$$\frac{\zeta}{b} = \sin\chi\,.$$

---

1) Bessel, Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abh. der Berl. Akad. der Wiss. 1824.

2) Hansen, Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung; Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha 1843.

3) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig 1868.

4) Dieselbe ist aus einer früheren Abhandlung: „Lommel, Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung; Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 15. p. 164. 1870." reproducirt.

Man hat daher:

$$z = \frac{2\pi}{\lambda} r \operatorname{tg} \chi \quad \text{oder auch:} \quad z = \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \chi .$$

Wird ein Zwischenwerth von $2z^{-1} I_1$ verlangt, der in der Tabelle nicht vorkommt, so geht man auf die Hansen'sche Tabelle von I_1 zurück, und rechnet nach der Formel:

$$I_1(z+\varepsilon) = I_1(z) + a \cdot \frac{\varepsilon}{h} + b \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2 + c \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^3 ,$$

wo a, b, c resp. die der Hansen'schen Tabelle beigefügten Werthe von:

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} , \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} , \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 I_1}{\partial z^3} ,$$

bezogen auf das Increment $h = 0{,}1$ der Tafel, bedeuten.

38. Um die Nullwerthe der Function I_1 zu ermitteln, wurde ebenfalls die vorstehende Formel für $I_1(z+\varepsilon)$ benutzt. Nachdem diejenigen Werthe von I_1, a, b und c, welche einem Nullwerthe von I_1 am nächsten liegen, der Hansen'schen Tabelle entnommen waren, wurde die numerische Gleichung dritten Grades:

$$I_1(z) + a \cdot \frac{\varepsilon}{h} + b \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2 + c \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^3 = 0$$

nach ε/h aufgelöst, und so die zu dem tabellarischen Werthe von z hinzuzufügende Grösse ε aufgefunden.

39. Behufs Ermittelung der Maxima und Minima der Function $z^{-1} I_1(z)$ wurde der nach ε genommene Differentialquotient von $(z+\varepsilon)^{-1} I_1(z+\varepsilon)$ gleich Null gesetzt. Man gelangt so, unter Vernachlässigung der dritten Potenz von ε/h, zur quadratischen Gleichung:

$$\left(b + \frac{3cz}{h}\right) \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2 + \frac{2bz}{h} \cdot \frac{\varepsilon}{h} + \frac{az}{h} - I_1(z) = 0 ,$$

in welcher der dem Maximum oder Minimum nächstliegende Werth von z unserer Tab. I, die zugehörigen Werthe von I_1, a, b und c aber der Hansen'schen Tabelle zu entnehmen sind.

40. Eine bekannte Eigenschaft der Bessel'schen Functionen ge-

währt die Möglichkeit, die so gefundenen Werthe einer Controle zu unterwerfen. Es ist nämlich allgemein [1]):

$$\frac{\partial[z^{-\nu} I_\nu(z)]}{\partial z} = -z^{-\nu} I_{\nu+1}(z),$$

oder speciell für $\nu = 1$:

$$\frac{\partial[z^{-1} I_1(z)]}{\partial z} = -z^{-1} I_2(z).$$

Ist nun $z^{-1} I_1$ ein Maximum oder Minimum, so verschwindet der Differentialquotient zur Linken, und es muss für denselben Werth von z auch:

$$I_2(z) = 0$$

sein. Nun ist aber:

$$I_2(z) = \frac{2}{z} I_1(z) - I_0(z);$$

also muss im Falle des Maximums oder Minimums:

$$\frac{2}{z} I_1(z) = I_0(z)$$

sein. Vergleicht man daher die Maximal- und Minimalwerthe von $2z^{-1} I_1$ mit den aus der Hansen'schen Tabelle berechneten zu denselben z gehörigen Werthen von I_0, so hat man in ihrer Uebereinstimmung eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Die gefundenen Resultate, Nullwerthe und Maxima oder Minima, sind in Tab. I a zusammengestellt; die Rubrik M^2 enthält die relativen Lichtstärken der hellsten Stellen der Ringe, von welchen das mittlere Lichtscheibchen umgeben erscheint, bis zum fünften Ringe inclusive.

41. In der Tab. I a findet sich noch eine Columne mit der Ueberschrift „Vielfache von λ"; sie enthält die Werthe $2\lambda^{-1} r\,tg\chi$ oder z/π, d. i. die Gangunterschiede der beiden äussersten Randstrahlen in Wellenlängen ausgedrückt.

Da die Wurzelwerthe der Gleichung $I_1 = 0$ den Werthen $z = (m + \frac{1}{4})\pi$, und diejenigen der Gleichung $I_2 = 0$ den Werthen $z = (m + \frac{3}{4})\pi$ um so näher kommen, je grösser z wird [2]), so erkennt man, dass die Gang-

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen p. 8.
2) Ib. p. 64.

unterschiede der Randstrahlen, bei welchen schwarze Ringe auftreten mit wachsendem Beugungswinkel den Werthen $(m+\frac{1}{4})\lambda$, und diejenigen, bei welchen helle Ringe sich zeigen, den Werthen $(m+\frac{3}{4})\lambda$ als oberen Grenzen sich nähern, und dass die Differenz der aufeinanderfolgenden Gangunterschiede in beiden Fällen einer ganzen, diejenige zwischen einem Nullwerth und dem darauffolgenden Maximum einer halben Wellenlänge um so näher kommt, je grösser der Beugungswinkel wird.

Alles diess wird aus der vierten Columne der Tab. I a ersichtlich.

42. Für Werthe von z, welche die Grenze unserer Tab. I überschreiten, wird die Function $2z^{-1}I_1$ mit hinreichender Genauigkeit, nämlich mindestens auf fünf Decimalen, durch die Gleichung:

$$\frac{2}{z}I_1(z) = \frac{2}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\sin(z-\frac{1}{4}\pi) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z^2}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\cos(z-\frac{1}{4}\pi)$$

dargestellt [1]), und zwar um so genauer, je grösser z wird.

Mit derselben Genauigkeit ergeben sich die ferneren Wurzeln von $I_1 = 0$ durch Auflösung der Gleichung:

$$\operatorname{tg}(z-\tfrac{1}{4}\pi) = -\frac{3}{8z}.$$

---

1) Bekanntlich sind die Bessel'schen Functionen mittels halbconvergenter unendlicher Reihen durch folgende Formeln (Lommel, Stud. üb. die Bessel'schen Funct. p. 58) ausdrückbar:

$$I_{2n}(z) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)\sum(-1)^p\cdot\frac{(4n+1)^{2p|2}\,(4n-1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p}}$$

$$-(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\sin(z-\tfrac{1}{4}\pi)\sum(-1)^p\cdot\frac{(4n+1)^{2p+1|2}\,(4n-1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p+1}},$$

und

$$I_{2n+1}(z) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\sin(z-\tfrac{1}{4}\pi)\sum(-1)^p\cdot\frac{(4n+3)^{2p|2}\,(4n+1)^{2p|-2}}{8^{2p|3}}\cdot\frac{1}{z^{2p}}$$

$$+(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)\sum(-1)^p\cdot\frac{(4n+3)^{2p+1|2}\,(4n+1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p+1}},$$

welche zur numerischen Berechnung für grössere Werthe von z sehr brauchbar sind. Die Formeln für $2z^{-1}I_1$ und I_2 oben im Text sind nur specielle Fälle dieser allgemeineren Formeln, und abgekürzt mit Rücksicht auf die Genauigkeit, welche erreicht werden, und auf die Werthe von z, für welche sie gebraucht werden sollen.

Da für $z > 20$ mit dem nämlichen Grade der Annäherung:

$$I_2(z) = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin(z - \tfrac{1}{4}\pi) - \left(1 - \frac{105}{128} \cdot \frac{1}{z^2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos(z - \tfrac{1}{4}\pi)$$

gilt, so erhält man ebenso aus der Gleichung:

$$\operatorname{cotg}(z - \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{15}{8z - \frac{105}{16z}}$$

mit hinreichender Genauigkeit die Werthe von z, welche M^2 zu einem Maximum machen.

43. Je grösser z wird, desto genauer wird $2z^{-1} I_1(z)$ durch den einfachen Ausdruck:

$$\frac{2}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin(z - \tfrac{1}{4}\pi)$$

und sonach die Lichtstärke M^2 durch die Gleichung:

$$M^2 = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(z - \frac{1}{4}\pi)}{z^3}$$

wiedergegeben.

Da, wie bereits oben erwähnt wurde, die Werthe von z, für welche M^2 zu einem Maximum wird, den Werthen $(m + \frac{3}{4})\pi$ immer näher kommen, so nähert sich in diesem Falle $\sin^2(z - \frac{1}{4}\pi)$ mit wachsendem z der Einheit, und wir erhalten:

$$\lim z^3 M^2 = \frac{8}{\pi},$$

d. h. die Producte der Intensitätsmaxima mit den dritten Potenzen der entsprechenden Werthe von z nähern sich mit zunehmendem z dem constanten Werthe:

$$\frac{8}{\pi} = 2{,}546479$$

als oberer Grenze.

Multiplicirt man die in Tab. I a aufgeführten Maxima mit den Cuben der zugehörigen Werthe von z, so erhält man die Reihe der Zahlen:

2,3701; 2,4796; 2,5113; 2,5248; 2,5316,

welche dem Werthe $8/\pi$ in der That immer näher kommen.

Wir können demnach sagen, dass sich die Intensitätsmaxima angenähert umgekehrt wie die dritten Potenzen der zugehörigen Gangunterschiede verhalten, und zwar um so genauer, je grösser die Gangunterschiede werden.

IV. Abschnitt.

Der Fresnel'sche allgemeine Fall.

44. Um in diesem Falle die Lichtstärke

$$M^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2 (U_1^2 + U_2^2)$$

zu bestimmen, müssen die Functionen U_1 und U_2 zu dem jeweils gegebenen Werth von y für jeden Werth von z berechnet werden.

Diess geschieht mittels der Formeln (vergl. 7, 9 und 10):

$$U_1 = \frac{y}{z} I_1 - \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3 + \left(\frac{y}{z}\right)^5 I_5 - + \ldots,$$

$$U_2 = \left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2 - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4 + \left(\frac{y}{z}\right)^6 I_6 - + \ldots,$$

oder:

$$U_1 = \sin\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y}\right) - V_1$$

$$= \sin\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y}\right) - \left(\frac{z}{y} I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3 + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5 - + \ldots\right),$$

$$U_2 = -\cos\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y}\right) + V_0$$

$$= -\cos\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y}\right) + \left(I_0 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2 + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4 - + \ldots\right),$$

von welchen das erste Paar zur Anwendung kommt, wenn $y/z < 1$, das zweite dagegen, wenn $z/y < 1$ ist.

45. Um diese Berechnung auszuführen, müssen vor allem die numerischen Werthe der Bessel'schen Functionen bekannt sein.

In der Tabelle II sind dieselben von I_0 bis I_{20} für alle ganzzahligen Werthe des Arguments von $z = 0$ bis $z = 12$ angegeben.

Die Werthe von I_0 und I_1 konnten unmittelbar der Hansen'schen Tabelle entnommen werden. Von diesen ausgehend lassen sich alsdann die Werthe der Functionen mit höheren Indices mittels der Gleichung:

$$I_{n+1} = \frac{2n}{z} I_n - I_{n-1}$$

leicht berechnen. Hiebei nimmt jedoch die Genauigkeit ab, sobald 2n grösser als z geworden ist, und der Fehler, mit welchem die letzte Decimale von I_0 und I_1 behaftet ist, vergrössert sich derart, dass schliesslich alle merklichen Ziffern unrichtig werden.

Der Gebrauch dieser Formel wurde daher für $2n > z$ vermieden, und in diesen Fällen die Function I_n direct aus der convergenten unendlichen Reihe:

$$I_n(z) = \Sigma(-1)^p \cdot \frac{z^{n+2p}}{2^{p|2}\, 2^{n+p|2}} ,$$

berechnet.

Es brauchten jedoch auf diese Weise nur diejenigen Functionen berechnet zu werden, deren Indices um zwei Einheiten von einander verschieden sind. Denn die dazwischen liegende Function ergibt sich alsdann vermöge der Formel:

$$I_n = \frac{z}{2n}(I_{n-1} + I_{n+1})$$

völlig genau.

46. Wird ein Functionswerth für ein Argument $z + \varepsilon$, das in der Tafel nicht vorkommt, verlangt, so erinnern wir uns der Formel [1]):

$$(\zeta + h)^{-\frac{n}{2}} I_n(\sqrt{\zeta + h}) = \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{h}{2\sqrt{\zeta}}\right)^p \cdot \frac{1}{p!} \cdot \zeta^{-\frac{n}{2}} I_{n+p}(\sqrt{\zeta}) .$$

Setzen wir darin z^2 statt ζ, und

$$\sqrt{z^2 + h} = z + \varepsilon ,$$

so wird:

$$\frac{h}{2z} = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2z} ,$$

und wir erhalten:

$$I_n(z + \varepsilon) = \left(\frac{z + \varepsilon}{z}\right)^n \Sigma(-1)^p \left(\frac{h}{2z}\right)^p \cdot \frac{1}{p!} I_{n+p}(z) ,$$

woraus der gewünschte Werth, namentlich für die Functionen mit kleinerem Index, leicht berechnet werden kann.

Diese Formel hat jedoch den Uebelstand, dass sie für die Functionen, welche hinsichtlich ihres Index der oberen Grenze unserer Tabelle nahe

---

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen. p. 11.

liegen, nicht mehr gebraucht werden kann, weil die erforderlichen Coefficienten I_{n+p} für $n+p>20$ nicht mehr zu Gebote stehen.

Dagegen erhalten wir eine in allen Fällen brauchbare Interpolationsformel, wenn wir von der Gleichung [1]):

$$(\zeta+h)^{\frac{n}{2}} I_n(\sqrt{\zeta+h}) = \Sigma\left(\frac{h}{2\sqrt{\zeta}}\right)^p \cdot \frac{1}{p!} \cdot \zeta^{\frac{n}{2}} I_{n-p}(\sqrt{\zeta})$$

ausgehen, und ganz ebenso wie vorhin verfahren. In der so gewonnenen Formel:

$$I_n(z+\varepsilon) = \left(\frac{z}{z+\varepsilon}\right)^n \Sigma\left(\frac{h}{2z}\right)^p \cdot \frac{1}{p!} I_{n-p}(z)$$

steigen die Coefficienten von I_n zunächst herab bis I_o, um sich dann wieder vermöge der Gleichung:

$$I_{-n} = (-1)^n I_n$$

in umgekehrter Reihenfolge und mit abwechselnden Vorzeichen zu erheben, und sind demnach durch die Tabelle II selbst in jedem Falle in genügender Anzahl gegeben.

47. In der oben (44) näher bezeichneten Weise wurden nun die Werthe von:

$$\frac{2}{y} U_1(y,z) \text{ und } \frac{2}{y} U_2(y,z)$$

für $y = \pi$, 2π, 3π u. s. w. bis 10π und für die ganzzahligen Werthe von z von $z = o$ bis $z = 12$ berechnet, und nebst den zugehörigen Lichtintensitäten:

$$M^2 = \left(\frac{2}{y} U_1\right)^2 + \left(\frac{2}{y} U_2\right)^2$$

in den Tabellen III bis XII niedergelegt.

In den Figuren 2 bis 11 ist der Gang dieser letzteren Werthe graphisch dargestellt, und zwar ist in den Figuren 2 bis 7 100 M^2, in den folgenden 1000 M^2 als Ordinate aufgetragen.

48. Die Lichtstärke M^2 wird zu einem Maximum oder Minimum für diejenigen Werthe von z, für welche

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = o$$

ist.

---

1) Ib. p. 12.

Nun ist

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = 2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(U_1\frac{\partial U_1}{\partial z} + U_2\frac{\partial U_2}{\partial z}\right);$$

nach (16) aber hat man:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{z}{y}U_2 \text{ und } \frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{z}{y}U_3,$$

folglich:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = -\left(\frac{2}{y}\right)^2\cdot\frac{2z}{y}U_2(U_1 + U_3),$$

oder, da (zufolge 15):

$$U_1 + U_3 = \frac{y}{z}\cdot I_1$$

ist, einfach:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = -2\left(\frac{2}{y}\right)^2 I_1 U_2.$$

Die Lichtstärke wird daher zu einem Maximum oder Minimum, entweder wenn $I_1 = o$, oder wenn $U_2 = o$ ist.

Da

$$I_1 = -\frac{\partial I_o}{\partial z}$$

und

$$U_2 = -\frac{y}{z}\frac{\partial U_1}{\partial z}$$

ist, so kann man auch sagen, dass die Lichtstärke ein Maximum oder Minimum wird, wenn entweder I_o oder U_1 ein Maximum oder Minimum werden.

49. Die Werthe von z, welche $I_1 = o$ machen, sind die nämlichen, welchen die Intensitätsminima des Fraunhofer'schen Grenzfalls entsprechen, und sind daher aus dem vorhergehenden Abschnitt schon bekannt; sie sind:

$$z = 3{,}831706,$$
$$z = 7{,}015587,$$
$$z = 10{,}173467,$$
u. s. w.,

und bleiben die nämlichen für alle Werthe von y.

Um die zu diesen Argumenten gehörigen Werthe von $2y^{-1}U_1$, $2y^{-1}U_2$ und M^2 zu ermitteln, bedient man sich bequem der aus (20) hervorgehenden Formeln:

$$\frac{2}{y}U_1(y, z+\varepsilon) = \frac{2}{y}U_1 - \frac{h}{2y}\cdot\frac{2}{y}U_2 + \left(\frac{h}{2y}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{y}U_3 - \left(\frac{h}{2y}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{y}U_4 + - \ldots,$$

$$\frac{2}{y}U_2(y, z+\varepsilon) = \frac{2}{y}U_2 - \frac{h}{2y}\cdot\frac{2}{y}U_3 + \left(\frac{h}{2y}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{y}U_4 - \left(\frac{h}{2y}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{y}U_5 + - \ldots,$$

wo h sich aus der Gleichung:

$$h = 2\varepsilon z + \varepsilon^2$$

ergibt, und die Coefficienten $2y^{-1}U_3$, $2y^{-1}U_4$, $2y^{-1}U_5$ u. s. w., ausgehend von den nächstgelegenen tabellarischen Werthen von $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$, vermöge der Gleichung (15):

$$\frac{2}{y}U_n + \frac{2}{y}U_{n+2} = \frac{2}{y}\left(\frac{y}{z}\right)^n I_n$$

durch successive Summationen leicht gefunden werden.

Sollen z. B. für $y = 2\pi$ und $z = 10{,}173467$ die Werthe von $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$ berechnet werden, so ist, wenn man von $z = 10$ ausgeht:

$$\varepsilon = 0{,}173467\,, \qquad \log\frac{h}{2y} = 9{,}4447875 - 10\,,$$

und die für beide Reihen giltigen Coefficienten finden sich nach folgendem Schema:

$$\frac{2}{y}\cdot\frac{y}{z}I_1 = +0{,}0086946 \qquad \frac{2}{y}U_1 = -0{,}0046796 \qquad \frac{2}{y}U_2 = +0{,}0407127$$

$$\frac{2}{y}\cdot\left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2 = +0{,}0319979 \qquad \frac{2}{y}U_3 = +0{,}0133742 \qquad \frac{2}{y}U_4 = -0{,}0087148$$

$$\frac{2}{y}\cdot\left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3 = +0{,}0046094 \qquad \frac{2}{y}U_5 = -0{,}0087648 \qquad \frac{2}{y}U_6 = -0{,}0021798$$

$$\frac{2}{y}\left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4 = -0{,}0108946$$

und aus den obigen Reihen berechnet sich nun:

$$\frac{2}{y}U_1 = -0{,}0154693\,, \qquad \frac{2}{y}U_2 = +0{,}0366814\,, \qquad M^2 = 0{,}0015848\,.$$

Dabei sind, wenn $y/z < 1$ ist, die Werthe:

$$\frac{2}{y}\cdot\frac{y}{z}I_1\,, \qquad \frac{2}{y}\cdot\left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2\,, \qquad \frac{2}{y}\cdot\left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3\,, \ldots$$

durch die vorausgegangene Berechnung der tabellarischen Werthe $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$ mittels der U-Reihen schon unmittelbar gegeben.

Ist dagegen $y/z > 1$, und werden zur Berechnung von $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$ die V-Reihen, somit die Werthe:

$$\frac{2}{y}\cdot\frac{z}{y}I_1\,,\quad \frac{2}{y}\left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2\,,\quad \frac{2}{y}\left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3\,,\ \ldots$$

benutzt, so lassen sich jene Zahlen aus diesen immerhin ohne allzugrosse Mühe ableiten.

50. Die Wurzelwerthe der Gleichung $U_2 = o$ werden gefunden, indem man die Gleichung:

$$U_2(y, z+\varepsilon) = o\,,$$

d. i. die Gleichung:

$$\frac{2}{y}U_2 - \frac{h}{2y}\cdot\frac{2}{y}U_3 + \left(\frac{h}{2y}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{y}U_4 - \left(\frac{h}{2y}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{y}U_5 + - \ldots = o\,,$$

deren Coefficienten $2y^{-1}U_3$, $2y^{-1}U_4$, u. s. w. ausgehend von dem tabellarischen Werthe von $2y^{-1}U_2$, welcher einem Nullwerthe am nächsten kommt, und dem zugehörigen Werthe von $2y^{-1}U_1$ in derselben Weise wie oben abgeleitet werden, nach $h/2y$ auflöst, und, nachdem h bekannt ist, ε aus der Gleichung:

$$\varepsilon^2 + 2z\varepsilon - h = o$$

bestimmt. Mittels der obigen Formel für $2y^{-1}U_1(y, z+\varepsilon)$ wird alsdann der zugehörige Werth von $2y^{-1}U_1$ berechnet, der zum Quadrat erhoben die entsprechende Lichtstärke gibt.

Die so gefundenen Zahlenwerthe von z, $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$, für welche die Lichtstärke M^2 ein Maximum oder Minimum wird, sind nebst dieser Lichtstärke selbst jeweils am Fusse der Tabellen III bis XII zusammengestellt.

51. Ein Blick auf diese Tabellen oder auf die entsprechenden Figuren 2 bis 11 zeigt, dass die Maxima und Minima der Intensität anscheinend regellos vertheilt sind, indem sie bald nahe beisammen, bald weit auseinander liegen, und dass überhaupt der Verlauf der Intensitätscurven ein überaus sonderbarer ist.

Um Einsicht in die dennoch vorhandene Gesetzmässigkeit der Erscheinungen zu gewinnen, nehmen wir z als Abscisse, y als Ordinate eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, und denken uns in jedem Punkte der yz-Ebene die zugehörige Lichtstärke M^2 als dritte Coordinate senk-

recht errichtet. So erhebt sich über dieser Ebene gleichsam eine Gebirgslandschaft mit mannigfaltigen Kämmen und Gipfeln, Thälern und Einsenkungen.

Auf der yz-Ebene verzeichnen wir die Linien, welche den Gleichungen $I_1 = o$ und $U_2 = o$ entsprechen (Fig. 12).

Denken wir uns nun in der yz-Ebene eine gerade Linie parallel zur z-Axe gezogen, so geben ihre Schnittpunkte mit den Linien $I_1 = o$ und $U_2 = o$ die Oerter an, wo für den zugehörigen Werth von y die Intensität ein Maximum oder Minimum wird, und eine Ebene, welche durch jene Parallele senkrecht zur yz-Ebene gelegt wird, gibt durch ihren Schnitt mit dem Lichtgebirge die entsprechende Intensitätscurve.

52. Die Linien $I_1(z) = o$ sind nichts anderes als Gerade, welche in den Punkten $z = 3{,}831706$, $z = 7{,}015587$, $z = 10{,}173467$, u. s. f. senkrecht auf der Abscissenaxe errichtet sind (Fig. 12).

Die Linien dagegen, welche der Gleichung:

$$U_2(y, z) = o$$

entsprechen, sind transcendente Curven von höchst merkwürdigem Verlauf.

Um diese Curven zu entwerfen, wurden nicht nur die in den Tabellen III bis XII bereits aufgeführten Wurzeln der Gleichung $U_2 = o$ benutzt, sondern es wurden, wo es nöthig schien, noch weitere Wurzelwerthe berechnet.

Ausserdem wurde für jeden dieser Curvenpunkte die Neigung seiner Berührungslinie gegen die Abscissenaxe bestimmt.

Durch Differentiation der Gleichung $U_2 = o$ erhält man nämlich:

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = o .$$

Nach (16) aber ist:

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_3 ,$$

und nach (22):

$$\frac{\partial U_2}{\partial y} = \tfrac{1}{2} U_1 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3 .$$

Man findet sonach:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \frac{z}{y} U_3}{U_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3} ,$$

oder, da in unseren Tabellen nicht die Werthe der U selbst, sondern diejenigen von $2y^{-1}U$ angegeben sind, für die numerische Rechnung bequemer:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\frac{2z}{y} \cdot \frac{2}{y} U_3}{\frac{2}{y} U_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 \cdot \frac{2}{y} U_3}$$

als Ausdruck für die Tangente jenes Neigungswinkels.

Diese sämmtlichen Daten, welche zur Construction der Curven $U_2 = o$ dienten, sind in Tab. XIII zusammengestellt.

53. Da für $z = o$ offenbar:

$$[V_o]_{z=o} = 1\,, \qquad [V_1]_{z=o} = o$$

ist, so hat man, weil gemäss (18):

$$U_1 + V_1 = \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right),$$

$$-U_2 + V_o = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

ist:

$$[U_1]_{z=o} = \sin\tfrac{1}{2}y\,, \qquad [U_2]_{z=o} = 1 - \cos\tfrac{1}{2}y = 2\sin^2\tfrac{1}{4}y\,.$$

Auf der y-Axe wird also $U_2 = o$, so oft $y = 4m\pi$ ist. Für diese Werthe verschwinden aber auch U_1 und $zy^{-1}U_3$, weil ja:

$$\frac{z}{y} U_3 = I_1 - \frac{z}{y} U_1$$

ist. Man hat daher für diese Werthe sowohl:

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} = o\,,$$

als auch:

$$\frac{\partial U_2}{\partial y} = o\,.$$

Die Punkte $z = o$, $y = 4m\pi$ sind demnach Doppelpunkte der Curve $U_2 = o$.

54. Die Gleichung der Doppeltangenten in diesen Punkten lautet alsdann:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} z'^2 + 2\frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} z'(y' - y) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}(y' - y)^2 = o\,.$$

Nun ist aber allgemein (vermöge 16, 22 und 23):

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = -\frac{z}{y}\frac{\partial U_3}{\partial z} - \frac{1}{y}U_3 = \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_4 - \frac{1}{y}U_3$$

$$= I_2 - \frac{1}{z}I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2 + \frac{1}{y}U_1;$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\tfrac{1}{2}U_1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{z}{y}U_2 + \frac{z}{y}\cdot\frac{1}{y}U_3 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^3 U_4$$

$$= \frac{1}{y}I_1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{z}{y}I_2 - \frac{z}{y}\cdot\frac{1}{y}U_1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{z}{y}U_2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^3 U_2;$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{2}{y}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial y} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2\frac{\partial U_3}{\partial y} + \frac{1}{y}U_1$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}U_0 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2\right) - \frac{2}{y}\left(\tfrac{1}{2}U_1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}U_2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 U_4\right) + \frac{1}{y}U_1$$

$$= \tfrac{1}{4}U_0 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2 - \frac{1}{y}\left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{z}{y}\right)^4 U_4$$

$$= \tfrac{1}{4}I_0 - \frac{z}{y^2}I_1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2 + \frac{1}{y}\left(\frac{z}{y}\right)^2 U_1 - \tfrac{1}{4}U_2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{z}{y}\right)^4 U_2.$$

Hieraus folgt für $z = 0$ und $y = 4m\pi$:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = -\tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \tfrac{1}{4};$$

folglich ist:

$$(y' - 4m\pi)^2 = 2z'^2$$

die Gleichung der beiden Tangenten in jenen Doppelpunkten; die zwei Winkel φ, welche sie mit der z-Axe bilden, und die für alle Doppelpunkte die nämlichen sind, werden bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{2},$$

und betragen:

$$\varphi = \pm 54^\circ\, 44'\, 8'',2.$$

55. Da der Ausdruck $U_2(y, z)$ in die beiden Factoren:

$$y^2 \text{ und } \frac{1}{z^2}I_2 - \frac{y^2}{z^4}I_4 + \frac{y^4}{z^6}I_6 - + \ldots = \frac{1}{y^2}U_2$$

sich zerlegen lässt, so zerfällt die Curve $U_2 = 0$ einerseits in zwei aufeinanderliegende mit der z-Axe zusammenfallende Gerade, entsprechend der Gleichung:

$$y^2 = 0 ,$$

und die durch die Gleichung:

$$\frac{1}{y^2} U_2 = 0$$

ausgedrückten transcendenten Curvenäste andrerseits. Letztere schneiden die z-Axe in den Punkten, welche der Gleichung $I_2 = 0$ genügen, nämlich bei:

$$z = 5{,}135630 ,$$
$$z = 8{,}417236 ,$$
$$z = 11{,}619857 ,$$
$$\text{u. s. f.},$$

d. i. in den Punkten, wo im Fraunhofer'schen Grenzfall die Intensitätsmaxima liegen. Diese Schnittpunkte der transcendenten Curvenäste mit der z-Axe sind sonach dreifache Punkte der Gesammtcurve $U_2 = 0$.

Nun wird die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie an der Curve $y^{-2} U_2 = 0$ mit der z-Axe einschliesst, gefunden durch die Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\frac{\partial (y^{-2} U_2)}{\partial z}}{\frac{\partial (y^{-2} U_2)}{\partial y}} .$$

Da nun:

$$\frac{\partial (y^{-2} U_2)}{\partial z} = -\frac{z}{y^3} U_3 ,$$

und:

$$\frac{\partial (y^{-2} U_2)}{\partial y} = -\frac{2y}{z^4} I_4 + \frac{4y^3}{z^6} I_6 - + \ldots ,$$

sonach für $y = 0$:

$$\left[\frac{\partial (y^{-2} U_2)}{\partial z}\right]_{y=0} = -z^{-2} I_3 ,$$

und:

$$\left[\frac{\partial (y^{-2} U_2)}{\partial y}\right]_{y=0} = 0$$

ist, so ergibt sich, da I_3 nicht gleichzeitig mit I_2 verschwinden kann:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial z}\right]_{y=0} = \infty .$$

Die transcendenten Curvenzweige schneiden also die z-Axe rechtwinklig.

Wie ein Blick auf Fig. 12 erkennen lässt, laufen diese Curvenzweige, welche sich zuerst von den dreifachen Punkten der Abscissenaxe, wo sie von den Geraden $I_2 = o$ berührt werden, senkrecht erheben, paarweise in den Doppelpunkten der Ordinatenaxe zusammen.

56. Die Doppelpunkte auf der y-Axe und die Punkte $I_1 = o$ auf der z-Axe sind die einzigen Punkte, in welchen U_1 und U_2 gleichzeitig verschwinden, und die Intensität sonach Null ist. Denn überall sonst, wo $U_2 = o$ ist, ist wegen:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_2 .$$

gleichzeitig $(U_1)^2$ nicht Null, sondern ein Maximum.

57. Um zu ermitteln, welche von den Wurzelwerthen der Gleichungen $I_1 = o$ und $U_2 = o$ Maximis oder Minimis der Lichtstärke entsprechen, bilden wir den zweiten Differentialquotienten von M^2 nach z, und erhalten zunächst:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2} = -2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(I_1 \frac{\partial U_2}{\partial z} + U_2 \frac{\partial I_1}{\partial z}\right),$$

oder, da:

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_3 = -I_1 + \frac{z}{y} U_1$$

und:

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} = -\frac{1}{z} I_1 + I_o$$

ist:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2} = 2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(\frac{z}{y} I_1 U_3 + \frac{1}{z} I_1 U_2 - I_o U_2\right)$$

$$= 2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(I_1^2 - \frac{z}{y} I_1 U_1 - I_o U_2 + \frac{1}{z} I_1 U_2\right).$$

Hieraus ergibt sich, dass auf den Geraden $I_1 = o$ Maxima oder Minima liegen, je nachdem:

$$I_o U_2$$

positiv oder negativ ist.

Ueber den Curven $U_2 = o$ dagegen treten Maxima oder Minima auf, wenn

$$I_1 U_3$$

oder, was dasselbe heisst:

$$I_1 \left(I_1 - \frac{z}{y} U_1 \right)$$

negativ oder positiv ist.

58. Der zweite Differentialquotient von M^2 wird Null für diejenigen Werthe von y und z, welche gleichzeitig den Gleichungen $I_1 = o$ und $U_2 = o$ genügen. Da in diesem Falle der dritte Differentialquotient von M^2, nämlich:

$$\frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3} = 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(I_1 U_2 - \frac{1}{z} I_2 U_2 + \frac{2z}{y} I_o U_3 - \frac{1}{y} I_1 U_3 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_1 U_4 \right)$$

$$= 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(3 I_1 \left(I_o - \frac{1}{z} I_1 \right) + \left(\frac{1}{y} I_1 - \frac{2z}{y} I_o \right) U_1 + \left(\left[\frac{z^2}{y^2} - \frac{2}{z^2} + 1 \right] I_1 + \frac{1}{z} I_o \right) U_2 \right)$$

nicht verschwindet, sondern den von Null nothwendig verschiedenen Werth:

$$\left[\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^3} \right] = 2 \cdot \left(\frac{2}{y}\right)^2 \cdot \frac{2z}{y} I_o U_3 = -2 \cdot \left(\frac{2}{y}\right)^2 \cdot \frac{2z}{y} I_o U_1$$

annimmt, so erkennt man, dass über den Durchschnittspunkten der beiden Liniensysteme $I_1 = o$ und $U_2 = o$ Wendepunkte der Intensitätscurve liegen.

59. Da, wenn man längs einer Geraden $I_1 = o$ über einen ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve $U_2 = o$ weggeht, das Vorzeichen von U_2 wechselt, nicht aber dasjenige von I_o, so wechselt hier auch das Vorzeichen des Ausdrucks:

$$I_o U_2 ,$$

durch welches gemäss (57) die Maximalwerthe der Intensität sich von den Minimalwerthen unterscheiden. Liegen also über dieser Geraden diesseits ihres Schnittpunktes mit der Curve $U_2 = o$ Maxima der Lichtstärke, so liegen jenseits Minima.

Ueberschreitet man ferner längs einer Curve $U_2 = o$ einen ihrer Schnittpunkte mit einer der Geraden $I_1 = o$, so wechselt das Vorzeichen von I_1, nicht aber dasjenige von U_3, weil für $I_1 = o$:

$$U_3 = - U_1$$

und U_1 wegen $U_2 = 0$ ein Maximum oder Minimum ist. Es tritt demnach in dem Schnittpunkt auch ein Zeichenwechsel des Ausdrucks:

$$I_1 U_3$$

ein, der in diesem Falle durch sein Vorzeichen zwischen Maximis und Minimis entscheidet (57), und es findet auch hier ein Uebergang von grössten zu kleinsten Werthen der Lichtstärke, oder umgekehrt, statt.

Schreitet man also längs einem Theile der Linien $I_1 = 0$ oder $U_2 = 0$, welchem z. B. Intensitätsmaxima entsprechen, über einen ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte fort, so springt hier das Maximum auf die Linie der anderen Gattung über, und der Fortsetzung der bisher verfolgten Linie gehören von nun an Minima der Lichtstärke an, bis beim nächsten Schnittpunkt ein neues Ueberspringen erfolgt.

60. Der zweite Differentialquotient der Intensität wird ferner Null, wenn nebst U_2 auch noch $U_3 = 0$, nicht aber $U_1 = 0$ (welch letzteres übrigens nur in den Doppelpunkten der y-Axe und den Punkten $I_1 = 0$ der z-Axe eintreten kann) ist. Da alsdann:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2\frac{z}{y}U_3}{U_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3} = 0$$

ist, so findet dies statt in den Punkten, wo die Ordinaten der Curvenäste $U_2 = 0$ ihre grössten oder kleinsten Werthe erreichen.

Auch diesen Punkten entsprechen, da für $U_2 = 0$ und $U_3 = 0$ der dritte Differentialquotient von M^2 nicht verschwindet, sondern den Werth

$$-2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(\frac{z}{y}\right)^2 I_1 U_4 = -2\left(\frac{2}{y}\right)^2 I_1 I_2$$

annimmt, Wendepunkte der Intensitätscurve.

Da an diesen Punkten U_3 sein Vorzeichen ändert, I_1 aber nicht, weil ja für $U_3 = 0$:

$$I_1 = \frac{z}{y} U_1$$

und U_1 Maximum oder Minimum ist, so erleidet hier der Ausdruck $I_1 U_3$, dessen Vorzeichen für Maximum oder Minimum entscheidend ist, ebenfalls einen Zeichenwechsel. Die Punkte der transcendenten Curven-

äste, wo sich diese am höchsten über die Abscissenaxe erheben, oder am tiefsten zu ihr herabsenken, bilden also auf diesen Curven selbst eine Grenzscheide zwischen Intensitäts-Maximis und -Minimis.

In der Figur 12 sind vier solche Punkte wahrzunehmen, ein Gipfelpunkt bei dem ersten im Punkt $y = 4\pi$ der Ordinatenaxe zusammenlaufenden Aestepaar, zwei Gipfel und eine Senkung bei dem zweiten Aestepaar, welches im Punkte $y = 8\pi$ sich vereinigt.

61. Der zweite Differentialquotient von M^2 wird endlich noch Null in den Doppelpunkten der Ordinatenaxe ($z = o$, $y = 4m\pi$), weil hier I_1, U_1, U_2 und U_3 gleichzeitig verschwinden. Da in diesem Falle auch der dritte Differentialquotient (s. oben 58) Null wird, nicht aber der vierte:

$$\frac{\partial^4 M^2}{\partial z^4} = 2\cdot\left(\frac{2}{y}\right)^2\left\{3\,I_1\frac{\partial}{\partial z}\left(I_o - \frac{1}{z}I_1\right) + 3\left(I_o - \frac{1}{z}I_1\right)^2 + U_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y}I_1 - \frac{2z}{y}I_o\right)\right.$$
$$-\frac{z}{y}\left(\frac{1}{y}I_1 - \frac{2z}{y}I_o\right)U_2 + U_2\frac{\partial}{\partial z}\left(\left[\left(\frac{z}{y}\right)^2 - \frac{2}{z^2} + 1\right]I_1 + \frac{1}{z}I_o\right)$$
$$\left.-\frac{z}{y}\left(\left[\left(\frac{z}{y}\right)^2 - \frac{2}{z^2} + 1\right]I_1 + \frac{1}{z}I_o\right)U_3\right\},$$

welcher vielmehr den positiven Werth:

$$\left[\frac{\partial^4 M^2}{\partial z^4}\right] = \frac{3}{2m^2\pi^2}$$

annimmt, so finden hier Minima statt; es ist nämlich in diesen Punkten $M^2 = o$.

62. Uebrigens genügen sämmtliche Punkte der y-Axe, weil $I_1 = o$ ist für $z = o$, der Bedingung:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = o\,;$$

da alsdann:

$$\left[\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2}\right] = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{4}y}{\frac{1}{4}y}\right)^2$$

wird und sonach einen negativen Werth annimmt, so liegen über der Ordinatenaxe, mit Ausnahme der Doppelpunkte, lauter Intensitätsmaxima.

63. Um den Ueberblick über die Orte der Intensitätsmaxima und -Minima zu erleichtern, sind in Fig. 12 die Stücke der Linien $I_1 = o$

und $U_2 = o$, welche den Minimis der Lichtstärke entsprechen, stärker ausgezogen als diejenigen, über welchen die Maxima liegen.

Es gestaltet sich hiedurch ein Bild mit so sonderbaren und eigenartigen Umrissen, wie selbst die lebhafteste Phantasie sie nicht zu ersinnen vermöchte. Dieses Bild versinnlicht in anschaulicher Weise die verwickelten Gesetze dieser Erscheinungen. Denn denkt man sich eine zur z-Axe parallele Gerade über die Figur hingleitend, die durch ihre Schnittpunkte mit den Linien $I_1 = o$ und $U_2 = o$ die Orte der Maxima und Minima der Lichtstärke angibt, und vergegenwärtigt sich zugleich die in den Figuren 1 bis 12 dargestellten Intensitätscurven sammt ihren Zwischenstufen, so übersieht man die ganze Reihenfolge von wechselnden Formen und Schattirungen, deren unerschöpfliche Mannigfaltigkeit den Beobachter in Staunen setzt.

64. Da

$$U_2 = V_o - \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

$$= I_o - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2 + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4 - + \ldots - \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

ist, so kommt der Ausdruck:

$$I_o - \cos\tfrac{1}{2}y$$

der Function U_2 um so näher, je grösser y bei gleichbleibendem z, oder je kleiner z bei unverändertem y wird. Unter diesen Umständen kann daher die Gleichung der Curve $U_2 = o$ durch die einfachere Gleichung:

$$u_2 = I_o(z) - \cos\tfrac{1}{2}y = o$$

näherungsweise ersetzt werden. Diese letztere Curve besitzt auf der y-Axe die nämlichen Doppelpunkte mit denselben Doppeltangenten wie die Curve $U_2 = o$ selbst. Denn man hat:

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = -I_1, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}y,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \frac{1}{z}I_1 - I_o, \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y\,\partial z} = o, \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}y,$$

und erkennt, dass für $z = o$ und $y = 4m\pi$ sowohl $\partial u_2/\partial z$ als $\partial u_2/\partial y$ verschwindet, und die Gleichung der Doppeltangenten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} z'^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} z'(y' - y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (y' - y)^2 = o$$

dieselbe Form wie oben, nämlich:

$$(y' - 4m\pi)^2 = 2z'^2$$

annimmt.

65. Lassen wir hingegen y stets kleiner werden, oder z immer wachsen, so nähern sich die Reihen $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$ immer mehr ihren ersten Gliedern:

$$\frac{2}{z} I_1, \quad \text{und} \quad 2\frac{y}{z^2} I_2,$$

und man sieht, dass die transcendenten Zweige der Curve $U_2 = o$ mit wachsendem z, oder mit abnehmendem y, den geraden Linien:

$$I_2 = o,$$

von welchen sie auf der z-Axe berührt werden, immer näher kommen.

Für jeden gegebenen Werth von y nähern sich übrigens mit wachsendem z, d. i. mit wachsendem Beugungswinkel, beide Functionen $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$, und mit ihnen die Lichtstärke M^2 der Grenze Null.

66. Wir denken uns jetzt in der yz-Ebene durch den Coordinatenanfang gerade Linien gezogen, und betrachten die Lichterscheinungen, welche längs einer solchen Geraden nach und nach stattfinden, wenn man den Auffangschirm aus der accommodirten Stellung ($y = o$) in die nicht accommodirten überführt.

Bildet eine beliebige dieser Geraden mit der z-Axe den Winkel α, so lautet ihre Gleichung:

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tg}\alpha = c.$$

Diejenige Gerade hingegen, welche mit der y-Axe den Winkel α, mit der z-Axe also den Winkel $90° - \alpha$ bildet, und welche wir als zu ersterer coordinirt bezeichnen wollen, entspricht der Gleichung:

$$\frac{y}{z} = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{c}.$$

Für irgend einen Punkt der ersteren Geraden haben wir nun:

$$U_1 = cI_1 - c^3I_3 + c^5I_5 - + \ldots$$

$$= \sin \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(\frac{1}{c} I_1 - \frac{1}{c^3} I_3 + \frac{1}{c^5} I_5 - + \ldots\right),$$

$$U_2 = c^2I_2 - c^4I_4 + c^6I_6 - + \ldots$$

$$= -\cos \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right) + \left(I_0 - \frac{1}{c^2} I_2 + \frac{1}{c^4} I_4 - + \ldots\right),$$

und für den zu demselben Werthe von z gehörigen Punkt der zweiten Geraden, indem man c mit $\frac{1}{c}$ vertauscht:

$$U'_1 = \frac{1}{c} I_1 - \frac{1}{c^3} I_3 + \frac{1}{c^5} I_5 - + \ldots$$

$$= \sin \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(cI_1 - c^3I_3 + c^5I_5 - + \ldots\right),$$

$$U'_2 = \frac{1}{c^2} I_2 - \frac{1}{c^4} I_4 + \frac{1}{c^6} I_6 - + \ldots$$

$$= -\cos \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right) + \left(I_0 - c^2I_2 + c^4 I_4 - + \ldots\right).$$

Hienach bestehen zwischen Functionswerthen U_1 und U'_1, U_2 und U'_2, welche auf zwei coordinirten Geraden zu demselben Werthe von z gehören, die Beziehungen:

$$U_1 + U'_1 = \sin \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right),$$

$$U_2 + U'_2 = I_0 - \cos \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right).$$

67. Bezeichnen wir, wie oben bereits geschehen ist, den Abstand eines beliebigen Bildpunktes von der Bildmitte mit ζ, und den Radius des geometrischen Schattens mit ζ_0, so ist offenbar:

$$\zeta_0 = \frac{a + b}{a} r .$$

Allgemein aber ist (vermöge 6):

$$\frac{y}{z} = \frac{a + b}{a} \cdot \frac{r}{\zeta} .$$

Hieraus folgt:

$$\frac{y}{z} = \frac{\zeta_0}{\zeta} = c.$$

Liegt ein anderer Punkt des nämlichen Beugungsbildes, dessen Entfernung von der Mitte ζ' ist, auf der coordinirten Geraden, so ist für ihn:

$$\frac{y}{z'} = \frac{\zeta_0}{\zeta'} = \frac{1}{c}.$$

Für diese beiden Punkte gilt demnach die Beziehung:

$$\zeta\zeta' = \zeta_0^2.$$

Gehören also zwei Punkte des Beugungsbildes coordinirten Geraden an, was wir dadurch bezeichnen wollen, dass wir sie „zu einander coordinirt“ nennen, so ist der Radius der Schattengrenze die mittlere geometrische Proportionale zwischen ihren Abständen von der Bildmitte.

68. Unter den Geraden $y = cz$ sind insbesondere drei von hervorragender Bedeutung, und namentlich dadurch ausgezeichnet, dass sich die Lichtstärke auf ihnen durch geschlossene Ausdrücke darstellen lässt; nämlich erstens die Abscissenaxe ($y = 0$), welche dem im vorigen Abschnitt behandelten Fraunhofer'schen Grenzfall entspricht; zweitens die (zu ihr coordinirte) Ordinatenaxe ($z = 0$), längs welcher die Intensitäten der Bildmitte gereiht sind; drittens die (zu sich selbst coordinirte) Gerade $y = z$, welche unter 45° zu den Coordinatenaxen geneigt ist, und die Grenze des geometrischen Schattens darstellt. Sie ist in Fig. 12 punktirt eingezeichnet.

Dieser letztere Fall kommt zu den beiden ersteren, deren geschlossene Intensitätsausdrücke schon früher bekannt waren, hier als neu hinzu.

69. Obwohl der zweite Fall, wie schon Eingangs erwähnt wurde, sowohl theoretisch als experimentell bereits erledigt ist, so mag derselbe doch der Vollständigkeit und des Zusammenhangs wegen auch hier nochmals kurz besprochen werden.

Für $z = 0$ haben wir (s. oben 53):

$$[U_1]_{z=0} = \sin\tfrac{1}{2}y, \qquad [U_2]_{z=0} = 2\sin^2\tfrac{1}{4}y,$$

und demnach:

$$M^2 = \left(\frac{\sin\frac{1}{4}y}{\frac{1}{4}y}\right)^2.$$

Die successiven Intensitäten im Mittelpunkte der Beugungsbilder einer kreisförmigen Oeffnung befolgen also das nämliche Gesetz wie die simultanen Intensitäten der durch einen geradlinigen Spalt hervorgebrachten Diffractionsstreifen. Die für letztere (z. B. von Schwerd) berechneten Tabellen können also unmittelbar auch für diese Erscheinung angewendet werden.

Die Minima dieses Ausdrucks, welche Null sind und auf die oben besprochenen Doppelpunkte der Curve $U_2 = 0$ fallen, finden statt, wenn:

$$\tfrac{1}{4}y = m\pi, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{r^2}{2} = m\lambda$$

ist, d. h. wenn der Gangunterschied zwischen Rand- und Centralstrahl eine Anzahl ganzer Wellenlängen ausmacht.

Die Maxima treten ein für die Werthe von y, welche der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}y = \tfrac{1}{4}y$$

genügen; dieselben sind, sammt den zugehörigen Werthen der Lichtstärke in der kleinen Tabelle XIV angegeben. Sie nähern sich mit wachsendem y immer mehr den Werthen:

$$\tfrac{1}{4}y = \frac{2m+3}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{r^2}{2} = \frac{2m+3}{2}\lambda,$$

bei welchen der Wegunterschied zwischen Randstrahl und Centralstrahl eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt. Die entsprechenden Maximalintensitäten betragen etwa das Vierfache von derjenigen $(4/y^2)$, welche die unversehrte Welle hervorbringen würde.

Fresnel und später Abria[1]) haben diese Ergebnisse der Theorie durch Beobachtungen mit weissem Lichte geprüft. Aus obigem Intensitätsausdruck wurde die Lichtstärke für die einzelnen Hauptfarben berechnet, nach Newton's Regel die Mischfarbe bestimmt, und das Resultat mit dem bei der betreffenden Einstellung im Mittelpunkte des Beugungsbildes wahrgenommenen Farbenton verglichen. Es ergab sich auf diese Weise eine sehr befriedigende Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung.

70. Die Gerade $y = z$, welche die Grenze des geometrischen Schattens darstellt, so dass alle Punkte der yz-Ebene, welche zwischen ihr und der

---

1) Abria, Journal de Math. de Liouville, IV, p. 248. 1838.

z-Axe liegen, in die Schattenregion fallen, ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre Punkte zu sich selbst coordinirt sind.

Aus den obigen für die Punkte coordinirter Geraden allgemein giltigen Relationen (66) ergeben sich in diesem Falle (für $c = 1$) die übrigens aus (14) bereits bekannten Formeln:

$$U_1(z, z) = \tfrac{1}{2} \sin z,$$
$$U_2(z, z) = \tfrac{1}{2}(I_0 - \cos z),$$

und hieraus die Lichtstärke längs der Schattengrenze:

$$M^2 = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 + \left(\frac{I_0 - \cos z}{z}\right)^2.$$

Dieselbe kann, wie man sieht (und wie übrigens aus 56 bereits bekannt ist) niemals Null werden. Denn hiezu wäre erforderlich, dass $\sin z$ und $I_0 - \cos z$ gleichzeitig verschwinden, oder dass $I_0 = \pm 1$ würde, was unmöglich ist, da der absolute Werth von I_0 (ausser für $z = 0$) stets kleiner ist als die Einheit.

Die Werthe von $2z^{-1} U_1(z, z)$, $2z^{-1} U_2(z, z)$ und M^2 sind in der Tab. XV für die Werthe des Arguments von $z = 0$ bis $z = 12$ mit dem Incremente 0,5 berechnet und in Fig. 13 von $z = 2{,}5$ an graphisch dargestellt.

In den Fig. 2, 3 und 4 ist die Grenze des geometrischen Schattens durch eine punktirte Ordinate angedeutet.

71. Aus dem Verlaufe der transcendenten Curvenzweige:

$$y^{-2} U_2 = 0$$

(Fig. 12) ist ersichtlich, dass entlang denselben innerhalb des Schattengebietes, d. i. für $y < z$, die Function:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2\frac{z}{y} U_3}{U_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3}$$

stets negativ bleibt.

Längs einer der Geraden $I_1 = 0$ aber nimmt dieser Ausdruck, da hier:

$$U_3 = -U_1$$

ist, die Form:

$$-\frac{2\frac{z}{y}}{1 - \left(\frac{z}{y}\right)^2}$$

an, und ist demnach positiv, solange $y<z$ ist. Schnittpunkte jener transcendenten Curvenäste mit den Geraden $I_1 = o$ können also innerhalb des Schattenraumes, wo $y<z$ ist, nicht eintreten, und ebensowenig kann hier $\partial y/\partial z$ Null werden. Von den Stellen, an welchen die Intensitätscurven Wendepunkte besitzen, liegt also keine innerhalb des geometrischen Schattens, sondern sämmtliche befinden sich in dem von directen Strahlen erleuchteten Gebiete.

V. Abschnitt.

Beugungserscheinungen eines kreisrunden undurchsichtigen Schirmchens.

72. In diesem Falle hat man die Integrale C und S (5) über den ganzen von dem Schirmchen nicht verdeckten Theil der Welle auszudehnen, oder von den Integralen, welche der Gesammtwelle entsprechen, die von o bis r, wo r den Radius des kreisförmigen Schirmchens bedeutet, genommenen abzuziehen.

Die obere Grenze der Integrale für die Gesammtwelle ist im Vergleiche zu r als sehr gross anzusehen. Obgleich nun unsere Ausdrücke unter der Voraussetzung abgeleitet sind, dass es sich nur um Theile der Welle handle, welche dem Pole derselben nahe liegen, so kann man doch, weil die Elemente der Integrale mit wachsendem Argumente rasch abnehmen und die späteren daher zum Werthe derselben nichts Erhebliches beitragen, auch weitere Grenzen zulassen. Ja man kann sogar aus diesem Grunde die oberen Grenzen unendlich gross annehmen.

Wir erhalten hienach für die Gesammtwelle (gemäss 30):

$$C_\infty = 2\pi \int_o^\infty I_o(l\varrho)\cos(\tfrac{1}{2}k\varrho^2).\varrho d\varrho = \pi \cdot \frac{2}{k}\sin\frac{l^2}{2k},$$

$$S_\infty = 2\pi \int_o^\infty I_o(l\varrho)\sin(\tfrac{1}{2}k\varrho^2).\varrho d\varrho = \pi \cdot \frac{2}{k}\cos\frac{l^2}{2k}.$$

Um hieraus die wirkliche Intensität in irgend einem Punkte der vollständigen Welle zu erhalten, ist zu berücksichtigen, dass diesen Com-

ponenten der Vibrationsintensität (zufolge 3) noch der Factor 1/ab beizufügen ist. Darin ergibt sich die Intensität des vollen Lichts der unverdeckten Welle:

$$\frac{1}{a^2b^2}(C_\infty^2 + S_\infty^2) = \frac{\pi^2}{a^2b^2}\left(\frac{2}{k}\right)^2 = \frac{\pi^2}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2b^2\lambda^2}{\pi^2(a+b)^2} = \frac{\lambda^2}{(a+b)^2}.$$

Messen wir dagegen lieber nach dem bisher angewendeten Masse, unter Weglassung des Nenners a^2b^2, so wird dieselbe ausgedrückt durch:

$$(\pi r^2)^2\left(\frac{2}{kr^2}\right)^2,$$

oder, wenn wir den Flächeninhalt πr^2 des Schirmchens, wie vorher den der kreisförmigen Oeffnung, der Einheit gleichsetzen, durch:

$$C_\infty^2 + S_\infty^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2.$$

73. Die Integrale, welche die Wirkung des kreisförmigen undurchsichtigen Schirmchens darstellen, gestalten sich alsdann (mit Rücksicht auf 9) wie folgt:

$$C_1 = C_\infty - C_r = \pi\frac{2}{k}\sin\frac{l^2}{2k} - \left(\pi\frac{2}{k}\sin\frac{l^2}{2k} + \pi r^2\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}V_0 - \pi r^2\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}V_1\right),$$

$$S_1 = S_\infty - S_r = \pi\frac{2}{k}\cos\frac{l^2}{2k} - \left(\pi\frac{2}{k}\cos\frac{l^2}{2k} - \pi r^2\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}V_0 - \pi r^2\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}V_1\right),$$

oder wenn, wie bereits erwähnt, der Flächeninhalt des Schirmchens gleich 1 angenommen wird:

$$C_1 = -\frac{2}{y}(V_0\sin\tfrac{1}{2}y - V_1\cos\tfrac{1}{2}y),$$

$$S_1 = \frac{2}{y}(V_0\cos\tfrac{1}{2}y + V_1\sin\tfrac{1}{2}y).$$

Hieraus folgt als Ausdruck für die Lichtstärke des Beugungsbildes:

$$M_1^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2(V_0^2 + V_1^2),$$

oder, wenn wir die U- statt der V-Functionen einführen:

$$M_1^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2\left(1 + U_1^2 + U_2^2 - 2U_1\sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) + 2U_2\cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)\right).$$

Der Intensitätsausdruck für die kreisförmige Oeffnung verwandelt sich also in denjenigen für das kreisförmige Schirmchen, wenn man U_1 mit V_1 und U_2 mit $-V_0$ vertauscht.

74. Für $z = 0$ hat man:

$$V_0 = 1\,, \qquad V_1 = 0\,,$$

folglich:

$$[M_1^2]_{z=0} = \left(\frac{2}{y}\right)^2.$$

d. h. die Lichtstärke in jedem Punkte der Axe des geometrischen Schattens ist immer gleich der Lichtstärke der vollen Welle, als wenn das beugende Schirmchen gar nicht vorhanden wäre.

75. Da die numerischen Werthe von V_0 und V_1 aus dem vorhergehenden Abschnitt entweder direct berechnet vorliegen, oder mittels der Gleichungen:

$$V = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) + U_2,$$

$$V_1 = \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) - U_1$$

aus den direct berechneten Werthen von U_1 und U_2 leicht abzuleiten sind, so lassen sich Tafeln dieser Functionen (oder vielmehr der Functionen $2y^{-1}V_0$ und $2y^{-1}V_1$) sowie der Lichtstärke M_1^2, wie sie in den Tab. XVI bis XXIII von $y = \pi$ bis $y = 8\pi$ gegeben sind, ohne erhebliche neue Mühe entwerfen. Eine weitere Ausdehnung der Tafeln auf grössere Werthe von y erschien nicht nothwendig, da sich der Gang der Intensitäten, welcher im gegenwärtigen Fall überhaupt weit einförmiger ist als bei der kreisförmigen Oeffnung, weiterhin leicht übersehen lässt.

In den Fig. 14 bis 19 ist dieser Gang für $y = \pi$ bis $y = 6\pi$ graphisch dargestellt, und zwar ist $10\,M_1^2$ für $y = \pi$, $100\,M_1^2$ für $y = 2\pi$ bis $y = 4\pi$, $1000\,M_1^2$ für $y = 5\pi$ und $y = 6\pi$ als Ordinate aufgetragen.

Da U_1 und U_2 mit wachsendem z gegen Null rücken, so nähern sich gleichzeitig, wie aus obigen Gleichungen ersichtlich ist, V_0 und V_1 immer mehr den Werthen:

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) \text{ und } \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

und die Lichtstärke selbst dem Werthe:

$$[M_1^2]_{z=\infty} = \left(\frac{2}{y}\right)^2.$$

Die Ringe verlieren sich also mit wachsendem Beugungswinkel zuletzt in der vollen Beleuchtung.

76. Die Intensität M_1^2 erreicht ein Maximum oder Minimum, wenn:

$$\frac{\partial M_1^2}{\partial z} = 2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(V_0\frac{\partial V_0}{\partial z} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial z}\right) = 0$$

ist. Nun hat man aber (zufolge 17):

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{z}{y}V_{-1} \text{ und } \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{z}{y}V_0,$$

und demnach:

$$\frac{\partial M_1^2}{\partial z} = \frac{2z}{y}\left(\frac{2}{y}\right)^2 V_0(V_{-1} + V_1),$$

oder, da nach (15):

$$V_{-1} + V_1 = -\frac{y}{z}I_1$$

ist:

$$\frac{\partial M_1^2}{\partial z} = -2\left(\frac{2}{y}\right)^2 I_1 V_0.$$

Die Lichtstärke wird also zu einem Maximum oder Minimum, wenn entweder $I_1 = 0$ oder wenn $V_0 = 0$ ist.

Da

$$I_1 = -\frac{\partial I_0}{\partial z} \text{ und } V_0 = \frac{y}{z}\frac{\partial V_1}{\partial z}$$

ist, so kann man auch sagen, dass M_1^2 ein Maximum oder Minimum wird, wenn entweder I_0 oder V_1 zu einem Maximum oder Minimum werden.

77. Also auch im gegenwärtigen Fall sind es unter anderen wieder die aus dem Vorhergehenden genugsam bekannten Wurzelwerthe der Gleichung $I_1 = 0$, welchen Maxima oder Minima der Lichtstärke entsprechen.

Um die zugehörigen Werthe der Functionen $2y^{-1}V_0$ und $2y^{-1}V_1$ zu berechnen, dient ein Verfahren, welches dem oben hinsichtlich der U-Functionen angewendeten vollkommen analog ist. Zufolge (21) haben wir nämlich:

$$\frac{2}{y}V_o(y, z+\varepsilon) = \frac{2}{y}V_o + \frac{h}{2y}\cdot\frac{2}{y}V_{-1} + \left(\frac{h}{2y}\right)^2\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{y}V_{-2} + \left(\frac{h}{2y}\right)^3\frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{y}V_{-3} + \ldots,$$

$$\frac{2}{y}V_1(y, z+\varepsilon) = \frac{2}{y}V_1 + \frac{h}{2y}\cdot\frac{2}{y}V_o + \left(\frac{h}{2y}\right)^2\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{y}V_{-1} + \left(\frac{h}{2y}\right)^3\frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{y}V_{-2} + \ldots,$$

wo wiederum:

$$h = 2\varepsilon z + \varepsilon^2$$

ist, und die Coefficienten der Reihen aus den nächstgelegenen tabellarischen Werthen von $2y^{-1}V_o$ und $2y^{-1}V_1$ durch successive Anwendung der Gleichung (15):

$$V_{-n} + V_{-n+2} = (-1)^n\left(\frac{y}{z}\right)^n I_n$$

leicht zu bestimmen sind.

Die erstere der beiden obigen Reihen dient auch dazu, die Wurzelwerthe der Gleichung $V_o = o$ zu ermitteln, indem man $V_o(y, z+\varepsilon) = o$ setzt, worauf die zugehörigen Werthe von $2y^{-1}V_1$ mittels der zweiten Reihe berechnet werden.

Die Zahlenwerthe von z, für welche die Lichtstärke ein Maximum oder Minimum erreicht, sind nebst diesen extremen Lichtstärken selbst am Fusse der Tabellen XVI bis XXIII aufgeführt.

78. Um den Ueberblick über die Erscheinungen zu erleichtern, entwerfen wir, analog wie im vorigen Fall, auf der yz-Ebene sowohl die durch die Gleichung $I_1 = o$ ausgedrückten Geraden, als auch die transscendenten Curven $V_o = o$ (Fig. 20).

Zur Construction der letzteren wurden, wie im vorigen Abschnitt bei den Curven $U_2 = o$, auch die Winkel zu Hilfe genommen, welche die Berührungslinien in jedem berechneten Curvenpunkte mit der Abscissenaxe einschliessen. Aus der Gleichung $V_o = o$ folgt nämlich:

$$\frac{\partial V_o}{\partial z} + \frac{\partial V_o}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = o\,,$$

und hieraus, da (nach 17):

$$\frac{\partial V_o}{\partial z} = \frac{z}{y}V_{-1}$$

und (nach 22):

$$\frac{\partial V_o}{\partial y} = -\tfrac{1}{2}V_1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{-1}$$

ist:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \cdot \frac{z}{y} V_{-1}}{V_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{-1}},$$

oder, mit Rücksicht auf unsere Tabellen für die numerische Rechnung bequemer:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \frac{z}{y} \cdot \frac{2}{y} V_{-1}}{\frac{2}{y} V_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 \frac{2}{y} V_{-1}}.$$

Die zusammengehörigen Werthe von y, z und

$$\operatorname{arctg} \frac{\partial y}{\partial z},$$

welche der Construction der Fig. 20 zu Grunde liegen, finden sich in der Tab. XXIV vereinigt.

79. Da:

$$\frac{z}{y} V_{-1} = -I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_3 - + \ldots$$

mit wachsendem y sich dem Werthe $-I_1$ nähert, während:

$$V_1 = \frac{z}{y} I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3 + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5 - + \ldots$$

und:

$$\left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{-1} = -\frac{z}{y} I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_3 - + \ldots$$

verschwinden, so wird:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \infty$$

für $y = \infty$, d. h. die Aeste der Curve $V_0 = 0$ nähern sich mit wachsendem y dem Parallelismus mit der y-Axe.

Da ferner:

$$V_0 = I_0 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2 + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4 - + \ldots$$

mit wachsendem y der Function I_0 unaufhörlich näher rückt, so sind die zur y-Axe parallelen Geraden, deren Abscissen der Gleichung:

$$I_0 = 0$$

genügen, Asymptoten jener Curvenäste. Die Wurzelwerthe dieser Gleichung aber sind:

$$\begin{aligned} z = \ & 2{,}405 \\ & 5{,}520 \\ & 8{,}654 \\ & 11{,}792 \\ & 14{,}931 \\ & 18{,}071 \\ & \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Da I_o mit wachsendem z sich dem Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos\left(z - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

nähert, so kommen diese Wurzeln den Werthen:

$$z = (m + \tfrac{3}{4})\pi$$

um so näher, je grösser z wird.

In der Fig. 20 sind diese Asymptoten punktirt angegeben; sie gewähren die Möglichkeit, den ferneren Verlauf der Curvenzweige $V_o = o$ in der Richtung der wachsenden y auch über den Rahmen der Zeichnung hinaus zu übersehen.

80. In der Gleichung (10, 18):

$$V_o - U_2 = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

wird der Cosinus zur Rechten gleich Null, wenn:

$$\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} = \frac{2m+1}{2}\pi,$$

oder:

$$y^2 + z^2 = (2m+1)\pi y$$

ist. Diese Gleichung stellt aber eine Schaar von Kreisen dar, welche von den Punkten:

$$y = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \tfrac{3}{2}\pi, \quad \tfrac{5}{2}\pi, \quad \ldots \quad \frac{2m+1}{2}\pi, \quad \ldots$$

der y-Axe aus resp. mit den Halbmessern

$$\tfrac{1}{2}\pi, \quad \tfrac{3}{2}\pi, \quad \tfrac{5}{2}\pi, \quad \ldots \quad \frac{2m+1}{2}\pi, \quad \ldots$$

beschrieben sind, und daher sämmtlich durch den Coordinatenanfang gehen.

Längs dieser Kreislinien ist immer:

$$V_0 = U_2,$$

und man sieht insbesondere, dass jeder Punkt, in welchem die Curve $U_2 = 0$ von diesen Kreisen geschnitten wird, auch der Curve $V_0 = 0$ angehört, so dass, nachdem die Curven $U_2 = 0$ entworfen sind, Punkte der Curven $V_0 = 0$ mittels dieser Kreise auf einfache Weise constructiv gefunden werden können.

81. Da:

$$V_0 = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) + U_2$$

$$= \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) + \left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2 - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4 + - \ldots$$

ist, so erkennt man, dass die Zweige der Curve $V_0 = 0$ mit abnehmendem y sich den Kreisen:

$$y^2 + z^2 = (2m + 1)\pi y$$

immer mehr nähern, und demnach sämmtlich im Coordinatenanfang, der ein unendlich vielfacher Punkt der Curve $V_0 = 0$ ist, zusammenlaufen.

Nachdem wir hiemit den gesammten Verlauf der Curve $V_0 = 0$ zu überblicken im Stande sind, erkennen wir insbesondere auch, dass $\partial y/\partial z$ niemals negativ oder Null (letzteres nur im Coordinatenanfang) werden kann, sondern stets positiv bleibt.

82. Die Entscheidung, über welchen Theilen der Linien $I_1 = 0$ und $V_0 = 0$ Maxima oder Minima der Lichtstärke auftreten, liefert der zweite Differentialquotient von M_1^2 nach z. Man findet aber:

$$\frac{\partial^2 M_1^2}{\partial z^2} = -2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(I_1\frac{\partial V_0}{\partial z} + V_0\frac{\partial I_1}{\partial z}\right),$$

oder, weil:

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{z}{y}V_{-1} = -I_1 - \frac{z}{y}V_1$$

und:

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} = -\frac{1}{z}I_1 + I_0$$

ist:

$$\frac{\partial^2 M_1^2}{\partial z^2} = 2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(-\frac{z}{y}I_1 V_{-1} + \frac{1}{z}I_1 V_0 - I_0 V_0\right)$$

$$= 2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(I_1^2 + \frac{z}{y}I_1 V_1 + \frac{1}{z}I_1 V_0 - I_0 V_0\right).$$

Ueber den Geraden $I_1 = 0$ liegen demnach Maxima oder Minima der Intensität, je nachdem:

$$I_0 V_0$$

positiv oder negativ ist.

Auf den Curven $V_0 = 0$ dagegen finden sich Maxima oder Minima, wenn:

$$-\frac{z}{y}I_1 V_{-1}$$

oder:

$$I_1\left(I_1 + \frac{z}{y}V_1\right)$$

negativ oder positiv ist.

Die Intensität auf der y-Axe, d. i. im Centrum des geometrischen Schattens, ist immer ein Maximum, weil für $z = 0$:

$$I_1 = 0\,, \quad I_0 = 1\,, \quad V_0 = 1\,,$$

und demnach:

$$\left[\frac{\partial^2 M_1^2}{\partial z^2}\right]_{z=0} = -2\left(\frac{2}{y}\right)^2$$

negativ ist.

83. In den Durchschnittspunkten der beiden Liniensysteme $I_1 = 0$ und $V_0 = 0$ verschwindet der zweite Differentialquotient von M_1^2, nicht aber der dritte. Denn dieser, nämlich:

$$\frac{\partial^3 M_1^2}{\partial z^3} = 2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(I_1 V_0 - \frac{1}{z}I_2 V_0 - \frac{2z}{y}I_0 V_{-1} + \frac{1}{y}I_1 V_{-1} - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_1 V_{-2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2}{y}\right)^2\left(3I_1\left(I_0 - \frac{1}{z}I_1\right) - \left(\frac{1}{y}I_1 - \frac{2z}{y}I_0\right)V_1 + \left(\left[\frac{z^2}{y^2} - \frac{2}{z} + 1\right]I_1 + \frac{1}{z}I_0\right)V_0\right)$$

nimmt hier den von Null verschiedenen Werth

$$\left[\frac{\partial^3 M_1^2}{\partial z^3}\right] = -2\left(\frac{2}{y}\right)^2 \cdot \frac{2z}{y}I_0 V_{-1} = 2\left(\frac{2}{y}\right)^2 \cdot \frac{2z}{y}I_0 V_1$$

an. Ueber den Durchschnittspunkten der Linien $I_1 = 0$ und $V_0 = 0$ liegen demnach Wendepunkte der Intensitätscurve.

84. Bei diesen Punkten findet, ganz wie im vorigen Fall, ein Uebers-pringen der Maxima oder Minima von der einen Liniengattung auf die andere statt. Denn schreitet man längs einer der Geraden $I_1 = o$ fort, so ändert sich beim Uebergang über die Curve $V_o = o$ das Vorzeichen von V_o, nicht aber dasjenige von I_o, so dass auch das Product:

$$I_o V_o ,$$

dessen Vorzeichen zwischen Maximum oder Minimum entscheidet, hier einen Zeichenwechsel erfährt.

Geht man dagegen längs der Curve $V_o = o$ über einen ihrer Durchschnittspunkte mit den Geraden $I_1 = o$ hinweg, so wechselt das Vorzeichen von I_1, nicht aber dasjenige von V_{-1}, da für $I_1 = o$:

$$V_{-1} = -V_1$$

ist, V_1 aber wegen:

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{z}{y} V_o = o$$

ein Maximum oder Minimum ist. Sonach erleidet auch das in diesem Falle charakteristische Product:

$$I_1 V_{-1}$$

einen Zeichenwechsel, und zeigt dadurch ein Uebers-pringen der Maximal- oder Minimalwerthe von der einen auf die andere Liniengattung an.

85. Ausser diesen Durchschnitten der beiden Liniensysteme $I_1 = o$ und $V_o = o$ gibt es keine Punkte mehr, in welchen der zweite Differentialquotient von M_1^2 verschwindet, und sonach Wendepunkte der Intensitätscurve eintreten könnten; denn auf der Curve $V_o = o$ kann, wie wir oben (81) gesehen haben, V_{-1} nicht Null werden. Für die zweite Art von Wendepunkten, die wir im vorigen Abschnitt bei der kreisförmigen Oeffnung kennen gelernt haben, nämlich für diejenigen, welche der Bedingung $\partial y/\partial z = o$ entsprechen, existirt also bei dem dunklen Schirmchen kein Analogon, wohl aber für die erste Art, welche den Durchschnittspunkten der beiden Liniensysteme zugehören.

In Fig. 20 ist das bei diesen Schnittpunkten eintretende Uebergehen der Maxima oder Minima der Lichtstärke auf die andere Liniengattung in derselben Weise wie in Fig. 12 durch stärkeres Ausziehen der Linientheile, welche Träger der Minima sind, ersichtlich gemacht.

86. Was im vorigen Abschnitt von den coordinirten Geraden gesagt wurde, gilt in analoger Weise auch im gegenwärigen Fall.

Für zwei Punkte, welche zu dem nämlichen Werth von z gehörig auf zwei coordinirten Geraden liegen, gelten die Beziehungen:

$$V_1 + V'_1 = \sin \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right),$$

$$V_o + V'_o = I_o + \cos \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right).$$

Diese Relationen sind mit den analogen oben (66) für die U-Functionen aufgestellten identisch, denn es gelten ja offenbar die Gleichungen:

$$V_1 = U'_1, \qquad V'_1 = U_1,$$
$$V_o = I_o - U'_2 \qquad V'_o = I_o - U_2.$$

87. Aus diesen aber folgt:

$$V_o^2 + V_1^2 = U'^2_1 + U'^2_2 - 2I_o U'_2 + I_o^2,$$
$$V'^2_o + V'^2_1 = U_1^2 + U_2^2 - 2I_o U_2 + I_o^2,$$

und wenn man letztere zwei Gleichungen addirt:

$$V_o^2 + V_1^2 + V'^2_o + V'^2_1 = U_1^2 + U_2^2 + U'^2_1 + U'^2_2 - 2I_o(U_2 + U'_2) + 2I_o^2.$$

Nun ist aber nach (66):

$$U_2 + U'_2 = I_o - \cos \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right),$$

folglich:

$$V_o^2 + V_1^2 + V'^2_o + V'^2_1 = U_1^2 + U_2^2 + U'^2_1 + U'^2_2 + 2I_o \cos \tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right).$$

Da nun:

$$U_1^2 + U_2^2 = \frac{c^2 z^2}{4} M^2, \qquad V_o^2 + V_1^2 = \frac{c^2 z^2}{4} M_1^2,$$

$$U'^2_1 + U'^2_2 = \frac{z^2}{4c^2} M'^2, \qquad V'^2_o + V'^2_1 = \frac{z^2}{4c^2} M'^2_1$$

ist, so erkennt man, dass zwischen den Intensitäten, welche auf coordinirten Geraden der Beugungsbilder einer kreisförmigen Oeffnung und

eines kreisförmigen Schirmchens dem nämlichen Werthe von z zugehören, die Beziehung:

$$c^2(M_1^2 - M^2) + \frac{1}{c^2}(M_1'^2 - M'^2) = \frac{8}{z^2} I_0 \cos\tfrac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c}\right)$$

obwaltet.

88. Die Gerade $y = z$ bildet wie im vorigen Fall die Grenze des geometrischen Schattens, welcher das zwischen ihr und der y-Axe eingeschlossene Gebiet einnimmt. Die Fig. 20, in welcher die Schattengrenze punktirt angegeben ist, lässt unmittelbar erkennen, dass mit wachsendem y eine immer grössere Anzahl dunkler Ringe in den Schattenraum eintritt.

Für zwei coordinirte Punkte, welche im Beugungsbild innerhalb und ausserhalb der Schattengrenze auf coordinirten Geraden liegen, gilt wie dort (67) die Beziehung:

$$\zeta\zeta' = \zeta_0^2$$

89. Längs der Schattengrenze selbst ist auch hier die Lichtstärke in geschlossener Form ausdrückbar. Denn man hat für $y = z$ oder $c = 1$:

$$V_1(z, z) = \tfrac{1}{2} \sin z\,,$$

$$V_0(z, z) = \tfrac{1}{2}(I_0 + \cos z)\,,$$

folglich:

$$M_1^2 = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 + \left(\frac{I_0 + \cos z}{z}\right)^2.$$

Die Werthe von $2z^{-1} V_1(z, z)$, $2z^{-1} V_0(z, z)$ und M_1^2 sind in Tab. XXV von $z = 0$ bis $z = 12$ mit einem Incremente $= 0{,}5$ angegeben, und in Fig. 21 von $z = 2$ an graphisch dargestellt.

90. Da an der Schattengrenze, wo $c = 1$ ist,

$$M_1'^2 = M_1^2 \quad \text{und} \quad M'^2 = M^2$$

wird, so verwandelt sich hier die oben (87) für zwei coordinirte Gerade aufgestellte allgemeine Relation in folgende einfachere:

$$M_1^2 - M^2 = \left(\frac{2}{z}\right)^2 I_0 \cos z\,.$$

Hieraus ergibt sich, dass an der Grenze des geometrischen Schattens die Intensität im Beugungsbilde eines kreisförmigen Schirmchens der-

jenigen im Beugungsbilde einer gleichgrossen kreisförmigen Oeffnung gleich wird, so oft entweder $\cos z = o$, oder $I_o = o$ ist, also in den Punkten der Figuren 12 und 20, wo einerseits die zur y-Axe parallelen Geraden $z = (m + \frac{1}{2})\pi$ und andrerseits die Asymptoten der Curve $V_o = o$ die Schattengrenze $y = z$ durchschneiden.

91. Die oben besprochenen Wendepunkte der Intensitätscurven können nur ausserhalb des Schattenraumes, wo $y < z$ ist, vorkommen. Denn da für $I_1 = o$:

$$V_{-1} = V_1$$

ist, so nimmt entlang den Geraden $I_1 = o$ die Function:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \cdot \frac{z}{y} V_{-1}}{V_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{-1}}$$

den Werth:

$$- \frac{2 \frac{z}{y}}{1 - \left(\frac{z}{y}\right)^2}$$

an, welcher positiv ist, solange $y < z$ bleibt, im Schattenraum dagegen, wo $y > z$ ist, negativ wird. Nun wissen wir (81), dass längs den Curven $V_o = o$ der Werth von $\partial y / \partial z$ nur positiv sein kann. Durchschnittspunkte dieser Curven mit den Geraden $I_1 = o$, d. i. Wendepunkte der Intensitätscurve, können also nur ausserhalb des Schattens vorkommen.

VI. Abschnitt.

Beobachtungsresultate.

92. Die durch eine kleine kreisförmige Oeffnung hervorgebrachten Fresnel'schen Beugungserscheinungen wurden beobachtet und gemessen durch ein einem älteren Fernrohr entnommenes Ocular mit Glasmikrometer. Das Ocular wurde getragen von einem Messingsäulchen, das sich auf einem mit Nonius versehenen kleinen Schlitten erhob, der in einer

Nuth längs einer Millimetertheilung sowohl grob mit der Hand als auch fein mittels einer Schraube verschoben werden konnte. Mit dieser Vorrichtung auf demselben Gestell war ein zweites Säulchen angebracht, welches den beugenden Schirm, eine dünne geschwärzte Messingplatte mit kleiner kreisrunder Oeffnung, trug. Die jeweilige Entfernung (b) des Auffangschirmes, nämlich der Mikrometerplatte des Oculars, von dem beugenden Schirm konnte an der Theilung mittels des Nonius auf Zehntelmillimeter genau abgelesen werden.

93. Um die Erscheinungen aus der Theorie berechnen und sodann mit den Beobachtungen vergleichen zu können, musste homogenes Licht von bekannter Wellenlänge zur Anwendung kommen. Es wurde daher mittels Uhrwerkheliostat, Spalt, achromatischer Linse und Flintglasprisma ein reines scharfes Sonnenspectrum entworfen, und zwar auf einem Schirm, in welchem sich ein kleines rundes Loch von $\frac{1}{2}^{mm}$ Durchmesser befand. Dieses kleine Loch wurde durch Verschieben des Schirms nach der Reihe auf die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien eingestellt, so dass die dunkle Linie jedesmal durch die Mitte des Loches ging, und sonach Licht aus der unmittelbaren Nähe zu beiden Seiten der Fraunhofer'schen Linie durch dasselbe drang. Das kleine Loch diente so als nahezu punktförmige homogene Lichtquelle für den in geeigneter Entfernung dahinter aufgestellten Beugungsapparat.

94. Bei sämmtlichen Versuchen wurde die nämliche Entfernung ($a = 2120^{mm}$) der Lichtquelle von der beugenden Oeffnung unverändert beibehalten, und nur die Entfernung b zwischen dieser und der auffangenden Mikrometerplatte variirt.

Auch die beugende Kreisöffnung war bei allen Versuchen die nämliche. Ihr Durchmesser, mittels Glasmikrometer unter dem Mikroskope gemessen, ergab sich zu $0^{mm},56$, ihr Radius war demnach: $r = 0^{mm},28$.

Die Messungen erstreckten sich auf die Fraunhofer'schen Linien C, D, E und F. Für die Linien B und G fielen die Erscheinungen zu lichtschwach aus, um sichere Messungen zu gestatten.

Von den grösseren für die Dimensionen des Apparats zulässigen Entfernungen b ausgehend wurde das Ocular der beugenden Oeffnung

allmählig nähergeschoben, und jedesmal, wenn ein charakteristisches, von dem vorher beobachteten hinreichend verschiedenes Beugungsbild sich zeigte, die Durchmesser der dunklen Ringe und die zugehörige Entfernung b abgelesen.

95. Auf der Mikrometerplatte des Oculars waren vier Pariser Linien in 80 gleiche Theile getheilt, so dass jeder Theilstrich $^1/_{20}'''$ Par. oder $0^{mm},1128$ betrug. Die Zehntel eines Theilstrichs wurden durch Schätzung bestimmt. Bei fehlerloser Ablesung würden demnach die Durchmesser der Ringe auf $0^{mm},01128$ oder ihre Halbmesser auf $0^{mm},00564$ genau erhalten werden. Bedenkt man jedoch, dass die Ringe nicht immer schmal und scharf, sondern häufig schwach und verschwommen erscheinen, so werden Fehler in der Schätzung des Durchmessers bis zu $^1/_{10}$ Theilstrich, also im Halbmesser bis $\pm 0^{mm},00564$ nicht zu vermeiden sein, so dass sich in einzelnen Fällen die Abweichung von den völlig genauen Werthen auf $0^{mm},011$ belaufen kann.

Die unmittelbar in Zwanzigstel Pariser Linien abgelesenen Durchmesser d der dunkeln Ringe sind in den folgenden Tabellen 1 bis 4 in der fünften Columne unter der Ueberschrift „d beobachtet“ aufgeführt. Manchmal erschienen die Ringe so breit, dass, statt wie gewöhnlich auf ihre dunkelste Stelle einzustellen, ihr innerer und äusserer Durchmesser abgelesen und aus beiden Werthen das Mittel genommen werden musste.

Aus den Durchmessern ergaben sich dann die Halbmesser ζ in Millimetern durch die einfache Rechnung:

$$\zeta = \tfrac{1}{2} d \cdot 0{,}1128 ,$$

welche Werthe sich in der mit „ζ beobachtet“ überschriebenen Columne angegeben finden.

96. Diese beobachteten Werthe von ζ mussten nun mit den aus der Theorie berechneten Werthen verglichen werden.

Zu diesem Zwecke wurde zunächst zu jedem gemessenen Werthe des Abstandes b (zweite Columne der folgenden Tabellen) und mit Hilfe der bekannten Grössen a, λ und r der entprechende Werth von y (dritte Columne) mittels der Formel:

$$y = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a + b}{ab} \cdot r^2$$

berechnet. Zu jedem Werthe von y wurden diejenigen Werthe von z (vierte Columne) aufgesucht, welchen Minima der Lichtstärke entsprechen; dieselben konnten mit hinreichender Genauigkeit der Zeichnung Fig. 12, welche den Verlauf der Linien $I_1 = o$ und $U_2 = o$ graphisch darstellt, entnommen werden.

Aus diesen Werthen von z wurden nun die Radien ζ der dunklen Ringe mittels der Gleichung:

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{b}{r} \cdot z$$

abgeleitet, und in der siebenten Columne neben die beobachteten Werthe von ζ gestellt.

Die in der achten Columne eingetragenen Differenzen D zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen von ζ überschreiten nirgends die oben (95) festgestellte Fehlergrenze.

Durch diese Beobachtungsreihen wird demnach die im Vorhergehenden vorgetragene Theorie durchaus bestätigt.

97. Eine weitere Bestätigung aber liefert das charakteristische und überaus mannigfaltige Aussehen der Beugungsbilder selbst, die scheinbar regellose Aufeinanderfolge sehr dunkler und äusserst schwacher Ringe und die eigenthümlichen Abstufungen der Lichtstärke, welche dem Beobachter alle jene Besonderheiten im Gange der Intensität vor Augen führen, welche in den Intensitätscurven Fig. 2 bis 11 hervortreten, und durch diese besser wiedergegeben sind, als jede Beschreibung es auszudrücken vermöchte. In der letzten Columne „Bemerkungen“ finden sich kurze dieses Aussehen der Ringe betreffende Notizen. Von besonderem Interesse sind die eigenthümlichen Schattirungen, welche den Wendepunkten der Intensitätscurven, wo die Beobachtung zufällig auf solche traf, entsprechen (D, 1; E, 5; F, 7).

Tabelle 1.

Linie C; $\lambda = 0^{mm},0006562$; $a = 2120^{mm}$; $r = 0^{mm},28$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴		ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	165,8	4,882	3,832	4,1		0,231	0,237	— 0,006	sehr stark, breit
			7,016	6,7 8,5	7,6	0,429	0,434	— 0,005	breit, schwächer
			10,174	10,2 12,5	11,35	0,640	0,629	+ 0,011	breit, schwach
2.	152,5	5,277	3,832	3,7		0,209	0,218	— 0,009	schwach
			7,016	6,3 7,9	7,1	0,400	0,399	+ 0,001	breit, stark
			10,174	9,3 11,2	10,25	0,578	0,579	— 0,001	breit, stark
3.	99,4	7,906	2,850	1,8		0,102	0,106	— 0,004	schwach
			7,016	4,5		0,254	0,260	— 0,006	stark
			10,174	6,6		0,372	0,377	— 0,005	stark
			13,324	8,7		0,491	0,494	— 0,003	stark
4.	90,4	8,658	2,440	1,45		0,082	0,082	0,000	
			7,016	4,1		0,231	0,237	— 0,006	
			10,174	6,0		0,338	0,343	— 0,005	
			13,324	8,0		0,451	0,449	+ 0,002	
5.	85,1	9,175	2,140	1,2		0,068	0,068	0,000	
			7,016	3,9		0,220	0,223	— 0,003	
			10,174	5,7		0,321	0,323	— 0,002	
			13,324	7,5		0,423	0,423	0,000	
6.	75,0	10,363	1,500	0,8		0,045	0,042	+ 0,003	Enges Ringelchen
			6,750	3,3		0,186	0,189	— 0,003	schwach
			10,174	4,9		0,276	0,285	— 0,009	stark
			13,324	6,8		0,383	0,373	+ 0,010	stark
7.	73,3	10,596	1,300	0,6		0,034	0,036	— 0,002	Enges Ringelchen
			6,650	3,2		0,180	0,182	— 0,002	
			10,174	4,9		0,276	0,278	— 0,002	
			13,324	6,4		0,361	0,364	— 0,003	
8.	67,2	11,525	0,700	—		—	0,018	—	Dunkler Fleck mit
			6,300	2,7		0,152	0,158	— 0,006	hellerer Mitte
			10,174	4,4		0,248	0,255	— 0,007	
			13,324	5,9		0,333	0,334	— 0,001	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
	62,5	12,365	0,160	—	—	0,004	—	Schwarz.Mittelfleck
			5,900	2,3	0,130	0,135	— 0,005	schwach
9.			10,174	4,1	0,231	0,237	— 0,006	schwach
			13,324	5,6	0,316	0,311	+ 0,005	stark
			16,471	6,8	0,383	0,384	— 0,001	stark
	56,8	13,570	0,700	—	—	0,015	—	Dunkler Fleck mit
			5,400	2,0	0,113	0,114	— 0,001	hellerer Mitte
10.			10,050	3,7	0,209	0,213	— 0,004	
			13,324	5,0	0,282	0,282	0,000	
	47,0	16,326	3,832	1,2	0,068	0,067	+ 0,001	schwach
			9,200	2,9	0,164	0,161	+ 0,003	sehr schwach
11.			13,324	4,0	0,226	0,234	— 0,008	schwach
			16,471	5,0	0,282	0,289	— 0,007	stark
	40,6	18,843	3,832	0,75 / 1,30 } 1,025	0,058	0,058	0,000	Breites schwarzes Ringelchen
12.			8,089	2,2	0,124	0,123	+ 0,001	schwach
			12,600	3,4	0,192	0,191	+ 0,001	sehr schwach
			16,471	4,5	0,254	0,249	+ 0,005	stark
	35,1	21,740	2,300	0,5	0,028	0,030	— 0,002	Zwischenraum zwischen dem 1. und
13.			7,016	1,7	0,096	0,092	+ 0,004	2. Ring schattig
			11,800	2,8	0,158	0,155	+ 0,003	schwach
	29,3	25,975	0,610	0,1	0,006	0,007	— 0,001	Schwarz.Mittelfleck
			6,600	1,2	0,068	0,072	— 0,004	stark
14.			10,174	1,9	0,107	0,111	— 0,004	schwach
			13,550	2,7	0,152	0,148	+ 0,004	sehr schwach
	25,7	29,564	3,832	0,6	0,034	0,037	— 0,003	Enges Ringelchen
15.			10,174	1,6	0,090	0,098	— 0,008	stark
			13,324	2,2	0,124	0,128	— 0,004	schwach
16.	20,1	37,700	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittelpunkt
17.	15,0	50,400	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittelpunkt

Tabelle 2.

Linie D; $\lambda = 0^{mm},0005889$; $a = 2120^{mm}$; $r = 0^{mm},28$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	90,4	9,638	1,900	1,0	0,056	0,057	— 0,001	Zweiter Ring innen schattig gesäumt bis d = 3,4, entsprechend einem Wendepunkt bei z = 7,02
			10,174	5,4	0,305	0,308	— 0,003	
			13,324	7,2	0,406	0,403	+ 0,003	
2.	85,1	10,224	1,600	0,8	0,045	0,046	— 0,001	Enges Ringelchen, schwach
			6,800	3,4	0,192	0,194	— 0,002	
			10,174	5,1	0,288	0,290	— 0,002	
			13,324	6,7	0,378	0,380	— 0,002	
3.	73,3	11,806	0,500	0,2	0,011	0,012	— 0,001	Schwarzes Ringelchen mit dunklem Innenraum
			6,180	2,7	0,152	0,152	0,000	
			10,174	4,4	0,248	0,250	— 0,002	
			13,324	5,8	0,327	0,327	0,000	
4.	67,2	12,842	0,200	—	—	0,004	—	Dunkler Mittelfleck
			5,770	2,3	0,130	0,130	0,000	
			10,174	4,0	0,226	0,229	— 0,003	
			13,324	5,3	0,299	0,300	— 0,001	
			16,471	6,6	0,372	0,370	+ 0,002	
5.	56,8	15,121	2,100	0,7	0,039	0,040	— 0,001	Enges Ringelchen
			4,400	1,5	0,085	0,084	+ 0,001	
			9,650	3,3	0,186	0,183	+ 0,003	
			13,324	4,5	0,254	0,253	+ 0,001	
			16,471	5,5	0,310	0,313	— 0,003	
6.	53,3	16,088	3,832	1,2	0,068	0,068	0,000	
			9,310	3,0	0,169	0,166	+ 0,003	
7.	46,2	18,500	3,832	1,1	0,062	0,059	+ 0,003	breit, sehr dunkel
			8,300	2,3	0,130	0,128	+ 0,002	schwach
			12,800	3,6	0,203	0,198	+ 0,005	schwach
8.	40,0	21,310	2,750	0,5	0,028	0,037	— 0,009	Dunkles Ringelchen
			7,016	1,8	0,102	0,094	+ 0,008	Zwischenraum zwischen dem 1. und 2. Ring schattig
			11,900	2,7	0,152	0,159	— 0,007	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
9.	37,1	22,941	1,430	0,3	0,017	0,018	— 0,001	Enges Ringelchen
			7,016	1,5	0,085	0,087	— 0,002	dick, schwarz
			11,320	2,5	0,141	0,141	0,000	schwach
10.	33,2	25,588	0,310	—	—	0,003	—	Schwarz. Mittelfleck
			7,016	1,3	0,073	0,078	— 0,005	dick, schwarz
			10,174	2,0	0,113	0,113	0,000	schwach
								Zwischenraum zwischen beiden Ringen schattig
11.	29,9	28,370	2,800	0,5	0,028	0,028	0,000	Klein. kräftig. Ring
			4,250	0,7	0,039	0,043	— 0,004	schwach, Zwischenraum zwisch. ihm und dem vorigen schattig
			10,174	1,8	0,102	0,102	0,000	breit, schwarz
12.	27,9	30,376	3,832	0,6	0,034	0,036	— 0,002	Kleiner schwarzer Ring
			10,174	1,7	0,096	0,095	+ 0,001	breit, grau
13.	22,5	37,572	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittelpunkt
14.	16,7	50,482	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittelpunkt

Tabelle 3.

Linie E; $\lambda = 0^{mm},0005269$; $a = 2120^{mm}$; $r = 0^{mm},28$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	125,9	7,867	2,800	1,9	0,107	0,106	+ 0,001	Ringe ziemlich gleichmässig
			7,016	4,5	0,254	0,265	— 0,011	
			10,174	6,8	0,383	0,384	— 0,001	
			13,324	8,9	0,502	0,502	0,000	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
	97,7	10,010	1,700	0,9	0,051	0,050	+ 0,001	Innenraum des 1.
			6,900	3,5	0,197	0,202	— 0,005	Ringes schattig
2.			10,174	5,2	0,293	0,298	— 0,005	
			13,324	6,9	0,389	0,390	— 0,001	
			16,471	8,5	0,479	0,482	— 0,003	
	90,4	10,783	1,200	0,6	0,034	0,032	+ 0,002	Innenraum des 1.
			6,600	3,1	0,175	0,179	— 0,004	Ringes schattig
3.			10,174	4,9	0,276	0,275	+ 0,001	
			13,324	6,4	0,361	0,361	0,000	
	85,1	11,427	0,800	0,4	0,023	0,020	+ 0,003	Kräftiges Ringel-
			6,350	2,8	0,158	0,162	— 0,004	chen, Innenraum
4.			10,174	4,6	0,259	0,259	0,000	schattig
			13,324	6,0	0,338	0,340	— 0,002	
	73,3	13,196	0,450	—	—	0,010	—	Schwarz. Mittelfleck
			5,600	2,1	0,118	0,123	— 0,005	
			13,324	5,1	0,288	0,292	— 0,004	Der 2. Ring nach
5.			16,471	6,4	0,361	0,362	— 0,001	innen schattig ge-
								säumt; Wende-
								punkt
	72,4	13,354	0,550	—	—	0,012	—	Schwarz. Mittelfleck
			5,500	2,1	0,118	0,119	— 0,001	
6.			10,174	3,9	0,220	0,221	— 0,001	Ringe schwach
			13,324	5,1	0,288	0,289	— 0,001	
			16,471	6,3	0,355	0,357	— 0,002	
	67,2	14,353	1,350	0,5	0,028	0,027	+ 0,001	Schwarzes Ringel-
			5,000	1,8	0,102	0,101	+ 0,001	chen
7.			9,850	3,5	0,197	0,198	— 0,001	
			13,324	4,7	0,265	0,268	— 0,003	
	62,8	15,338	2,350	0,8	0,079	0,080	— 0,001	Der ganze vom 2.
			4,250	1,4	0,045	0,044	+ 0,001	Ring eingeschlos-
8.			9,580	3,1	0,175	0,180	— 0,005	sene Innenraum
			13,324	4,4	0,248	0,251	— 0,003	schattig. Die fol-
								genden 2 Ringe
								schwach

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
9.	56,8	16,900	3,832	0,7 / 1,6 } 1,15	0,065	0,065	0,000	Breit, sehr dunkel
			9,000	2,7	0,152	0,153	— 0,001	schwach
			13,000	3,8	0,214	0,221	— 0,007	schwach
			16,471	5,0	0,282	0,280	+ 0,002	schwach
10.	49,0	19,520	3,832	1,0	0,056	0,056	0,000	stark, Zwischenraum zwischen dem 1. u. 2. Ring schattig
			7,680	2,0	0,113	0,113	0,000	schwach
			12,400	3,2	0,180	0,182	— 0,002	schwach
11.	44,9	21,263	2,800	0,6	0,034	0,038	— 0,004	Schwach. Ringelch.
			7,016	1,7	0,096	0,094	+ 0,002	Schattig. Zwischenraum
			12,000	2,9	0,164	0,161	+ 0,003	Folg. Ringe schwach
12.	41,8	22,807	1,500	0,4	0,023	0,019	+ 0,004	Schwach. Ringelch.
			7,016	1,5	0,085	0,089	— 0,004	Breit, schwarz
			11,400	2,5	0,141	0,143	— 0,002	sehr schwach
13.	35,2	27,001	1,400	0,3	0,017	0,015	+ 0,002	Dunkler Mittelfleck
			5,600	1,0	0,056	0,059	— 0,003	stark, folgt schattiger Zwischenraum
			10,174	1,9	0,107	0,107	0,000	stark
			13,324	2,5	0,141	0,140	+ 0,001	schwach
14.	25,0	37,837	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittelpunkt
15.	18,8	50,170	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittelpunkt

Tabelle 4.

Linie F; $\lambda = 0^{mm},0004861$; $a = 2120^{mm}$; $r = 0^{mm},28$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	156,2	6,966	3,300	2,5	0,141	0,142	— 0,001	Ringe gleichartig
			7,016	5,3	0,299	0,303	— 0,004	
			10,174	7,9	0,446	0,439	+ 0,007	
			13,324	10,3	0,581	0,575	+ 0,006	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
2.	105,0	10,130	1,620	0,9	0,051	0,047	+ 0,004	Ringelchen mit etwas schattigem Innenraum
			6,800	3,4	0,192	0,197	— 0,005	
			10,174	5,3	0,299	0,295	+ 0,004	
			13,324	7,0	0,395	0,387	+ 0,008	
3.	90,4	11,689	0,600	—	—	0,015	—	Dunkler Mittelfleck
			6,250	2,8	0,158	0,156	+ 0,002	Ringe ziemlich gleichartig
			10,174	4,5	0,254	0,254	0,000	
			13,324	5,9	0,333	0,333	0,000	
4.	85,1	12,387	0,100	—	—	0,002	—	Dunkler Mittelfleck
			6,000	2,5	0,141	0,141	0,000	Ringe schwach
			10,174	4,2	0,237	0,239	— 0,002	
			13,324	5,5	0,310	0,313	— 0,003	
5.	73,3	14,304	1,300	0,5	0,028	0,026	+ 0,002	Dunkler Fleck mit hellem Mittelpunkt
			5,000	1,8	0,102	0,101	+ 0,001	
			9,900	3,5	0,197	0,201	— 0,004	
			13,324	4,8	0,271	0,270	+ 0,001	
6.	70,0	14,956	1,900	0,7	0,039	0,037	+ 0,002	Innenraum dunkel
			4,500	1,6	0,090	0,087	+ 0,003	ziemlich stark
			9,700	3,3	0,186	0,188	— 0,002	schwächer
			13,324	4,5	0,254	0,258	— 0,004	schwach
7.	67,2	15,559	2,700	0,9	0,051	0,050	+ 0,001	Das 1. Ringelchen umgeben v. einem schattigen Hof, der sich bis d = 1,9 erstreckt. (Wendepunkt)
			9,500	3,1	0,175	0,176	— 0,001	
			13,324	4,4	0,248	0,247	+ 0,001	
8.	57,9	17,981	3,832	1,1	0,062	0,061	+ 0,001	breit, schwarz
			8,500	2,4	0,135	0,136	— 0,001	schwach
			12,800	3,6	0,203	0,205	— 0,002	etwas stärker
			16,471	4,7	0,265	0,264	+ 0,001	ebenso
9.	56,8	18,320	3,832	1,1	0,062	0,060	+ 0,002	breit, schwarz
			8,400	2,3	0,130	0,132	— 0,002	Uebrige Ringe schwach
			12,800	3,6	0,203	0,201	+ 0,002	
			16,471	4,6	0,259	0,258	+ 0,001	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
10.	50,2	20,666	3,450	0,9	0,051	0,048	+ 0,003	stark, Zwischenraum schattig
			7,016	1,8	0,102	0,097	+ 0,005	schwächer
			12,150	3,0	0,169	0,169	0,000	schwach
11.	37,1	27,795	2,150	0,4	0,023	0,002	+ 0,001	Innenraum dunkel
			4,850	0,9	0,051	0,050	+ 0,001	schwach
			10,174	1,8	0,102	0,104	— 0,002	stark

98. Die Erscheinungen, welche ein kreisförmiges undurchsichtiges Schirmchen hervorbringt, wurden mit dem nämlichen Apparat ganz in derselben Weise beobachtet. Ein kreisrundes dunkles Schirmchen auf hellem Grunde wurde sehr einfach dadurch erzeugt, dass man auf einer planparallelen Glasplatte ein kleines Tuschtröpfchen eintrocknen liess. Der Durchmesser des zu den Versuchen benutzten Tröpfchens betrug $0^{mm},64$, demnach sein Radius:

$$r = 0^{mm},32.$$

Die Glasplatte wurde an die Stelle des beugenden Schirmes mit kleiner Oeffnung gebracht; sie befand sich von dem kleinen Loch, das als homogene Lichtquelle diente, in der Entfernung:

$$a = 1485^{mm}.$$

99. Im übrigen wurden die Beobachtungen genau in derselben Weise wie im vorigen Fall durchgeführt. Die Erscheinungen sind weit einförmiger als bei der kleinen Oeffnung; in der Mitte befindet sich stets ein heller Punkt, umgeben von einem dunklen Hofe, dem Schatten, in welchem noch dunklere Ringe wahrgenommen werden, die nach aussen hin an Dunkelheit abnehmen, während die Helligkeit ihrer Zwischenräume zunimmt. Ausserhalb des Schattens sieht man auf sehr hellem Grunde schwache dunkle Ringe. Je mehr die auffangende Mikrometerplatte dem beugenden Schirmchen genähert wird, d. h. je kleiner b oder je grösser y wird, desto mehr dunkle Ringe treten in den Schatten ein; die Abstände dieser Ringe erscheinen nahezu gleich und werden mit wachsendem y immer kleiner.

100. Die zu jedem der Werthe von y, welche wie oben berechnet wurden, zugehörigen Werthe von z wurden der Fig. 20, welche den Verlauf der Linien $I_1 = o$ und $V_o = o$ darstellt, entnommen, und die Radien ζ der dunklen Ringe alsdann nach der Formel:

berechnet.
$$\zeta = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{b}{r} \cdot z$$

Da mit abnehmendem b die den Minimis der Intensität entsprechenden Werthe von z den Wurzeln der Gleichung $I_o = o$ (79), diese aber den constanten Werthen $z = (m + \frac{3}{4})\pi$ immer näher kommen, so zeigt diese Gleichung, dass mit wachsendem y die Differenz der Radien ζ_1 und ζ zweier aufeinanderfolgenden Ringe dem constanten Werthe:

$$\zeta_1 - \zeta = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{7}{4}$$

immer näher rückt, und der Entfernung b proportional wird, was, wie oben bereits erwähnt, durch die Beobachtungen bestätigt wird.

Ein Blick auf die folgenden Tabellen 5 bis 9, welche ganz wie die vorhergehenden (1 bis 4) angelegt sind, und daher einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen, zeigt, dass auch in diesem Falle die Beobachtungen mit der Theorie in befriedigender Weise übereinstimmen.

Tabelle 5.

Linie C; $\lambda = 0^{mm},0006562$; $a = 1485^{mm}$; $r = 0^{mm},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
	158,2	6,858	2,30	2,2	0,124	0,119	+ 0,005	Zwischenraum sehr dunkel
1.			5,20	4,7	0,265	0,268	— 0,003	Zwischenr. schattig
			7,80	7,1	0,400	0,403	— 0,003	schwach
			10,17	9,3	0,525	0,525	0,000	
	99,0	10,564	2,35	1,3	0,073	0,076	— 0,003	Zwischenraum sehr dunkel
2.			5,40	3,0	0,169	0,174	— 0,005	Schatten
			8,30	4,8	0,271	0,268	+ 0,003	
			11,10	6,4	0,361	0,359	+ 0,002	
	42,3	23,839	2,40	0,6	0,034	0,033	+ 0,001	Zwischenraum sehr dunkel
			5,50	1,3	0,073	0,076	— 0,003	
3.			8,60	2,1	0,118	0,119	— 0,001	Schatten
			11,70	2,8	0,158	0,162	— 0,004	
			14,90	3,7	0,209	0,206	+ 0,003	

Tabelle 6.

Linie D; $\lambda = 0^{mm},0005889$; $a = 1485^{mm}$; $r = 0^{mm},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	158,3	7,638	2,35	2,0	0,113	0,109	+0,004	Zwischenraum sehr dunkel
			5,22	4,2	0,237	0,242	−0,005	
			7,95	6,5	0,367	0,369	−0,002	schwach
			10,30	8,5	0,479	0,478	+0,001	sehr schwach
2.	118,0	9,995	2,35	1,5	0,085	0,081	+0,004	Zwischenraum sehr dunkel
			5,38	3,3	0,186	0,186	0,000	Schatten
			8,25	5,1	0,288	0,285	+0,003	
			10,95	6,7	0,378	0,378	0,000	
3.	72,0	15,910	2,36	0,9	0,051	0,050	+0,001	Zwischenraum sehr dunkel
			5,47	2,0	0,113	0,115	−0,002	Schatten
			8,54	3,2	0,180	0,180	0,000	
			11,54	4,3	0,242	0,243	−0,001	
4.	48,3	23,356	2,39	0,6	0,034	0,034	0,000	Zwischenraum sehr dunkel
			5,49	1,4	0,079	0,078	+0,001	Schatten
			8,60	2,2	0,124	0,122	+0,002	
			11,70	2,9	0,164	0,166	−0,002	

Tabelle 7.

Linie E; $\lambda = 0^{mm},0005269$; $a = 1485^{mm}$; $r = 0^{mm},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	157,6	8,570	2,35	1,7	0,096	0,096	0,000	Zwischenraum sehr dunkel
			5,30	3,9	0,220	0,219	+0,001	Zwischenraum schattig
			8,10	5,9	0,333	0,335	−0,002	
			10,60	7,8	0,440	0,438	+0,002	
2.	124,3	10,646	2,36	1,4	0,079	0,077	+0,002	Zwischenraum sehr dunkel
			5,40	3,1	0,175	0,176	−0,001	Zwischenraum schattig
			8,30	4,8	0,271	0,270	+0,001	
			11,10	6,4	0,361	0,362	−0,001	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
	96,0	13,542	2,37	1,1	0,062	0,060	+ 0,002	Zwischenraum sehr dunkel
3.			5,45	2,4	0,135	0,137	— 0,002	Zwischenraum schattig
			8,47	3,7	0,209	0,213	— 0,004	
			11,40	5,0	0,282	0,287	— 0,005	
	71,8	17,829	2,39	0,8	0,045	0,045	0,000	Zwischenraum sehr dunkel
4.			5,48	1,8	0,102	0,103	— 0,001	Schatten
			8,57	2,8	0,158	0,161	— 0,003	
			11,60	3,8	0,214	0,218	— 0,004	
	50,6	24,955	2,40	0,6	0,034	0,032	+ 0,002	Zwischenraum sehr dunkel
5.			5,50	1,2	0,068	0,073	— 0,005	Schatten
			8,61	2,0	0,113	0,114	— 0,001	
			11,74	2,7	0,152	0,156	— 0,004	

Tabelle 8.

Linie F; $\lambda = 0^{mm},0004861$; $a = 1485^{mm}$; $r = 0^{mm},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
	154,9	9,4365	2,35	1,6	0,090	0,088	+ 0,002	Zwischenraum sehr dunkel
1.			5,35	3,5	0,197	0,200	— 0,003	Zwischenraum schattig
			8,21	5,5	0,310	0,307	+ 0,003	
			10,84	7,2	0,406	0,406	0,000	
	77,1	18,060	2,39	0,8	0,045	0,045	0,000	Zwischenraum sehr dunkel
2.			5,48	1,8	0,102	0,102	0,000	Schatten
			8,57	2,8	0,158	0,160	— 0,002	
			11,61	3,8	0,214	0,216	— 0,002	

Tabelle 9.

Linie G; $\lambda = 0^{mm},0004307$; $a = 1485^{mm}$; $r = 0^{mm},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ‴	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
	150,1	10,958	2,36	1,4	0,079	0,076	+ 0,003	Zwischenraum sehr dunkel
1.			5,40	3,0	0,169	0,174	— 0,005	Zwischenraum schattig
			8,33	4,8	0,271	0,268	— 0,003	
			11,15	6,4	0,361	0,359	+ 0,002	
	89,7	17,660	2,39	0,8	0,045	0,046	— 0,001	Zwischenraum sehr dunkel
2.			5,48	1,9	0,107	0,105	+ 0,002	
			8,56	2,9	0,164	0,164	0,000	Schatten
			11,60	4,0	0,226	0,223	+ 0,003	

VII. Abschnitt.

Tabellen.

Tabelle I.

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2
0,0	+ 1,000000	1,000000	1,5	+ 0,743916	0,553411
0,1	0,998750	0,997501	1,6	0,712370	0,507471
0,2	0,995008	0,990041	1,7	0,679723	0,462023
0,3	0,988792	0,977709	1,8	0,646130	0,417484
0,4	0,980133	0,960660	1,9	0,611743	0,374229
0,5	0,969074	0,939104	2,0	0,576725	0,332611
0,6	0,955670	0,913305	2,1	0,541231	0,292931
0,7	0,939988	0,883577	2,2	0,505421	0,255450
0,8	0,922105	0,850277	2,3	0,469455	0,220388
0,9	0,902109	0,813800	2,4	0,433488	0,187911
1,0	0,880101	0,774577	2,5	0,397675	0,158141
1,1	0,856186	0,733054	2,6	0,362169	0,131166
1,2	0,830482	0,689700	2,7	0,327112	0,107002
1,3	0,803113	0,644990	2,8	0,292649	0,085643
1,4	+ 0,774211	0,599402	2,9	+ 0,258915	0,067037

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2
3,0	+ 0,226039	0,051093	7,0	— 0,001338	0,000001
3,1	0,194143	0,037691	7,1	+ 0,007085	0,000050
3,2	0,163339	0,026679	7,2	0,015090	0,000227
3,3	0,133735	0,017885	7,3	0,022622	0,000511
3,4	0,105427	0,011114	7,4	0,029628	0,000877
3,5	0,078502	0,006162	7,5	0,036066	0,001300
3,6	0,053037	0,002812	7,6	0,041898	0,001755
3,7	0,029099	0,000846	7,7	0,047094	0,002217
3,8	+ 0,006748	0,000045	7,8	0,051630	0,002665
3,9	— 0,013971	0,000195	7,9	0,055488	0,003078
4,0	0,033022	0,001090	8,0	0,058659	0,003440
4,1	0,050377	0,002537	8,1	0,061138	0,003737
4,2	0,066022	0,004358	8,2	0,062926	0,003959
4,3	0,079952	0,006392	8,3	0,064033	0,004100
4,4	0,092171	0,008495	8,4	0,064473	0,004156
4,5	0,102694	0,010546	8,5	0,064264	0,004129
4,6	0,111545	0,012442	8,6	0,063431	0,004023
4,7	0,118758	0,014103	8,7	0,062004	0,003844
4,8	0,124375	0,015469	8,8	0,060017	0,003602
4,9	0,128447	0,016498	8,9	0,057506	0,003306
5,0	0,131032	0,017169	9,0	0,054514	0,002971
5,1	0,132195	0,017475	9,1	0,051084	0,002609
5,2	0,132009	0,017426	9,2	0,047263	0,002233
5,3	0,130551	0,017043	9,3	0,043100	0,001857
5,4	0,127906	0,016359	9,4	0,038645	0,001493
5,5	0,124159	0,015415	9,5	0,033950	0,001152
5,6	0,119405	0,014257	9,6	0,029068	0,000844
5,7	0,113736	0,012935	9,7	0,024049	0,000578
5,8	0,107251	0,011502	9,8	0,018947	0,000359
5,9	0,100048	0,010009	9,9	0,013812	0,000190
6,0	0,092228	0,008506	10,0	0,008695	0,000075
6,1	0,083890	0,007037	10,1	+ 0,003643	0,000013
6,2	0,075135	0,005645	10,2	— 0,001297	0,000001
6,3	0,066059	0,004363	10,3	0,006081	0,000037
6,4	0,056762	0,003221	10,4	0,010668	0,000113
6,5	0,047335	0,002240	10,5	0,015019	0,000225
6,6	0,037873	0,001434	10,6	0,019100	0,000364
6,7	0,028460	0,000810	10,7	0,022878	0,000523
6,8	0,019182	0,000368	10,8	0,026327	0,000693
6,9	— 0,010117	0,000102	10,9	— 0,029422	0,000865

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2
11,0	— 0,032143	0,001033	15,0	+ 0,027347	0,000747
11,1	0,034474	0,001188	15,1	0,026664	0,000710
11,2	0,036402	0,001325	15,2	0,025730	0,000662
11,3	0,037921	0,001438	15,3	0,024559	0,000603
11,4	0,039026	0,001523	15,4	0,023169	0,000536
11,5	0,039718	0,001577	15,5	0,021576	0,000465
11,6	0,040000	0,001600	15,6	0,019800	0,000399
11,7	0,039880	0,001590	15,7	0,017862	0,000319
11,8	0,039370	0,001549	15,8	0,015784	0,000249
11,9	0,038485	0,001481	15,9	0,013588	0,000184
12,0	0,037241	0,001386	16,0	0,011300	0,000127
12,1	0,035661	0,001271	16,1	0,008941	0,000079
12,2	0,033768	0,001140	16,2	0,006539	0,000041
12,3	0,031587	0,000997	16,3	0,004115	0,000016
12,4	0,029147	0,000849	16,4	+ 0,001695	0,000003
12,5	0,026477	0,000701	16,5	— 0,000699	0,000000
12,6	0,023610	0,000557	16,6	0,003042	0,000009
12,7	0,020577	0,000423	16,7	0,005313	0,000028
12,8	0,017411	0,000303	16,8	0,007491	0,000056
12,9	0,014147	0,000200	16,9	0,009556	0,000091
13,0	0,010818	0,000117	17,0	0,011490	0,000132
13,1	0,007458	0,000055	17,1	0,013277	0,000176
13,2	0,004101	0,000016	17,2	0,014901	0,000222
13,3	— 0,000778	0,000001	17,3	0,016349	0,000267
13,4	+ 0,002477	0,000006	17,4	0,017611	0,000310
13,5	0,005637	0,000031	17,5	0,018677	0,000348
13,6	0,008671	0,000075	17,6	0,019539	0,000381
13,7	0,011554	0,000133	17,7	0,020193	0,000407
13,8	0,014260	0,000203	17,8	0,020636	0,000425
13,9	0,016766	0,000281	17,9	0,020868	0,000435
14,0	0,019054	0,000363	18,0	0,020888	0,000436
14,1	0,021104	0,000445	18,1	0,020702	0,000428
14,2	0,022903	0,000523	18,2	0,020313	0,000412
14,3	0,024438	0,000597	18,3	0,019729	0,000389
14,4	0,025699	0,000660	18,4	0,018960	0,000359
14,5	0,026680	0,000711	18,5	0,018014	0,000324
14,6	0,027377	0,000749	18,6	0,016906	0,000285
14,7	0,027789	0,000772	18,7	0,015648	0,000244
14,8	0,027918	0,000779	18,8	0,014254	0,000203
14,9	+ 0,027769	0,000771	18,9	— 0,012742	0,000162

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2
19,0	— 0,011127	0,000123	19,5	— 0,002141	0,000004
19,1	0,009426	0,000088	19,6	— 0,000292	0,000000
19,2	0,007659	0,000058	19,7	+ 0,001533	0,000002
19,3	0,005844	0,000034	19,8	0,003315	0,000010
19,4	0,003998	0,000015	19,9	0,005037	0,000025
			20,0	+ 0,006683	0,000045

Tabelle Ia.

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	Vielfache von λ	
0	+1	1	0	Max.
3,831706	0	0	1,219670	Min.
5,135630	— 0,132279	0,017498	1,634722	Max.
7,015587	0	0	2,233130	Min.
8,417236	+ 0,064482	0,004158	2,679300	Max.
10,173467	0	0	3,238315	Min.
11,619857	— 0,040008	0,001601	3,698715	Max.
13,323690	0	0	4,241062	Min.
14,795938	+ 0,027919	0,000779	4,709693	Max.
16,470631	0	0	5,242765	Min.
17,959820	— 0,020905	0,000437	5,716788	Max.
19,615861	0	0	6,243923	Min.

Tabelle II.

z	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	+ 0,765198	+ 0,440051	+ 0,114903	+ 0,019563	+ 0,002477	+ 0,000250	+ 0,000021
2	+ 0,223891	0,576725	0,352834	0,128943	0,033996	0,007040	0,001202
3	— 0,260052	+ 0,339059	0,486091	0,309063	0,132034	0,043028	0,011394
4	0,397150	— 0,066043	0,364128	0,430172	0,281129	0,132087	0,049088
5	— 0,177597	0,327579	+ 0,046565	0,364831	0,391232	0,261140	0,131049
6	+ 0,150645	0,276684	— 0,242873	+ 0,114768	0,357642	0,362087	0,245837
7	0,300079	— 0,004683	0,301417	— 0,167556	+ 0,157798	0,347896	0,339197
8	+ 0,171651	+ 0,234636	— 0,112992	0,291132	— 0,105357	+ 0,185775	0,337576
9	— 0,090334	0,245312	+ 0,144843	— 0,180935	0,265471	— 0,055039	+ 0,204317
10	0,245936	+ 0,043473	0,254631	+ 0,058379	0,219606	0,234064	— 0,014458
11	— 0,171190	— 0,176785	+ 0,139047	0,227348	— 0,015039	0,238284	0,201584
12	+ 0,047689	— 0,223447	— 0,084930	+ 0,195137	+ 0,182499	— 0,073471	— 0,243725

z	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+0,000001	+0	+0	+0	+0	+0	+0
2	0,000175	0,000022	0,000003	0	0	0	0
3	0,002547	0,000493	0,000084	0,000013	0,000002	0	0
4	0,015176	0,004029	0,000939	0,000195	0,000037	0,000006	0,000001
5	0,053376	0,018405	0,005520	0,001468	0,000351	0,000076	0,000015
6	0,129587	0,056532	0,021165	0,006964	0,002048	0,000545	0,000133
7	0,233584	0,127971	0,058921	0,023539	0,008335	0,002656	0,000770
8	0,320589	0,223455	0,126321	0,060767	0,025596	0,009623	0,003275
9	0,327461	0,305067	0,214881	0,124694	0,062217	0,027393	0,010830
10	0,216714	0,317858	0,291858	0,207486	0,123117	0,063370	0,028972
11	+0,018374	0,224969	0,308854	0,280428	0,201014	0,121600	0,064295
12	−0,170254	+0,045095	+0,230381	+0,300476	+0,270412	+0,195280	+0,120148

z	I_{14}	I_{15}	I_{16}	I_{17}	I_{18}	I_{19}	I_{20}
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0,000003	0	0	0	0	0	0
6	0,000030	+0,000001	0	0	0	0	0
7	0,000205	0,000497	0,000011	0,000002	0	0	0
8	0,001019	0,000293	0,000078	0,000019	0,000003	0	0
9	0,003895	0,001286	0,000393	0,000112	0,000030	0,000007	0,000001
10	0,011957	0,004508	0,001567	0,000506	0,000152	0,000043	0,000011
11	0,030369	0,013009	0,005110	0,001856	0,000628	0,000199	0,000059
12	+0,065040	+0,031612	+0,013991	+0,005698	+0,002152	+0,000759	+0,000251

Tabelle III.

$y = \pi$

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	+ 0,636620	+ 0,636620	0,810570	Max.
1	0,539802	0,580702	0,628601	
2	0,298890	0,433460	0,277223	
3	+ 0,032376	0,247396	0,062253	
4	— 0,142282	+ 0,081868	0,026946	
5	0,173625	— 0,022258	0,030641	
6	— 0,094496	0,056474	0,012119	
7	+ 0,011819	0,041090	0,001828	
8	0,070711	— 0,008787	0,005077	
9	0,059110	+ 0,013939	0,003688	
10	+ 0,007050	0,017334	0,000350	
11	— 0,035803	+ 0,007209	0,001334	
12	— 0,039518	— 0,004308	0,001580	
3,831706	— 0,122609	+ 0,106159	0,026305	Min.
4,715350	— 0,178789	0	0,031966	Max.
7,015587	+ 0,013239	— 0,040631	0,001826	Min.
8,306007	+ 0,074093	0	0,005490	Max.
10,173467	— 0,002313	+ 0,016225	0,000269	Min.
11,578479	— 0,043104	0	0,001858	Max.

Tabelle IV.

$y = 2\pi$.

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	0	+ 0,636620	0,405285	Max.
1	— 0,047572	0,559947	0,315803	
2	0,156737	0,362318	0,155841	
3	0,250135	+ 0,124194	0,077992	
4	0,259807	— 0,066375	0,071905	
5	0,172632	0,155073	0,053850	
6	— 0,036806	0,141277	0,021314	
7	+ 0,073194	— 0,068236	0,010014	
8	0,106459	+ 0,007067	0,011383	
9	+ 0,065126	0,044723	0,006242	
10	— 0,004680	0,040713	0,001679	
11	0,049843	+ 0,012196	0,002633	
12	— 0,046338	— 0,013333	0,002325	
3,597652	— 0,268351	0	0,072012	Min.
3,831706	— 0,265452	— 0,040589	0,072112	Max.
7,015587	+ 0,074369	— 0,065942	0,009879	Min.
7,887900	+ 0,106994	0	0,011448	Max.
10,173467	— 0,015469	+ 0,036681	0,001585	Min.
11,413520	— 0,054221	0	0,002940	Max.

Tabelle V.

$y = 3\pi$.

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	— 0,212207	+ 0,212207	0,090063	Max.
1	0,221811	+ 0,150843	0,071954	
2	0,233157	— 0,000541	0,054362	
3	0,209291	0,162866	0,070328	
4	0,127691	0,255583	0,081628	
5	— 0,005131	0,240383	0,057810	
6	+ 0,107300	0,137968	0,030548	
7	0,156654	— 0,010139	0,024643	
8	0,124279	+ 0,079105	0,021703	
9	+ 0,038751	0,098281	0,011161	
10	— 0,043777	0,057435	0,005215	
11	0,077056	+ 0,001894	0,005941	
12	— 0,052826	— 0,035554	0,004055	
1,996855	— 0,233157	0	0,054362	Min.
3,831706	— 0,145285	— 0,247233	0,082232	Max.
7,015587	+ 0,156761	— 0,008310	0,024581	Min.
7,087780	+ 0,156984	0	0,024644	Max.
10,173467	— 0,053528	+ 0,047575	0,005129	Min.
11,036130	— 0,077136	0	0,005950	Max.

Tabelle VI.

$y = 4\pi$.

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	0	0	0	Min.
1	+ 0,000759	— 0,037360	0,001396	
2	0,010698	0,122929	0,015226	
3	0,043564	0,194789	0,039840	
4	0,100101	0,196607	0,048674	
5	0,157469	— 0,114657	0,037882	
6	0,179329	+ 0,013349	0,032337	
7	0,141278	0,122492	0,034964	
8	+ 0,052246	0,161179	0,028708	
9	— 0,046242	0,119653	0,016455	
10	0,104762	+ 0,033666	0,012103	
11	0,097782	— 0,043575	0,011460	
12	— 0,039653	— 0,073719	0,007007	
3,831706	+ 0,089630	— 0,202474	0,049029	Max.
5,897757	+ 0,179654	0	0,032276	Min.
7,015587	+ 0,140208	+ 0,123721	0,034965	Max.
10,173467	— 0,108364	+ 0,018204	0,012074	Min.
10,386075	— 0,109932	0	0,012085	Max.

Tabelle VII.

$y = 5\pi$.

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	+ 0,127324	+ 0,127324	0,032423	Max.
1	0,123693	0,101421	0,025586	
2	0,116978	0,043946	0,015615	
3	0,114163	0,000633	0,013034	
4	0,114193	0,010009	0,013140	
5	0,103761	0,068242	0,015423	
6	+ 0,066399	0,140571	0,024169	
7	— 0,000892	0,173623	0,030146	
8	0,077848	0,137780	0,025044	
9	0,128770	+ 0,046262	0,018722	
10	0,125074	— 0,053370	0,018492	
11	— 0,066712	0,110066	0,016565	
12	+ 0,014393	— 0,100916	0,010391	
3,030827	+ 0,114161	0	0,013033	Min.
3,625773	+ 0,114593	0	0,013132	Max.
3,831706	+ 0,114492	+ 0,004496	0,013128	Min.
7,015587	— 0,002099	+ 0,173617	0,030147	Max.
9,440724	— 0,134688	0	0,018141	Min.
10,173467	— 0,118330	— 0,067421	0,018548	Max.

Tabelle VIII.

$y = 6\pi$.

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	0	+ 0,212207	0,045032	Max.
1	— 0,005291	0,187222	0,035080	
2	0,017713	0,128841	0,016914	
3	0,030684	0,074204	0,006448	
4	0,041775	0,052871	0,004540	
5	0,055411	0,064625	0,007247	
6	0,076993	0,080250	0,012368	
7	0,103193	0,064885	0,014859	
8	0,118375	+ 0,007126	0,014063	
9	0,103084	— 0,072681	0,015909	
10	— 0,050141	0,129002	0,019156	
11	+ 0,024503	0,128183	0,017031	
12	+ 0,086795	— 0,069153	0,012298	
3,831706	— 0,039917	+ 0,053703	0,004477	Min.
7,015587	— 0,103568	+ 0,064290	0,014860	Max.
8,088643	— 0,118510	0	0,014045	Min.
10,173467	— 0,037943	— 0,133493	0,019260	Max.

Tabelle IX.

$y = 7\pi$.

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	— 0,090946	+ 0,090946	0,016542	Max.
1	0,092742	0,067502	0,013158	
2	0,095331	+ 0,011836	0,009228	
3	0,093165	— 0,042950	0,010525	
4	0,083669	0,069547	0,011837	
5	0,069496	0,065233	0,009085	
6	0,055115	0,050886	0,005627	
7	0,040586	0,051440	0,004293	
8	— 0,019618	0,073600	0,005802	
9	+ 0,014183	0,098796	0,009962	
10	0,057961	0,097344	0,012835	
11	0,095375	— 0,053091	0,011915	
12	+ 0,104159	+ 0,020684	0,011277	
2,194827	— 0,095439	0	0,009109	Min.
3,831706	— 0,085725	— 0,067518	0,011908	Max
7,015587	— 0,040330	— 0,051637	0,004293	Min.
10,173467	+ 0,065532	— 0,092771	0,012901	Max.
11,733558	+ 0,105653	0	0,011163	Min.

Tabelle X.

$y = 8\pi$.

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	0	0	0	Min.
1	+ 0,000190	— 0,018684	0,000349	
2	0,002679	0,061687	0,003812	
3	0,010993	0,099549	0,010031	
4	0,025878	0,107904	0,012313	
5	0,043361	0,084168	0,008964	
6	0,057603	0,046848	0,005513	
7	0,065631	0,018864	0,004663	
8	0,069350	0,008873	0,004888	
9	0,071904	— 0,005808	0,005204	
10	0,071829	+ 0,009152	0,005243	
11	0,061297	0,043412	0,005642	
12	+ 0,031978	+ 0,082866	0,007889	
3,831706	+ 0,023033	— 0,108992	0,012410	Max.
7,015587	+ 0,065712	— 0,018576	0,004663	Min.
9,549377	+ 0,072574	0	0,005267	Max.
10,173467	+ 0,071032	+ 0,013827	0,005237	Min.

Tabelle XI.

$y = 9\pi$.

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	+ 0,070736	+ 0,070736	0,010007	Max.
1	0,069624	0,055367	0,007913	
2	0,067676	+ 0,020712	0,005009	
3	0,067323	— 0,007570	0,004590	
4	0,068660	— 0,008787	0,004791	
5	0,068172	+ 0,017625	0,004958	
6	0,061099	0,053530	0,006599	
7	0,045680	0,076446	0,007931	
8	0,024884	0,076750	0,006510	
9	+ 0,003842	0,062426	0,003912	
10	— 0,014690	0,049474	0,002664	
11	0,032149	0,046026	0,003152	
12	— 0,050776	+ 0,044629	0,004570	
2,649454	+ 0,067178	0	0,004513	Min.
3,831706	+ 0,068485	— 0,010782	0,004806	Max.
4,431978	+ 0,068964	0	0,004756	Min.
7,015587	+ 0,045384	+ 0,076624	0,007931	Max.
10,173467	— 0,017711	+ 0,048204	0,002637	Min.

Tabelle XII.

$y = 10\pi$.

z	$\frac{2}{y}U_1$	$\frac{2}{y}U_2$	M^2	
0	0	+ 0,127324	0,016211	Max.
1	— 0,001905	0,112361	0,012629	
2	0,006385	0,077695	0,006077	
3	0,011132	0,046173	0,002256	
4	0,015445	0,035955	0,001531	
5	0,021256	0,047323	0,002640	
6	0,031103	0,063679	0,005022	
7	0,044829	0,065343	0,006279	
8	0,058328	0,044755	0,005405	
9	0,065889	+ 0,011066	0,004464	
10	0,064357	— 0,018761	0,004494	
11	0,055052	0,034099	0,004193	
12	— 0,041669	— 0,037907	0,003173	
3,831706	— 0,014693	+ 0,035913	0,001506	Min.
7,015587	— 0,045056	+ 0,065189	0,006280	Max.
9,330828	— 0,066413	0	0,004411	Min.
10,173467	— 0,063204	— 0,022554	0,004503	Max.

Tabelle XIII.

$U_2 = 0$.

y	z	$\operatorname{arctg} \frac{\partial y}{\partial z}$
0	5,135630	90°
	8,417236	90
	11,619857	90
π	4,715350	− 75° 32′ 25″
	8,306007	− 85 34 53
	11,578479	− 88 33 33
2π	3,597652	− 66° 10′ 39″
	7,887900	− 79 7 14
	11,413520	− 85 20 10
3π	1,996855	− 60° 12′ 28″
	7,087780	− 72 29 1
	11,036130	− 80 51 18
4π	0	± 54° 44′ 8″
	5,897757	− 65 48 37
	10,386075	− 75 49 38
12	0,391957	− 55° 52′ 19″
13	0,312198	+ 53 44 17
14	1,099179	+ 50 46 23

y	z	$\operatorname{arctg} \frac{\partial y}{\partial z}$
5π	3,030827	+ 18° 26′ 40
	3,625773	− 15 46 0
	9,440724	− 70 33 16
6π	8,088643	− 60° 57′ 48″
20,5	3,644580	− 28° 41′ 30″
	5,390556	+ 13 2 20
	6,647970	− 23 29 34
7π	2,194827	− 53° 22′ 25″
	11,733558	− 67 30 14
8π	0	± 54° 44′ 8″
	9,549377	− 25 3 40
26,2	6,377985	− 43° 38′ 35″
9π	2,649454	+ 36° 46′ 13″
	4,431978	− 38 29 40
10π	9,330828	− 48° 29′ 19″

Tabelle XIV.

$z = 0$.

$\frac{1}{4} y$	$M^2 = \left(\frac{\sin \frac{1}{4} y}{\frac{1}{4} y}\right)^2$
0,000000	1,000000
4,493409	0,047190
7,725252	0,016480
10,904120	0,008340
14,066194	0,005029
17,220753	0,003361
20,371302	0,002404
23,519446	0,001805
26,666054	0,001404

Tabelle XV.

$y = z.$

z	$\frac{2}{z} U_1(z, z)$	$\frac{2}{z} U_2(z, z)$	M^2	z	$\frac{2}{z} U_1(z, z)$	$\frac{2}{z} U_2(z, z)$	M^2
0	+ 1,000000	0,000000	1,000000	6,5	+ 0,033095	— 0,110230	0,013246
0,5	0,958851	+ 0,121775	0,934224	7,0	0,093855	0,064832	0,013011
1,0	0,841471	0,224896	0,758652	7,5	0,125067	— 0,010706	0,015756
1,5	0,664997	0,294060	0,528692	8,0	0,123670	+ 0,039644	0,016866
2,0	0,454649	0,320019	0,309118	8,5	0,093940	0,075759	0,014564
2,5	0,239389	0,301104	0,147970	9,0	+ 0,045791	0,091200	0,010414
3,0	+ 0,047040	0,243314	0,061414	9,5	— 0,007911	0,084552	0,007212
3,5	— 0,100224	0,158951	0,035312	10,0	0,054402	0,059314	0,006478
4,0	0,189201	+ 0,064124	0,039909	10,5	0,083781	+ 0,022751	0,007537
4,5	0,217229	— 0,024388	0,047783	11,0	0,090908	— 0,015965	0,008519
5,0	0,191785	0,092252	0,045292	11,5	0,076126	0,047909	0,008091
5,5	0,128280	0,130093	0,033380	12,0	— 0,044714	— 0,066347	0,006401
6,0	— 0,046569	— 0,134921	0,020374				

Tabelle XVI.

$y = \pi.$

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,636620	0,405285	Max.
1	+ 0,088772	0,479808	0,238096	
2	0,213022	+ 0,055002	0,048404	
3	+ 0,055452	— 0,383136	0,149868	
4	— 0,384893	— 0,275023	0,223781	
5	— 0,252583	+ 0,450640	0,266874	
6	+ 0,636026	+ 0,278235	0,481944	
7	+ 0,023425	— 0,676734	0,458517	
8	— 0,531656	+ 0,430319	0,467833	
9	+ 0,544147	— 0,189447	0,331986	
10	— 0,630010	+ 0,148505	0,418966	
11	+ 0,620117	— 0,245499	0,444815	
12	— 0,342522	+ 0,503938	0,371274	
2,109007	+ 0,214967	0	0,046211	Min.
3,831706	— 0,318693	— 0,352676	0,225945	Max.
4,408711	— 0,463583	0	0,214909	Min.
6,238883	+ 0,702334	0	0,493272	Max.
7,015587	— 0,000113	— 0,677116	0,458485	Min.
7,706947	— 0,697260	0	0,486171	Max.
8,892654	+ 0,573357	0	0,328738	Min.
9,925800	— 0,647545	0	0,419315	Max.
10,173467	— 0,457162	+ 0,456870	0,417726	Min.
10,886717	+ 0,669235	0	0,447875	Max.
11,755839	— 0,593370	0	0,352088	Min.

Tabelle XVII.

$y = 2\pi$.

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,318310	0,101321	Max.
1	+ 0,022268	0,242644	0,059372	
2	0,057118	+ 0,059998	0,006862	
3	+ 0,041158	— 0,115909	0,015129	
4	— 0,044515	0,159699	0,027485	
5	0,118189	— 0,025675	0,014628	
6	— 0,050182	+ 0,164916	0,029716	
7	+ 0,145567	+ 0,162989	0,047755	
8	+ 0,189077	— 0,111169	0,048109	
9	— 0,116652	— 0,269389	0,086178	
10	— 0,311918	+ 0,073683	0,102722	
11	+ 0,114359	+ 0,323899	0,117989	
12	+ 0,331053	— 0,155667	0,133828	
2,301754	+ 0,060124	0	0,003615	Min.
3,831706	— 0,027428	— 0,165261	0,028063	Max.
5,126976	— 0,119505	0	0,014281	Min.
7,015587	+ 0,148378	+ 0,161446	0,048081	Max.
7,653560	+ 0,213224	0	0,045465	Min.
9,847172	— 0,320816	0	0,102923	Max.
10,173467	— 0,279869	+ 0,155411	0,102479	Min.
11,741016	+ 0,369863	0	0,136799	Max.

Tabelle XVIII.

$y = 3\pi$.

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,212207	0,045032	Max.
1	+ 0,009903	0,162096	0,026373	
2	0,025710	+ 0,044154	0,002611	
3	+ 0,020817	— 0,065351	0,004704	
4	— 0,012549	0,096321	0,009435	
5	0,046240	— 0,034488	0,003328	
6	— 0,036719	+ 0,062157	0,005212	
7	+ 0,025132	0,099339	0,010500	
8	0,081135	+ 0,025841	0,007251	
9	+ 0,046848	— 0,095896	0,011391	
10	— 0,074775	— 0,118568	0,019650	
11	— 0,133189	+ 0,030679	0,018681	
12	+ 0,007645	+ 0,171787	0,029569	
2,354824	+ 0,027450	0	0,000754	Min.
3,831706	— 0,005734	— 0,098152	0,009667	Max.
5,349056	— 0,049549	0	0,002455	Min.
7,015587	+ 0,026281	+ 0,099054	0,010502	Max.
8,208965	+ 0,083474	0	0,006968	Min.
10,173467	— 0,095475	— 0,103520	0,019832	Max.
10,839567	— 0,136036	0	0,018506	Min.

Tabelle XIX.

$y = 4\pi$.

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,159155	0,025330	Max.
1	+ 0,005572	0,121669	0,014834	
2	0,014526	+ 0,034215	0,001382	
3	+ 0,012219	— 0,045730	0,002241	
4	— 0,005486	0,068629	0,004740	
5	0,024001	— 0,027959	0,001358	
6	— 0,021696	+ 0,035306	0,001717	
7	+ 0,006592	0,063628	0,004092	
8	0,036976	+ 0,029385	0,002227	
9	+ 0,033318	— 0,038977	0,002629	
10	— 0,013463	0,072886	0,005494	
11	0,060545	— 0,027361	0,004414	
12	— 0,044025	+ 0,061663	0,005741	
2,375753	+ 0,015598	0	0,000243	Min.
3,831706	— 0,001850	— 0,069715	0,004864	Max.
5,430385	— 0,026493	0	0,000702	Min.
7,015587	+ 0,007144	+ 0,063574	0,004093	Max.
8,438331	+ 0,041258	0	0,001702	Min.
10,173467	— 0,023504	— 0,070909	0,005580	Max.
11,312676	— 0,064406	0	0,004148	Min.

Tabelle XX.

$y = 5\pi$.

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,127324	0,016211	Max.
1	+ 0,003566	0,097369	0,009493	
2	0,009316	+ 0,027780	0,000859	
3	+ 0,007972	— 0,035346	0,001313	
4	— 0,003028	0,052070	0,002720	
5	0,014668	— 0,022719	0,000731	
6	— 0,013915	+ 0,024568	0,000797	
7	+ 0,002302	0,046307	0,002150	
8	0,020595	+ 0,024054	0,001003	
9	+ 0,021117	— 0,021724	0,000918	
10	— 0,002141	0,048087	0,002317	
11	0,029850	— 0,027076	0,001624	
12	— 0,030738	+ 0,025355	0,001588	
2,385914	+ 0,010031	0	0,000101	Min.
3,831706	— 0,000821	— 0,052865	0,002795	Max.
5,466020	— 0,016424	0	0,000270	Min.
7,015587	+ 0,002624	+ 0,046295	0,002150	Max.
8,532469	+ 0,024022	0	0,000577	Min.
10,173467	— 0,007509	— 0,048029	0,002363	Max.
11,536020	— 0,035216	0	0,001240	Min.

Tabelle XXI.

$y = 6\pi$.

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,106103	0,011258	Max.
1	+ 0,002477	0,081156	0,006592	
2	0,006476	+ 0,023335	0,000586	
3	+ 0,005594	— 0,028890	0,000366	
4	— 0,001917	0,043819	0,001924	
5	0,009906	— 0,018991	0,000459	
6	— 0,009616	+ 0,018958	0,000452	
7	+ 0,000963	0,036479	0,001332	
8	0,013124	+ 0,020549	0,000595	
9	0,014204	— 0,014730	0,000419	
10	+ 0,000298	0,035334	0,001249	
11	— 0,017291	0,022325	0,000797	
12	— 0,020232	+ 0,013475	0,000591	
2,391577	+ 0,006984	0	0,000049	Min.
3,831706	— 0,000371	— 0,044454	0,001976	Max.
5,484149	— 0,011177	0	0,000125	Min.
7,015587	+ 0,001175	+ 0,036476	0,001332	Max.
8,578895	+ 0,015685	0	0,000246	Min.
10,173467	— 0,003003	— 0,035609	0,001277	Max.
11,643398	— 0,021757	0	0,000473	Min.

Tabelle XXII.

$y = 7\pi$.

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,090946	0,008271	Max.
1	+ 0,001820	0,069570	0,004843	
2	0,004761	+ 0,020097	0,000427	
3	+ 0,004117	— 0,024469	0,000616	
4	— 0,001326	0,037187	0,001385	
5	0,007149	— 0,016277	0,000316	
6	— 0,007029	+ 0,015516	0,000290	
7	+ 0,000479	0,030185	0,000911	
8	0,009122	+ 0,016738	0,000363	
9	0,010150	— 0,011166	0,000228	
10	+ 0,000826	0,027951	0,000782	
11	— 0,011275	— 0,018474	0,000468	
12	— 0,014010	+ 0,008673	0,000272	
2,395025	+ 0,005140	0	0,000026	Min.
3,831706	— 0,000201	— 0,037720	0,001423	Max.
5,494497	— 0,008103	0	0,000066	Min.
7,015587	+ 0,000629	+ 0,030185	0,000912	Max.
8,603451	+ 0,011057	0	0,000122	Min.
10,173467	— 0,001417	+ 0,028271	0,000801	Max.
11,698032	— 0,014723	0	0,000217	Min.

Tabelle XXIII.

$y = 8\pi$.

z	$\frac{2}{y}V_1$	$\frac{2}{y}V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,079578	0,006333	Max.
1	+ 0,001393	0,060878	0,003708	
2	0,003647	+ 0,017639	0,000324	
3	+ 0,003179	— 0,021243	0,000461	
4	— 0,000974	0,032324	0,001046	
5	0,005394	— 0,014231	0,000232	
6	— 0,005359	+ 0,013178	0,000202	
7	+ 0,000228	0,025804	0,000666	
8	0,006731	+ 0,014458	0,000236	
9	0,007608	— 0,009042	0,000140	
10	+ 0,000876	0,023198	0,000539	
11	— 0,007971	— 0,015655	0,000309	
12	— 0,010231	+ 0,006317	0,000145	
2,397305	+ 0,003939	0	0,000016	Min.
3,831706	— 0,000118	— 0,032785	0,001075	Max.
5,500947	— 0,006147	0	0,000038	Min.
7,015587	— 0,000340	+ 0,025806	0,000666	Max.
8,617726	+ 0,008229	0	0,000068	Min.
10,173467	— 0,000753	— 0,023502	0,000553	Max.
11,728163	— 0,010640	0	0,000113	Min.

Tabelle XXIV.

$V_0 = o$.

y	z	$\operatorname{arctg}\frac{\partial y}{\partial z}$
π	2,109007	+ 83° 1′ 48″
	4,408711	67 57 9
	6,238883	54 31 38
	7,706947	44 46 28
	8,892654	38 33 8
	9,925800	35 11 6
	10,886717	32 18 0
	11,755839	29 48 18
2π	2,301754	88° 23′ 40″
	5,126976	83 19 5
	7,653560	74 54 5
	9,847172	65 54 12
	11,741016	57 36 9
3π	2,354824	89° 26′ 17″
	5,349056	87 43 7
	8,208965	83 48 34
	10,839567	77 56 28

y	z	$\operatorname{arctg}\frac{\partial y}{\partial z}$
4π	2,375753	+ 89° 44′ 49″
	5,430385	89 4 17
	8,438331	87 24 47
	11,312676	84 13 39
5π	2,385914	89° 51′ 57″
	5,466020	89 33 17
	8,532469	88 49 20
	11,536020	87 15 32
6π	2,391577	89° 55′ 15″
	5,484149	89 45 26
	8,578895	89 24 18
	11,643398	88 38 40
7π	2,395025	89° 56′ 59″
	5,494497	89 51 15
	8,603451	89 40 3
	11,698092	89 16 50
8π	2,397305	89° 57′ 58″
	5,500947	89 54 22
	8,617726	89 47 56
	11,728163	89 35 38

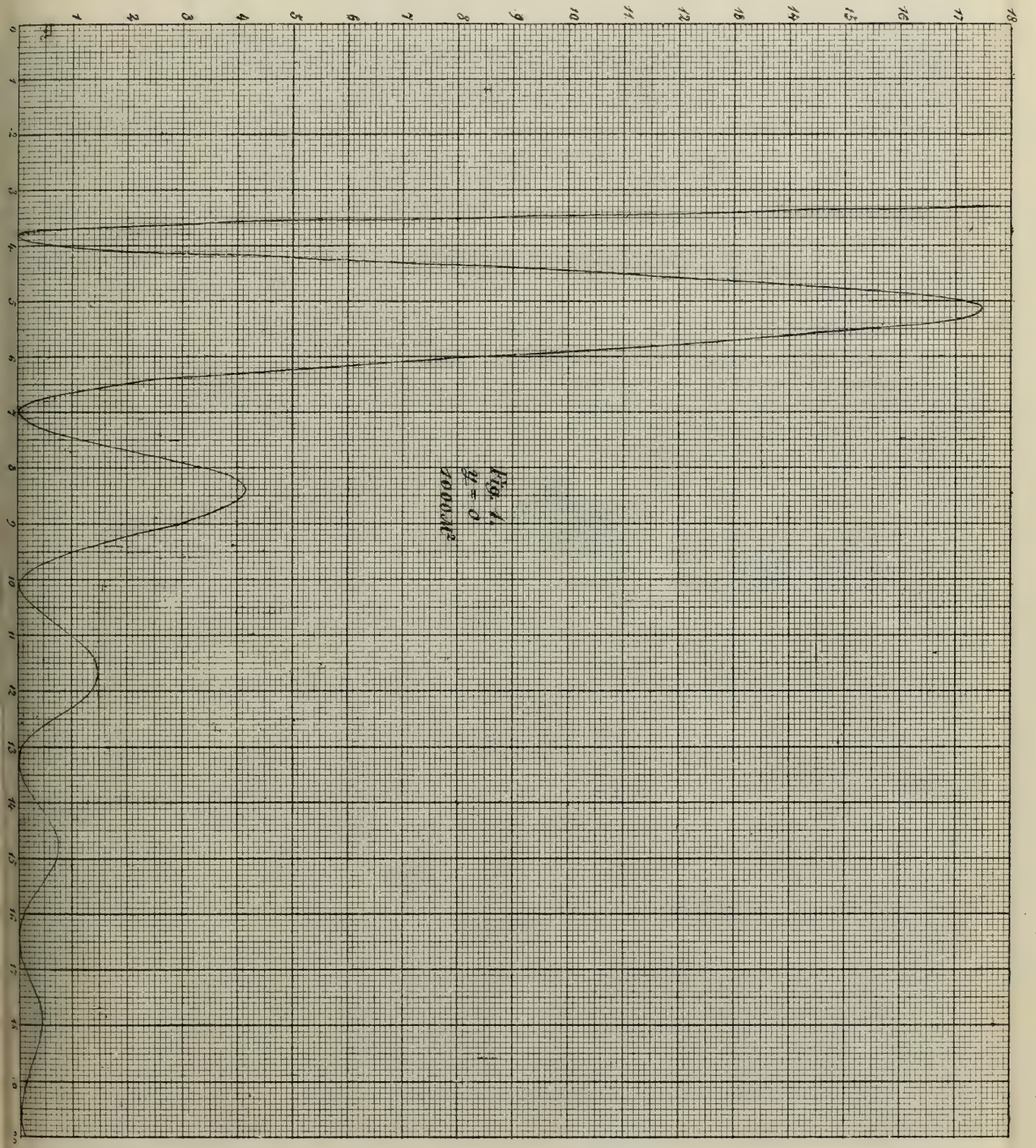
Tabelle XXV.

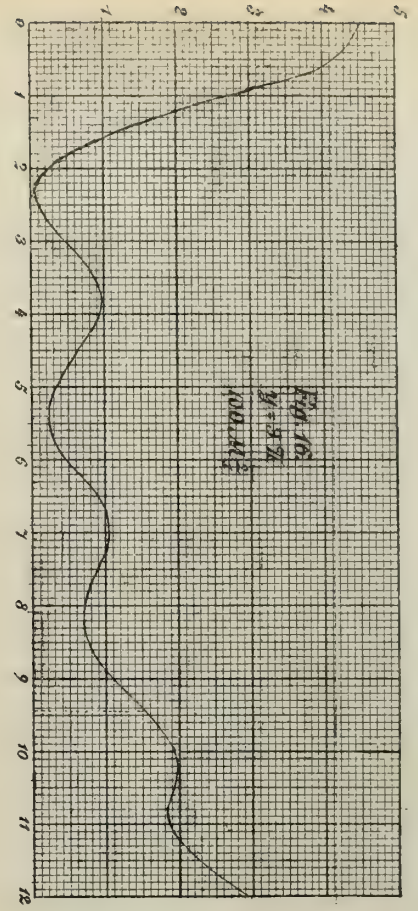
$y = z$.

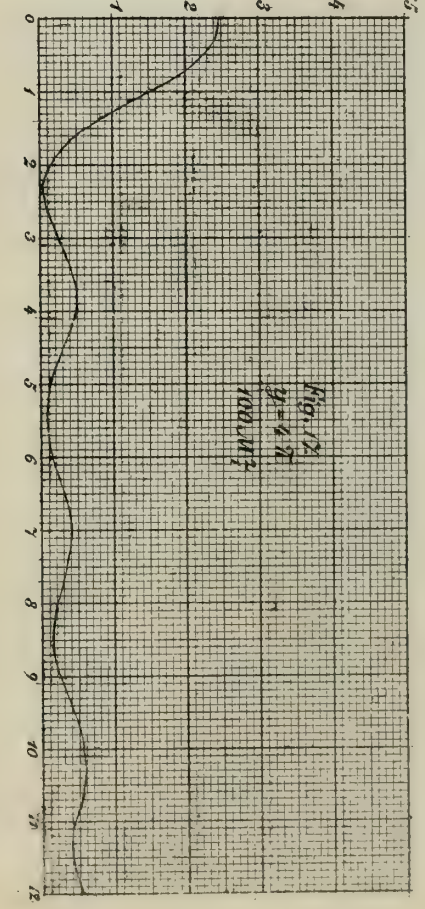
z	$\frac{2}{z} V_1(z, z)$	$\frac{2}{z} V_0(z, z)$	M_1^2
0	+ 1,000000	∞	∞
0,5	0,958851	+ 3,632105	14,112583
1,0	0,841471	1,305500	2,412404
1,5	0,664997	+ 0,388377	0,593057
2,0	0,454649	— 0,096128	0,215946
2,5	0,239389	0,339811	0,172778
3,0	+ 0,047040	0,416682	0,175837
3,5	— 0,100224	0,376167	0,151547
4,0	0,189201	0,262698	0,104807
4,5	0,217229	— 0,118075	0,061130
5,0	0,191785	+ 0,021213	0,037231
5,5	0,128280	0,127605	0,032739
6,0	— 0,046569	0,185136	0,036444
6,5	+ 0,033095	0,190259	0,037294
7,0	0,093855	0,150569	0,031480
7,5	0,125067	0,081730	0,022321
8,0	0,123670	+ 0,003269	0,015305
8,5	0,093940	— 0,065891	0,013166
9,0	+ 0,045791	0,111274	0,014479
9,5	— 0,007911	0,125379	0,015783
10,0	0,054402	0,108501	0,014732
10,5	0,083781	0,067827	0,011620
11,0	0,090908	— 0,015161	0,008494
11,5	0,076126	+ 0,036144	0,007102
12,0	— 0,044714	+ 0,074295	0,007519

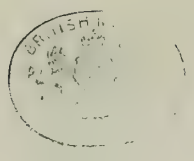
Tafel 1 zu **E. Lommel**, Die Beugungserscheinungen etc.

(folgen 8 weitere unbezeichnete Curventafeln).









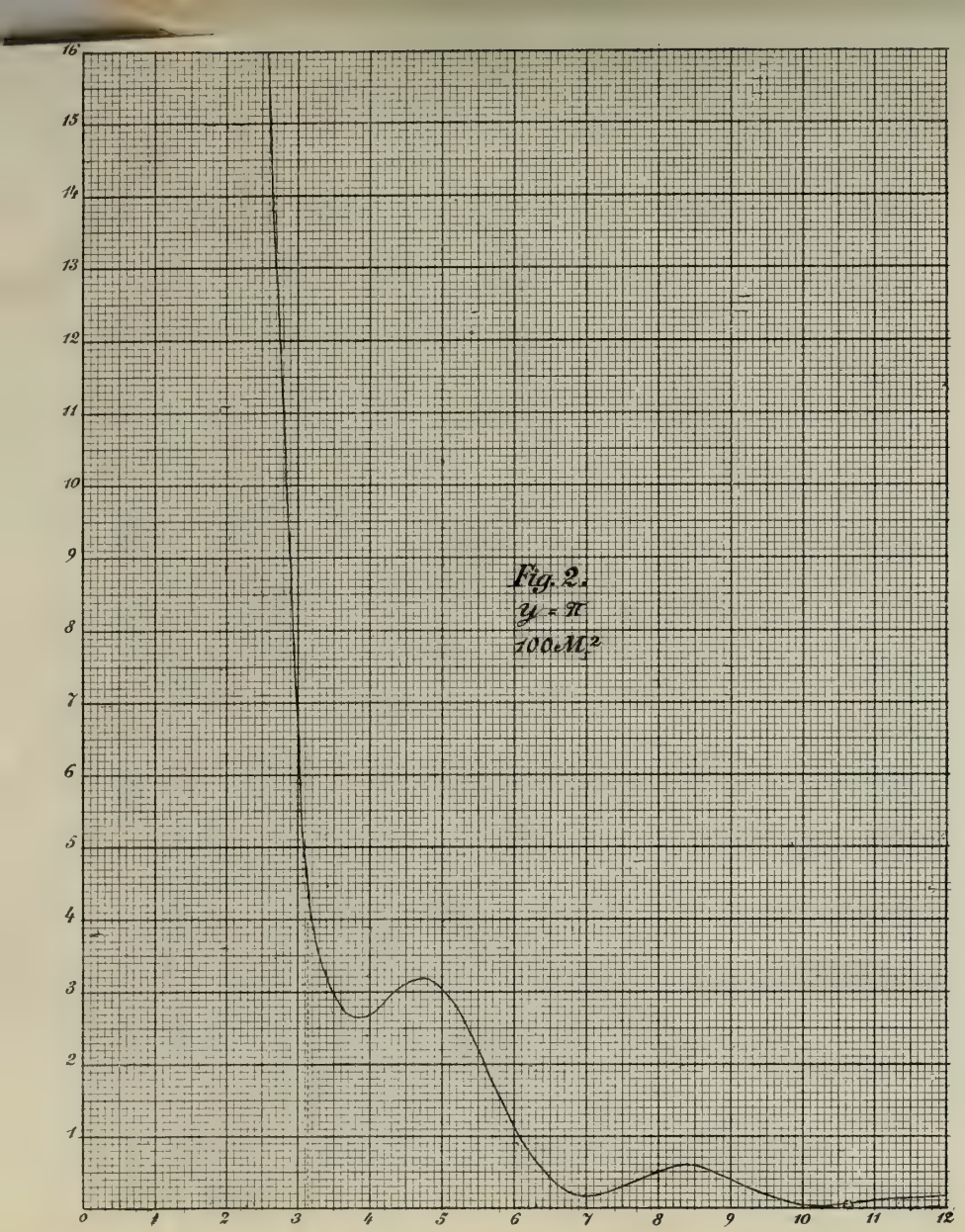


Fig. 2.
$y = \pi$
$100 M^2$

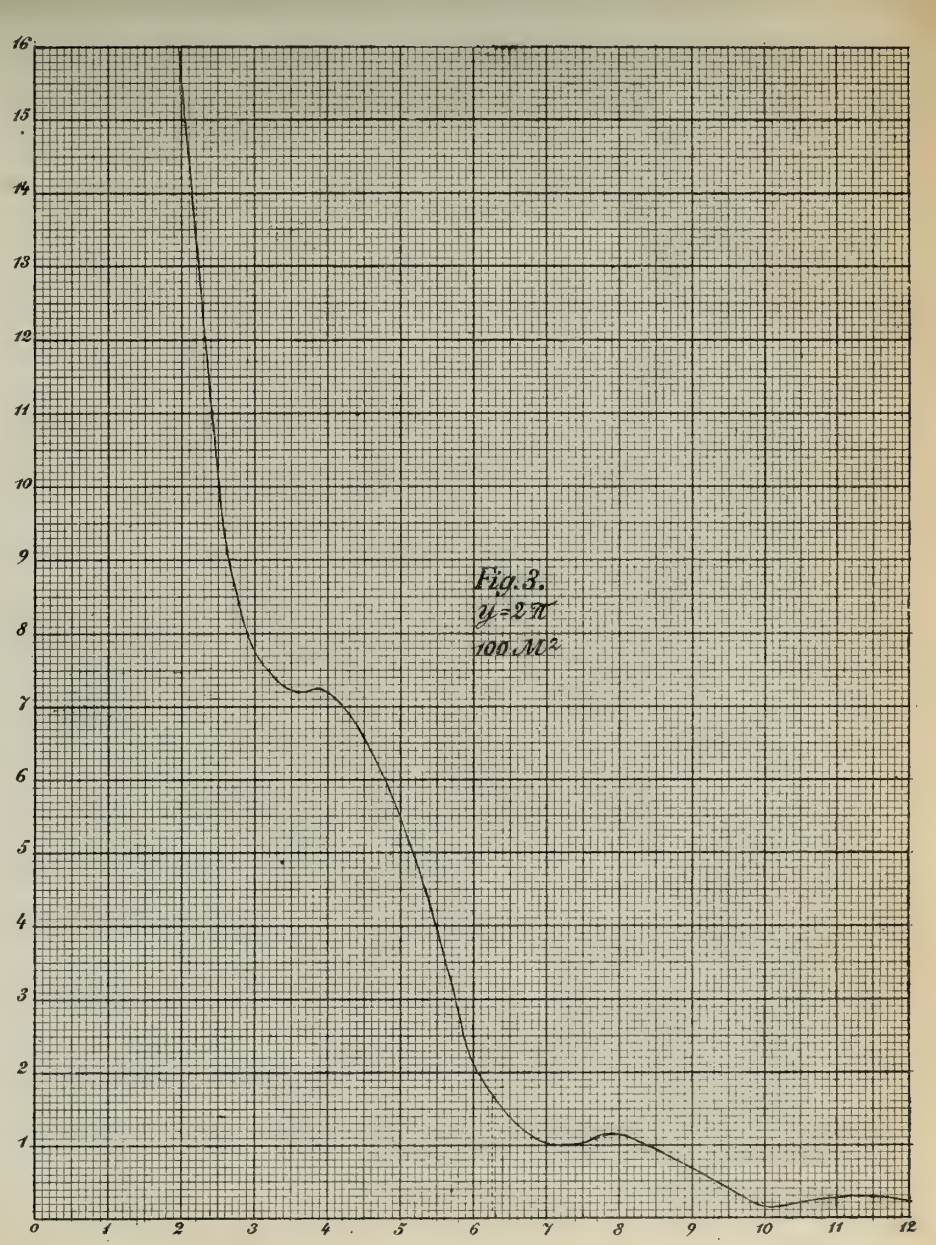


Fig. 3.
$y = 2\pi$
$100 M^2$

BRITISH MUSEUM

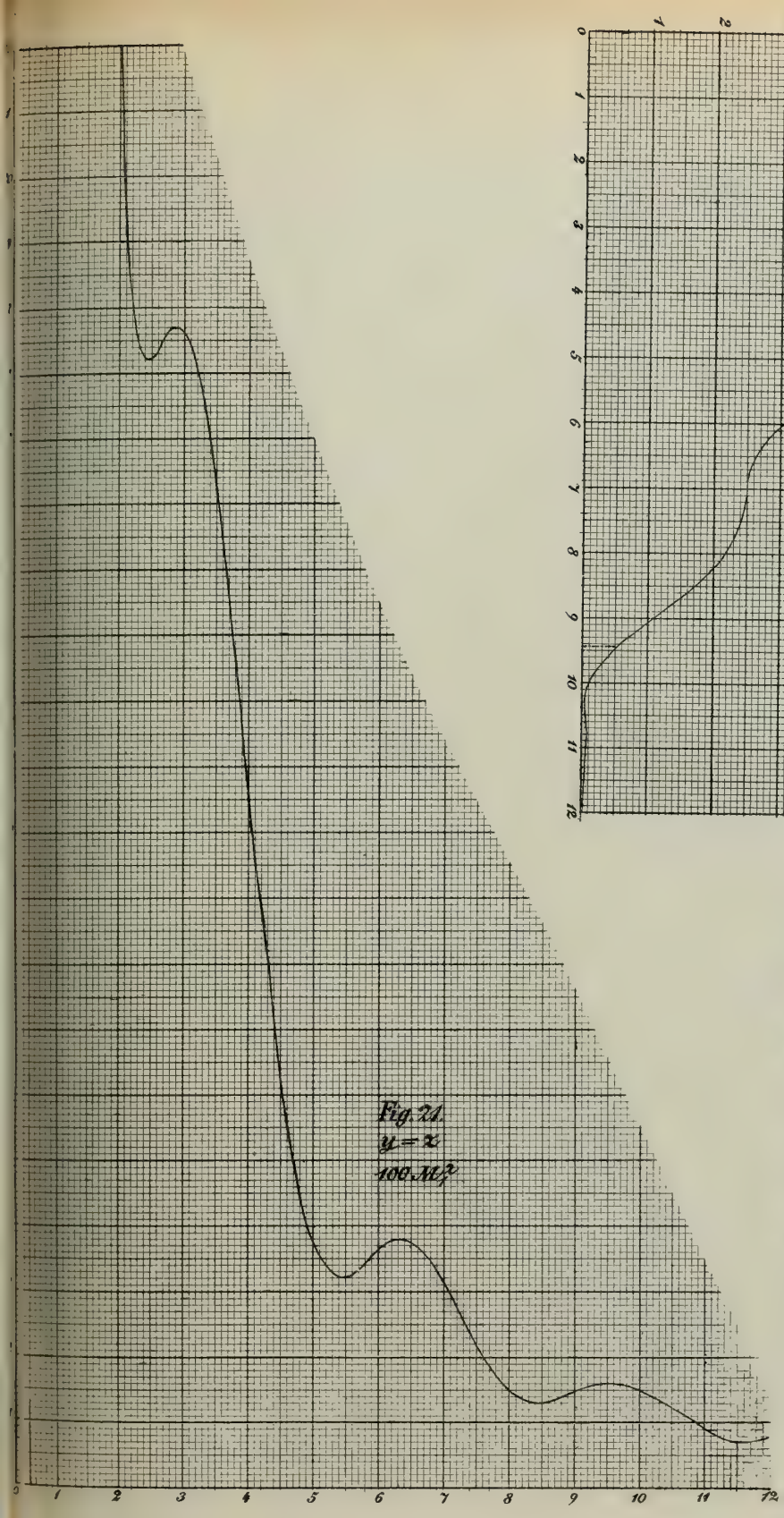


Fig. 21.
y = x
100.M₂²

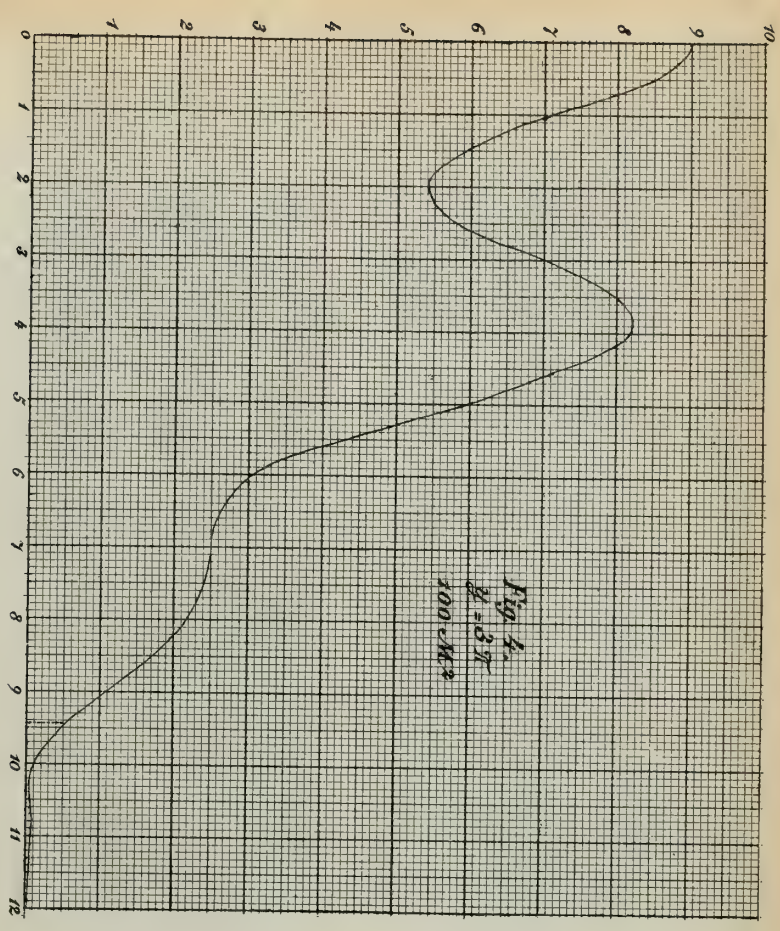


Fig. 4.
y = x
100.M₂²

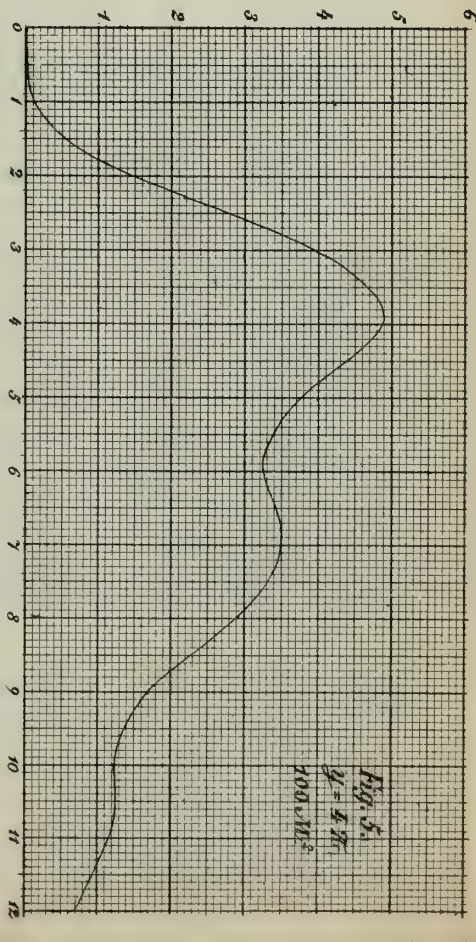


Fig. 5.
y = x
100.M₂²

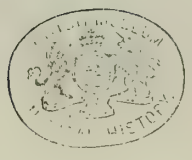
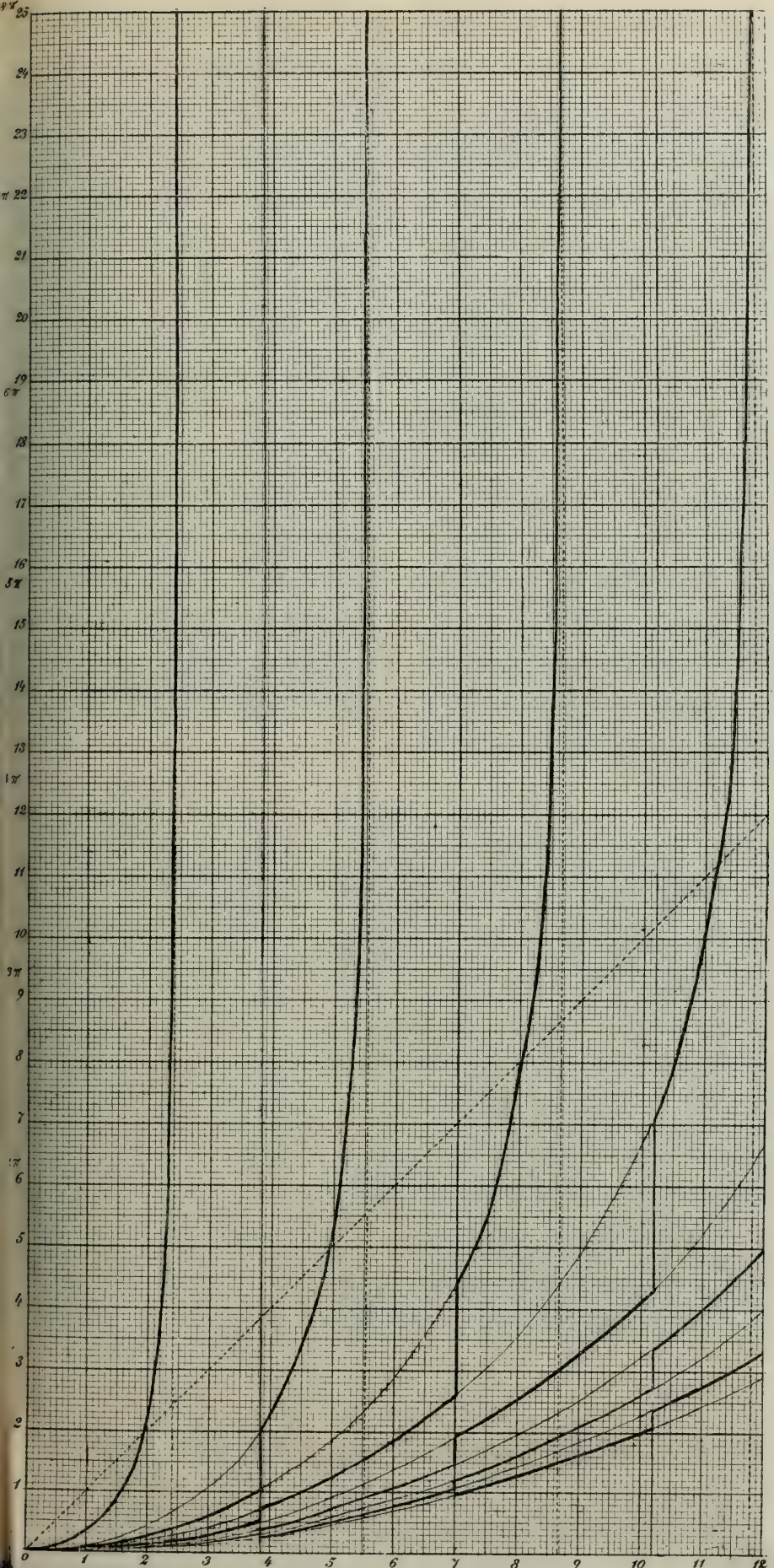
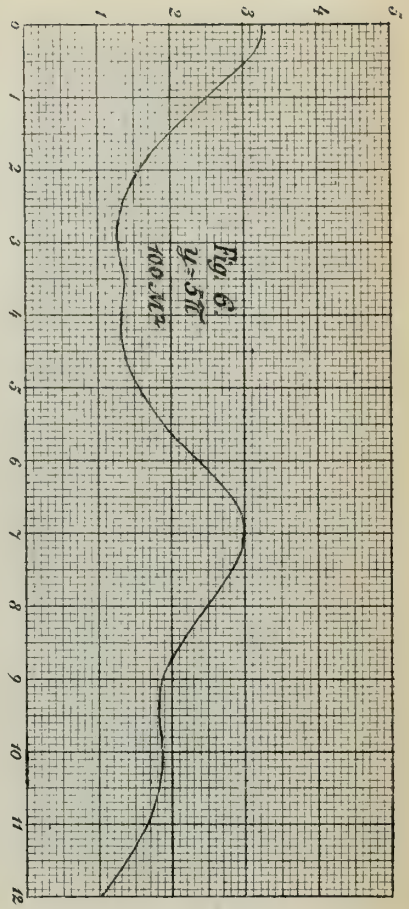
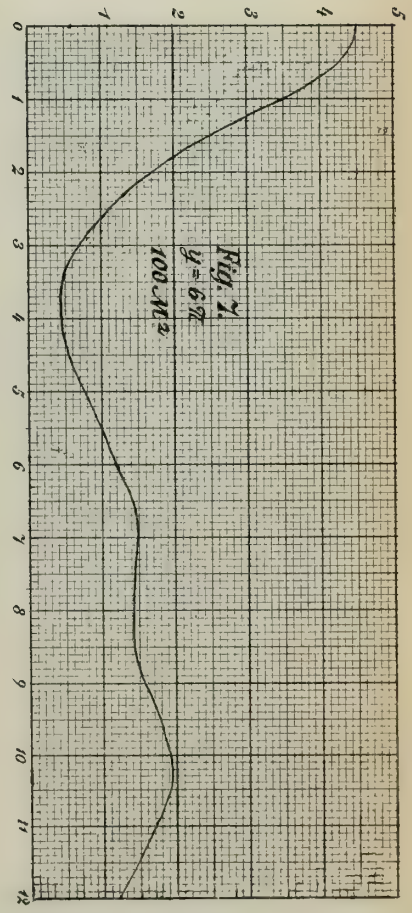


Fig: 20.
$J_1 = o$, $V_o = o$







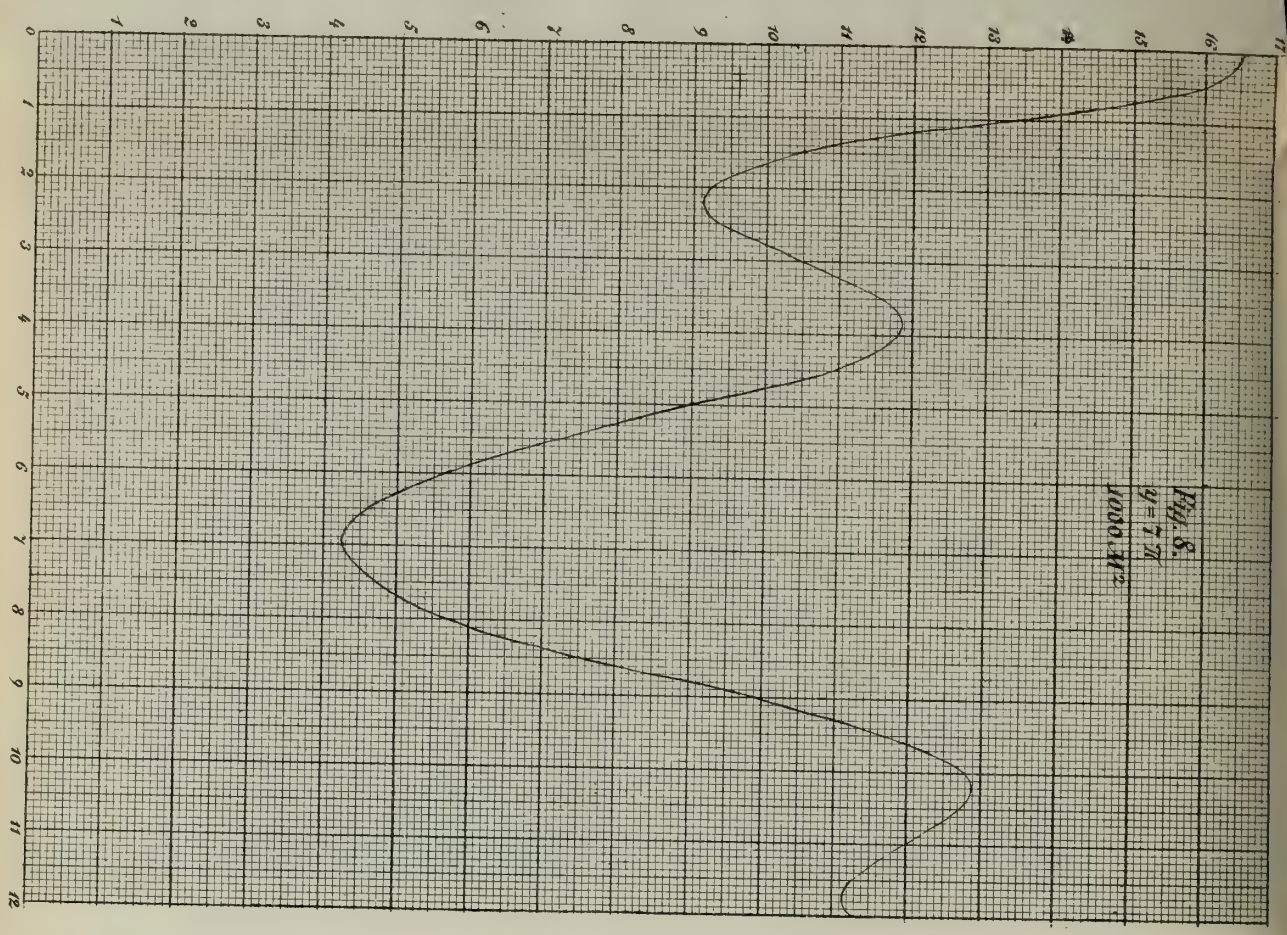


Fig. 8.
$\gamma = 7\,\pi$
$1000.M^2$

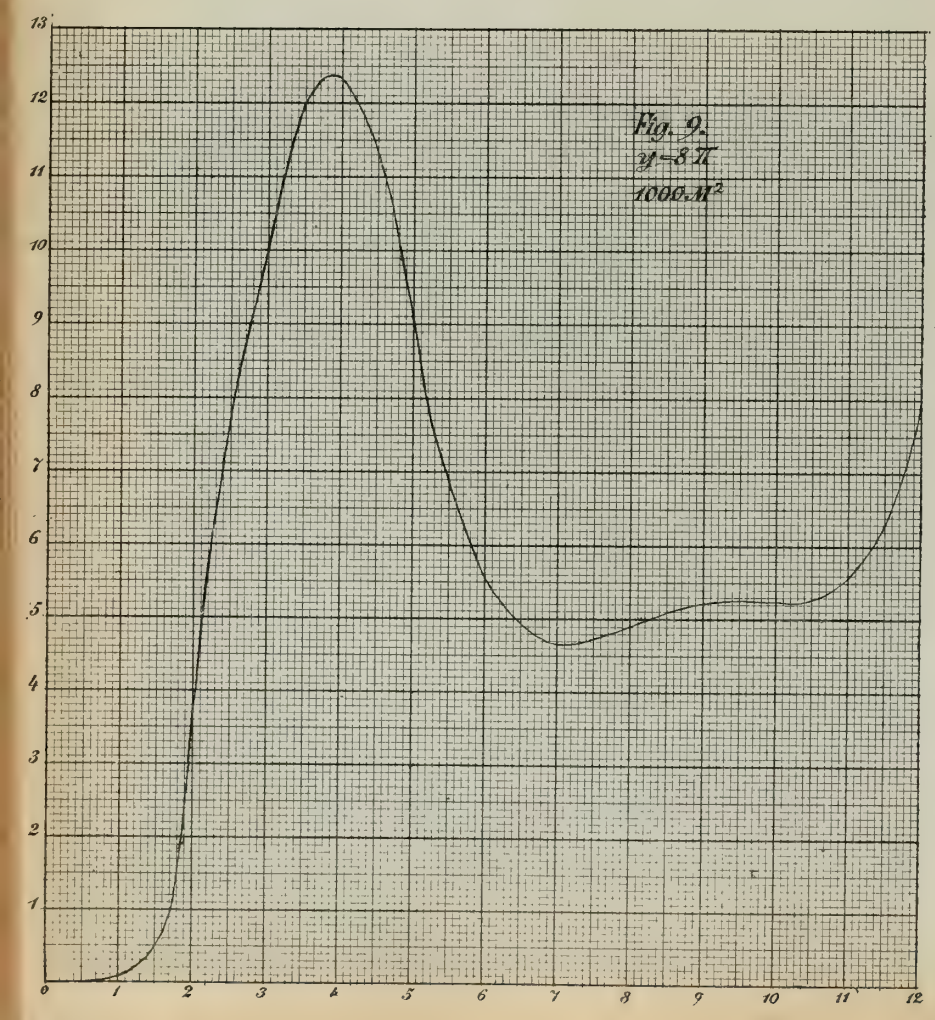


Fig. 9.
$\gamma = 8\,\pi$
$1000.M^2$

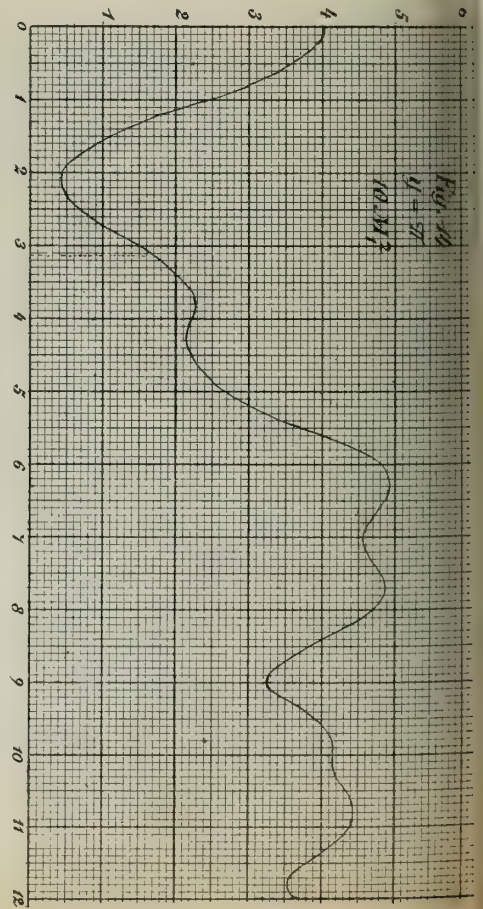


Fig. 10
$\gamma = 5\pi$
$1000.M^2$

Fig. 11.
y = 10 x
1000 M²

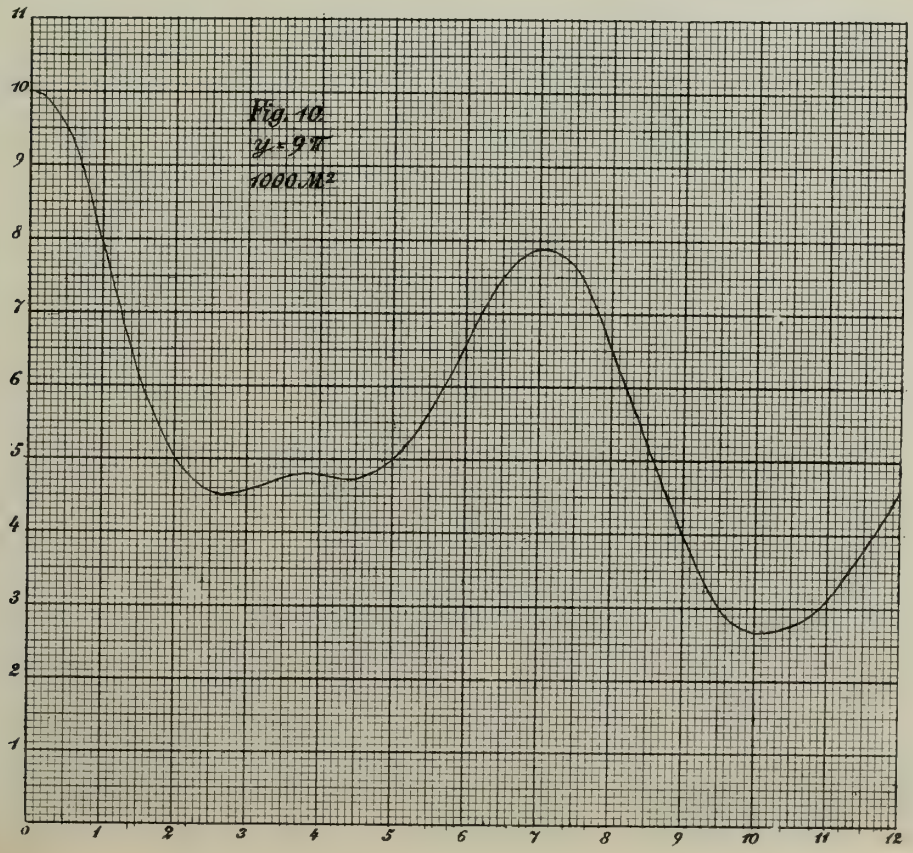


Fig. 10.
y = 9 x
1000 M²

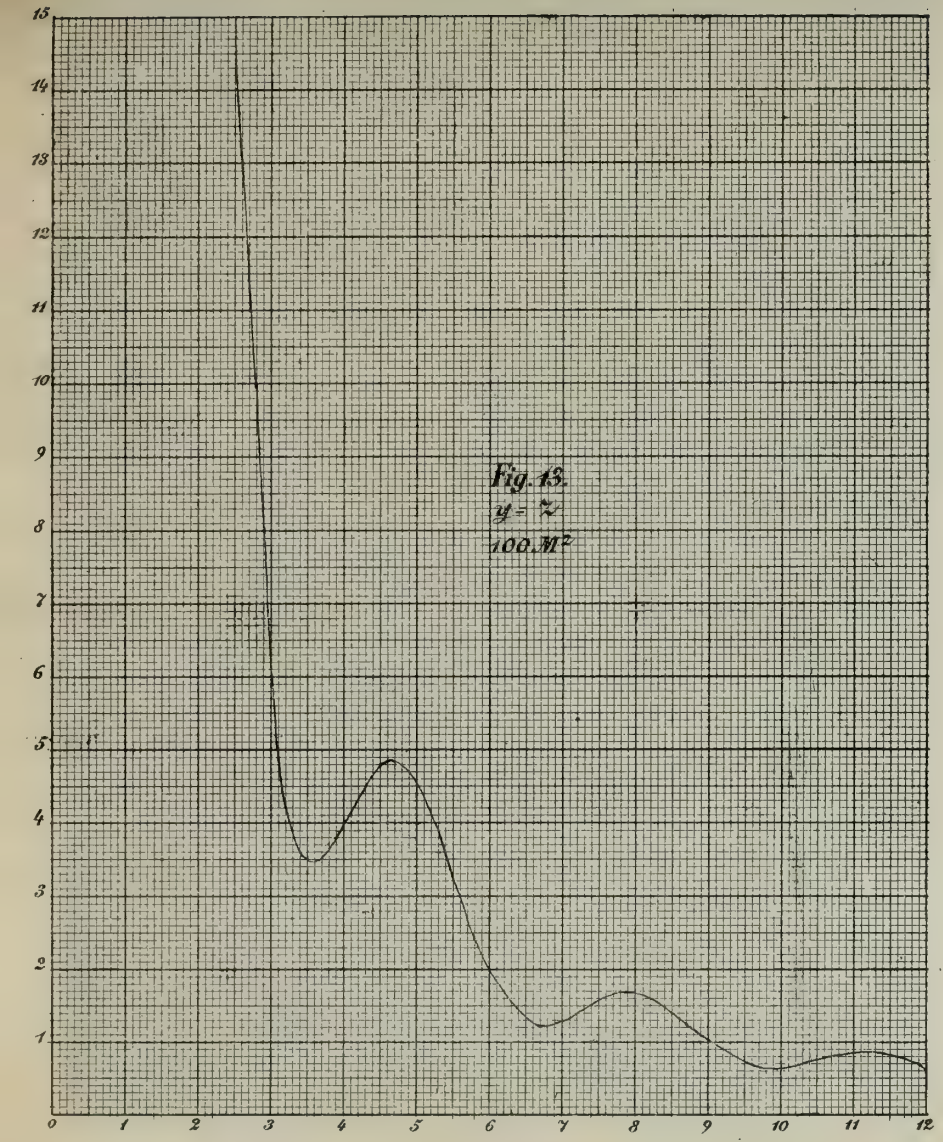


Fig. 13.
$y = \frac{\pi}{100.M^2}$

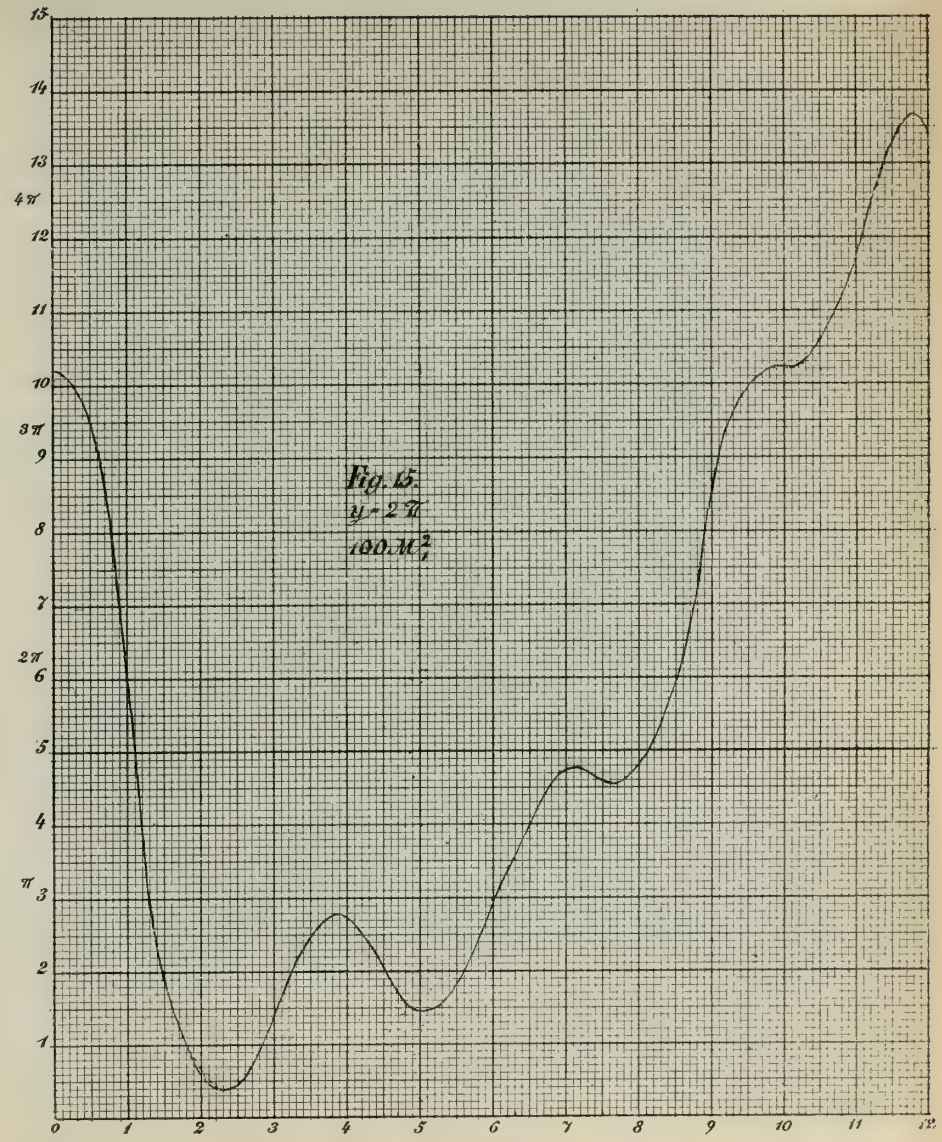


Fig. 15.
$y = \frac{2\pi}{100.M_1^2}$

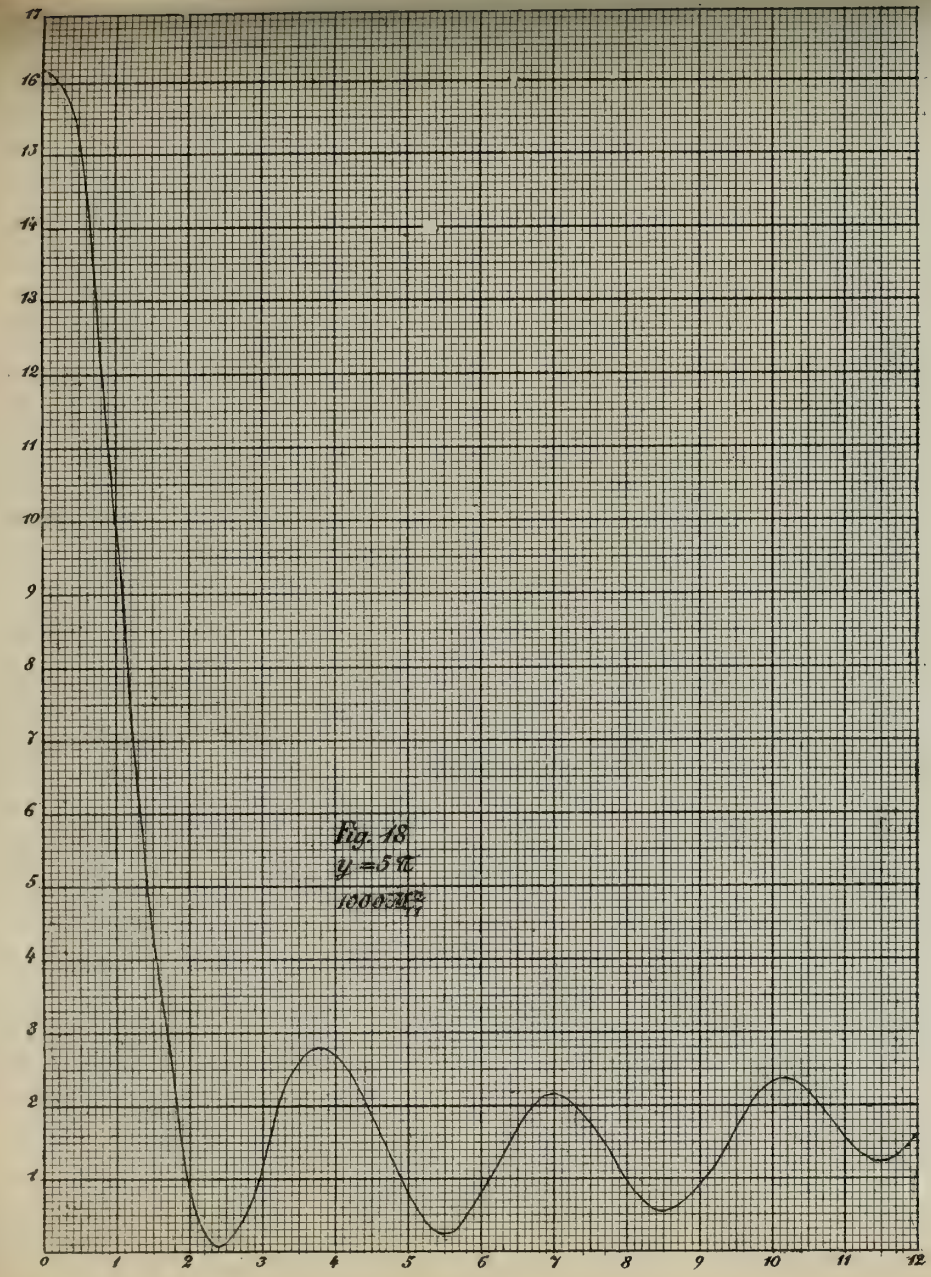


Fig. 18
y = 5 π
1000 M₁²

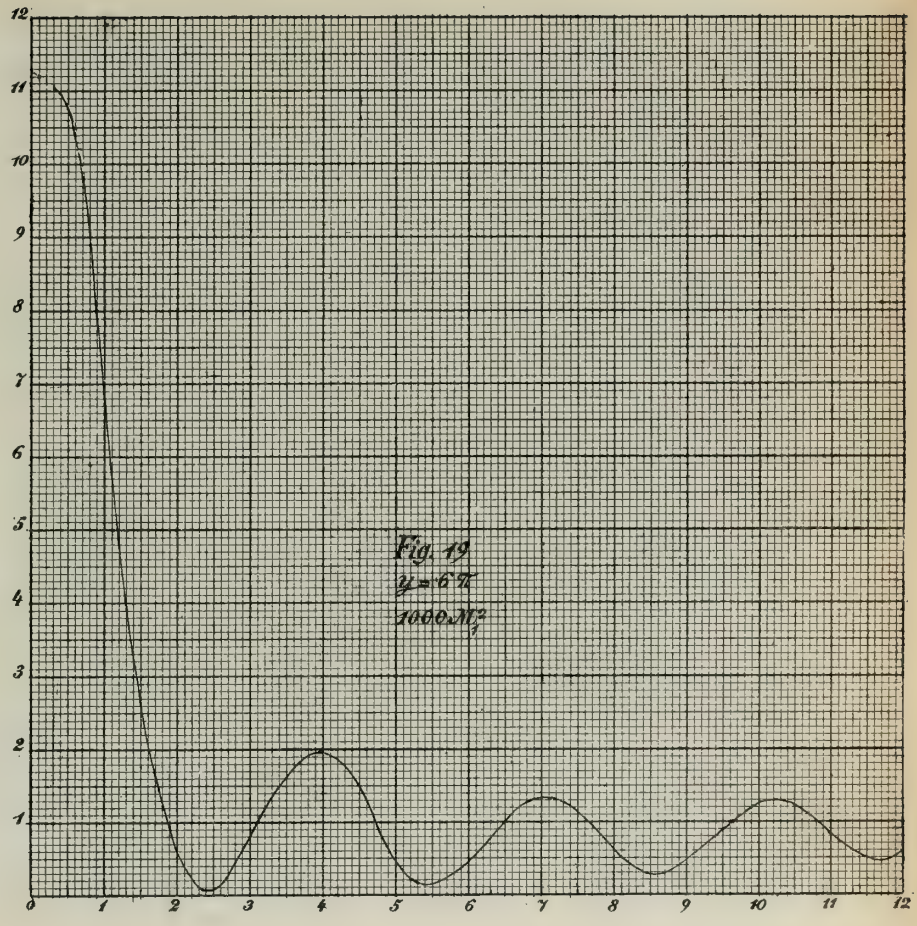
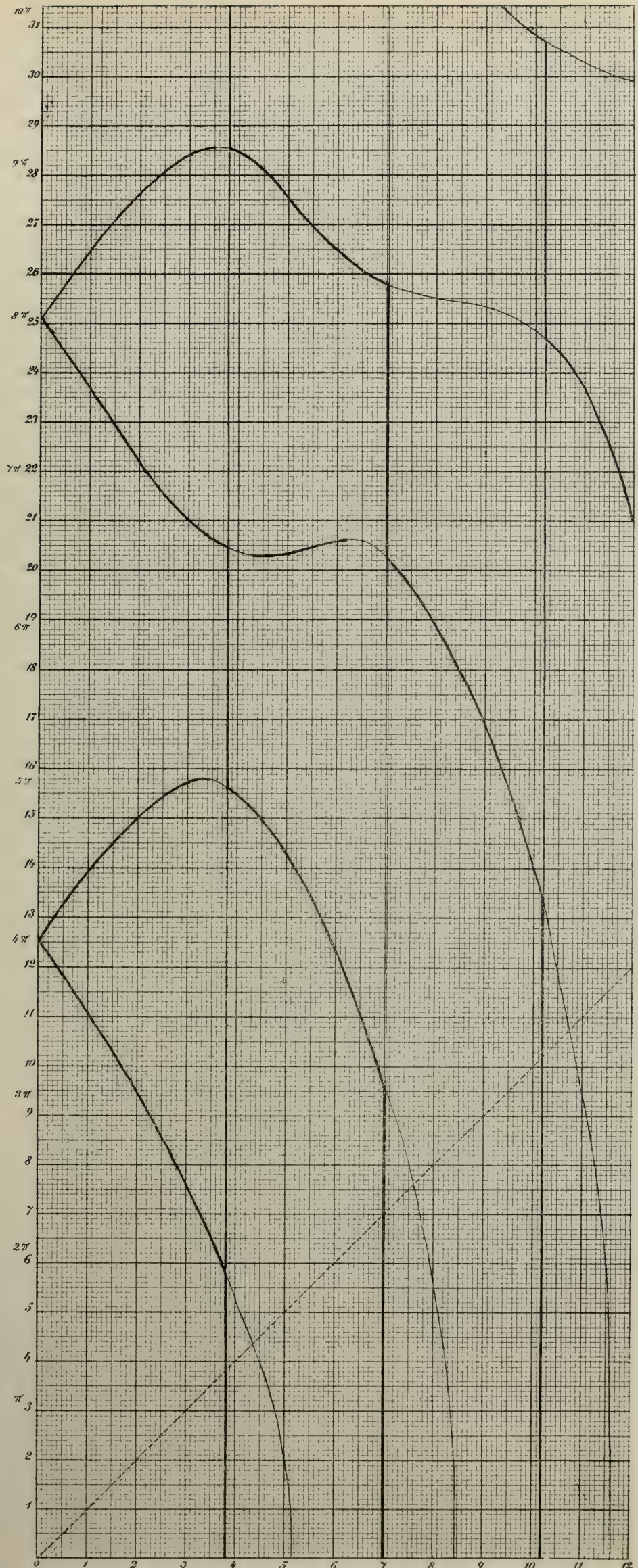


Fig. 19
y = 6 π
1000 M₁²

NATURAL HISTORY

Fig. 12.

$J_1 = 0$; $V_2 = 0$.



Ueber

die kanonischen Perioden

der

Abel'schen Integrale.

Von

J. Lüroth
in Freiburg in Baden.

Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale.

Riemann hat in seiner Theorie der Abel'schen Functionen die Lehre von den Perioden auf die Theorie des Zusammenhanges der Flächen gegründet. Wenn auch bei Flächen von leicht zu übersehender Gestalt es einfach ist sich vom Verlauf der Querschnitte eine Vorstellung zu machen, so ist dies doch für ein so complicirtes Gebilde, wie eine Riemann'sche Fläche es ist, ziemlich schwer. Jedenfalls aber bieten sich Schwierigkeiten dar, wenn man darauf ausgeht, ein System von Querschnitten zu legen, wie es Riemann in § 19 ff. seiner Abhandlung [1]) benutzt. Riemann's Interpreten Roch, Prym, Durège, C. Neumann in ihren Bearbeitungen und Erweiterungen der ganzen Theorie oder einzelner Specialfälle geben allgemeine Regeln zur Construction eines kanonischen Querschnittssystemes nicht an.

Clebsch und Gordan in ihrer Bearbeitung der Theorie der Abel'schen Functionen (1866) verliessen ganz den Riemann'schen Weg und es gelang ihnen in der That bei einfachen Verzweigungspunkten ohne Zuhilfenahme der Riemann'schen Fläche, nur mit Benutzung der Schleifen, rein rechnerisch die kanonischen Perioden aus den über die Schleifen genommenen Integralen zusammenzusetzen [2]). Schläfli gab später (1873) [3]) eine etwas andere Darstellung einzelner Theile der Clebsch-Gordan'schen Theorie mit Benützung der Riemann'schen Fläche ohne die Herstellung der Fundamentalperioden zu vereinfachen. Schon vorher (1871) hatte ich versucht, eine Regel zu

1) Riemann's Werke. S. 122.
2) Clebsch und Gordan. Theorie der Abel'schen Functionen. 1866. Vierter Abschnitt. S. 80 ff.
3) Borchardt's Journal. Band 76 S. 149.

deren Herleitung zu finden und es war mir gelungen, zunächst eine besonders einfache Gestalt der Fläche herzustellen. in welcher es nicht schwierig war nach Analogie einer zweiblätterigen Fläche die kanonischen Querschnitte zu ziehen [1]). Mein Aufsatz, der leider etwas kurz gehalten war, gab Clebsch Veranlassung, sich weiter mit der Frage zu beschäftigen und an eine neue Darstellung der Möglichkeit, eine typische Gestalt der Riemann'schen Fläche herzustellen, noch einige Erweiterungen anzuknüpfen [2]). Praktische Anwendungen davon machten Kasten [3]) auf eine dreiblätterige Fläche und Graf [4]) auf eine sechsblätterige Fläche mit 20 Verzweigungspunkten. Der letztere stellt auch die kanonischen Perioden auf.

Endlich hat Clifford [5]) eine Darstellung der von Clebsch und mir vorgetragenen Sätze gegeben, die im Wesentlichen nichts Neues lehrt.

Die Herstellung der erwähnten typischen Gestalt der Riemann'schen Fläche ist nicht mühelos und zudem nur bei einfachen Verzweigungspunkten ausführbar. Mehrfache Verzweigungspunkte kann man freilich in einfache auseinanderziehen und nach der Herstellung der gewünschten Verzweigung wieder zusammenschieben, wobei man die gezogenen Querschnitte in bestimmter Weise über die Enden der Verzweigungsschnitte hinüberwerfen muss.

Klein ging bei mehreren Abhandlungen, die in dieses Gebiet einschlagen, von der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche ab und legte eine andere zu Grunde, indem er die complexe Variable x in anderer Weise deutete [6]); insbesondere betrachtete er auch als Ort von x eine geschlossene Fläche mit henkelartigen Ansätzen [7]). Die Oberfläche einer solchen kann man ohne Schwierigkeiten in eine einfach zusammenhängende zerlegen und zwar bieten sich kanonische Querschnitte fast am directesten dazu dar. Doch ist wohl bei dieser Darstellung von x einmal der Zu-

---

1) Math. Annalen Bd. 4 Seite 181.
2) „ „ „ 6 „ 216.
3) Zur Theorie der dreiblättrigen Riemann'schen Fläche. Göttingen. Dissertation 1876.
4) Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Bern. Dissertation 1878.
5) Proceed. London math. Soc. Band 8 S. 292.
6) Zuerst in Math. Ann. Band 7 S. 558; und in einigen späteren Abhandlungen in den Math. Annalen.
7) Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Leipzig 1882. Abschnitt 2. S. 24 u. ff.

sammenhang des Ortes auf der Fläche mit dem Werthe von x ein complicirter, andererseits ist es nicht leicht eine gegebene Riemann'sche Fläche in der richtigen Weise auf eine Fläche mit der gehörigen Anzahl von Henkeln zu beziehen. Ich hielt es daher nicht für unnöthig die Frage, wie man bei einer beliebigen Riemann'schen Fläche die kanonischen Perioden finden könne, auch ferner im Auge zu behalten. Es gelang mir schliesslich eine Methode zur Beantwortung jener Frage zu finden, indem ich von der Darstellung der Riemann'schen Fläche Gebrauch machte, welche Klein in seinen Arbeiten über höhere Gleichungen häufig benutzt hat [1]) und die schon von Riemann angegeben worden sein soll. Bei ihr werden die Blätter in der Ebene neben einander gelegt, nachdem sie vorher so deformirt sind, dass sie sich zu einem Polygon zusammenschliessen. Auch hier ist der Zusammenhang zwischen dem Flächenpunkt und dem Werthe der Variabeln x ein nicht einfacher und daher zog ich es vor bei meiner ersten Publication über diese Methode [2]) mich der alten Riemann'schen Fläche zu bedienen und an die Lehre vom Zusammenhang anzuknüpfen.

In der vorliegenden Arbeit habe ich dagegen die letztere Theorie ganz vermieden und versucht die Zahl der kanonischen Perioden durch andere Betrachtungen zu bestimmen, die, wie ich hoffe, hinlänglich einfach und streng sind. Einige Beispiele zeigen, dass die dargelegte Methode die kanonischen Periodenwege zu finden eine überaus einfache ist und sich ohne Schwierigkeit anwenden lässt.

§ 1.

Den gesammten Werthvorrath, den eine n-werthige, algebraische Function y der complexen Veränderlichen x darbietet, kann man, nach Riemann's Vorgang mit Hilfe von Verzweigungsschnitten in n einwerthige stetige Zweige zerlegen.

Um dies zu erreichen bestimmt man die Verzweigungspunkte — deren Zahl q sei — $w_1, w_2, .. w_q$ der Function y und verzeichnet dieselben in der Ebene E, welche nach Argand-Gauss zur Darstellung der

---

1) Math. Ann. Bände 10—20; besonders 14 Seite 134.

2) Sitzungsberichte der physik.-medic. Societät zu Erlangen. Sitzung vom 12. Febr. 1883.

complexen Grösse x dient. Man verbindet dann die Punkte w_1, $w_2 \ldots w_q$ durch ein Liniensystem L' so, dass die Linien des Systems keinen Theil der Ebene E inselförmig einschliessen, dass aber das Umlaufen eines einzelnen Verzweigungspunktes oder einer Gruppe derselben — die nicht aus allen besteht — unmöglich ist, wenn man nicht die Linien des Systems überschreiten will.

Man kann das System L' in verschiedenen Weisen anordnen. Man kann z. B. die Punkte w zu Ecken eines offenen Polygons machen (Fig. 1), oder man kann einen Punkt wählen, der selbst kein Verzweigungspunkt ist und diesen mit den Punkten w durch Linien verbinden (Fig. 2); oder endlich man kann zu den q Verzweigungspunkten noch k andere Punkte, Knotenpunkte, hinzunehmen und diese $q + k$ Punkte durch Linien in Verbindung setzen, welche die Bedingung erfüllen, dass weder sie alle noch ein Theil von ihnen ein geschlossenes Polygon bilden (Fig. 3, wo, wie in Fig. 1 und 2, die Verzweigungspunkte durch fette Punkte bezeichnet sind). Die $q + k$ Punkte sollen Ecken, die sie verbindenden Linien Seiten von L' heissen.

Fig. 1.

Fig. 2.

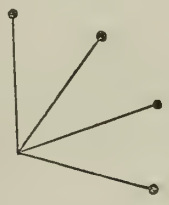
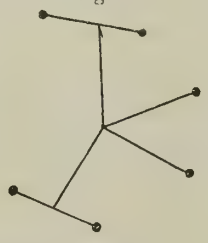


Fig. 3.



Man erkennt leicht (etwa durch den Schluss von n auf $n + 1$), dass die Anzahl der Seiten von $L' = q + k - 1$ ist. Jede Seite hat zwei Ufer und man kann, wie ebenfalls unschwer zu erkennen, das ganze System L' so umlaufen, indem man stets an den Seiten entlang geht und die Ecken in Bogen umgeht, dass jedes Ufer jeder Seite durchmessen wird, aber nur einmal, und dass der ganze Weg in sich zurückläuft.

In einem Punkte x_0, der weder Verzweigungspunkt noch Knotenpunkt ist, kann man nun n Potenzreihen $P_1 (x - x_0)$, $P_2 (x - x_0) \ldots P_n (x - x_0)$, die nach ganzen positiven Potenzen fortschreiten, aufstellen, die für y gesetzt die zwischen x und y bestehende Gleichung $f(x\,y) = 0$ erfüllen. Setzt man eine dieser Reihen in der ganzen Ebene E fort ohne

die Seiten von L' zu überschreiten, so erhält man eine eindeutige Function von x_1, die der Gleichung $f(x\,y) = o$ genügt und also einen eindeutigen stetigen Zweig von y vorstellt. Macht man dies mit allen n Potenzreihen, so ist der ganze durch die Gleichung $f(x\,y) = 0$ gegebene Werthvorrath in n Zweige zerlegt und jeder Werth von y findet sich in einem und nur einem Zweige vor. Um die n Zweige zu trennen, benützt Riemann bekanntlich für jeden derselben zur Repräsentation von x ein besonderes Blatt und die Gesammtheit der n Blätter bildet die Riemann'sche Fläche T. In jedem Blatte hat man das Liniensystem L' zu zeichnen, die verschiedenen Copien desselben im 1ten, 2ten . . n^{ten} Blatte seien bez. L_1, L_2, . . L_n und ihre Gesammtheit bilde das Liniensystem L mit $n(q + k)$ Ecken und $n(q + k - 1)$ Seiten. Zwei Punkte in verschiedenen Blättern der Fläche T, oder in einem Blatte und der Ebene E sollen entsprechend heissen, wenn für sie x den nämlichen Werth hat. Aehnliche Aussage soll von Figuren gelten.

Betrachtet man die beiden Ufer einer Seite von L, so finden sich entweder auf beiden Ufern dieselben Functionswerthe, oder aber verschiedene Werthe. Im letzteren Falle ergibt sich bekanntlich, dass diejenigen Werthe, welche im i^{ten} Blatte auf dem einen Ufer einer Seite stehen, im k^{ten} nicht auf dem entsprechenden, sondern dem gegenüberliegenden Ufer sich vorfinden, so dass ein stetiger Uebergang von dem einen Ufer im i^{ten} Blatte zum gegenüberliegenden im k^{ten} Blatte führt, während die Functionswerthe auf den beiden Ufern im i^{ten} bez. k^{ten} Blatte Unstetigkeit zeigen. Zwei gegenüberliegende Ufer, die stetig miteinander zusammenhängen, sollen mit demselben Buchstaben oder der gleichen Zahl bezeichnet werden. Jeder Buchstabe bezeichnet dann einen Uebergang, nämlich den stetigen Uebergang der von einem Ufer zu dem gleichbezeichneten Ufer führt. Die Zahl der Uebergänge ist gleich der Seitenzahl von L, d. h. $= n(q + k - 1)$ [1]).

Wir nehmen an $f(x\,y)$ sei irreducibel. Dann ist es stets möglich n—1 Uebergänge zu finden, durch deren alleinige Benutzung man von jedem Blatte in jedes andere gelangen kann [2]). Diese sollen fundamentale heissen. Wenn eine Gruppe von

1) Beispiele siehe im § 10.

2) Clebsch und Gordan. Abel'sche Functionen. Seite 82.

Blättern bestehend aus dem α^{ten}, β^{ten} . . . $\varkappa^{\text{ten}}$ existirte, aus der kein Uebergang in ein anderes Blatt führte, so seien $y_\alpha\ y_\beta \ldots y_\varkappa$ die Werthe von y, welche einem x in den genannten Blättern entsprechen. Dann wäre

$$(\eta - y_\alpha)\ (\eta - y_\beta) \ldots (\eta - y_\varkappa) = F(x\ \eta)$$

eine einwerthige Function von x, weil jeder Weg nur die $y_\alpha\ y_\beta \ldots y_\varkappa$ unter sich umtauschen würde, und folglich wäre $f(x\ \eta)$ reducibel, gegen unsere Annahme. Es muss also ein Uebergang aus dem 1ten Blatte ins λ^{te} führen, aus einem der beiden ein weiterer Uebergang in das μ^{te} Blatt u. s. w., womit unsere Behauptung bewiesen ist. Offenbar kann man aber nicht mit weniger als n — 1 Uebergängen das Resultat erreichen.

§ 2.

Ist $\varphi(x\ y)$ eine rationale Function von x und y, so ist das Integral

$$\int_{P_0}^{P} \varphi(x\ y)\, dx$$

von einem Punkte P_0 der Fläche T nach einem andern Punkte P genommen nicht unabhängig vom Wege, über welchen integrirt wird. Ist aber $\varphi(x\ y)$ ein Integrand erster oder zweiter Gattung, wie bis auf Weiteres angenommen werden soll, so kann man zeigen, dass obiges Integral eine einwerthige Function von P ist, wenn man sich vornimmt den Integrationsweg nur durch fundamentale Uebergänge zu führen.

Zum Beweise braucht man, wie bekannt, nur darzuthun, dass das fragliche Integral über eine geschlossene Curve erstreckt, die nur fundamentale Uebergänge überschreitet, den Werth Null hat. Hiezu dient der folgende Satz I.

Es sei s ein Uebergang, der von einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Curve C in zwei Punkten vom α^{ten} ins β^{te} Blatt oder umgekehrt überschritten werde. Seien P Q zwei Punkte auf C hart an einem Ufer von s, R S die gegenüberliegenden am andern Ufer.

Wenn man nun, beim Durchlaufen von C, von P nach R und von Q nach S gelangt, indem man stets in derselben Richtung weiter geht (Fig. 4)[1]),

1) Die Figuren sind hier, wie im folgenden, nur schematische. Die unmittelbar oberhalb s liegenden Theile gehören in's α^{te}, die unterhalb liegenden in's β^{te} Blatt.

so kann man aus C die neue Curve C′ ableiten dadurch, dass man, statt s zu überschreiten, auf dem einen Ufer von P nach Q und auf dem andern von S nach R geht. Dann hat man in PQURSVP die Curve C′, die geschlossen ist und dem Integral $\int \varphi\,(x\,y)\,d\,x$ denselben Werth verleiht wie C, weil die Werthe von $\varphi\,(x\,y)$ längs PQ mit denjenigen längs RS übereinstimmen und die Richtung der Integration bei beiden Ufern die entgegengesetzte ist.

Fig. 4.

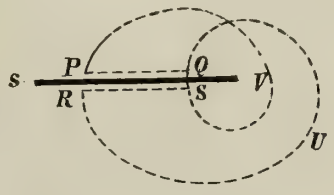
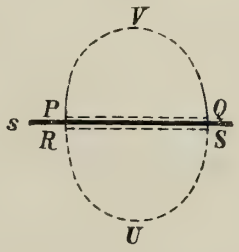


Fig. 5.



Wenn man aber, wie in Fig. 5, von P nach R und von S nach Q kommt, so werden die beiden Wege RUS und PVQ keinen Punkt gemein haben und die Curve C liefert also jetzt zwei getrennte Curven $C_1 = RUSR$ und $C_2 = PQVP$ und man erkennt, dass das Integral über C gleich dem über $C_1 + C_2$ ist.

Wenn C den Uebergang s mehr als zweimal passirt, so ist der Satz dennoch anwendbar, wenn man unter PR einerseits und QS andererseits zwei zunächst benachbarte Schnittpunkte versteht. Die Curve C′ im ersten Fall, oder die $C_1 + C_2$ im letzten Falle, schneidet aber s in zwei Punkten weniger als C dies thut. Ferner erkennt man, dass die Curve C′ im ersten, bez. $C_1 + C_2$ im zweiten Fall, jeden andern Uebergang genau ebenso oft schneidet als C.

Nun nehmen wir an s sei ein fundamentaler Uebergang und C überquere nur fundamentale Uebergänge. Dann muss die Anzahl λ von Schnittpunkten mit s gerade sein. Wäre sie ungerade, so könnte man aus C nach dem Satz I entweder eine nicht zerfallende Curve oder eine zerfallende Curve ableiten, die s in zwei Punkten weniger schnitte. Im ersten Falle würde C′ in $\lambda - 2$ Punkten s schneiden; im zweiten würde entweder C_1 in $\lambda - 2\,\mu$ Punkten schneiden und C_2 in $2\,\mu - 2$ oder C_1 in $\lambda - 2\,\mu - 1$ und C_2 in $2\,\mu - 1$. Es ist aber, weil λ ungerade, auch

$\lambda - 2$, $\lambda - 2\mu$, sowie $2\mu - 1$ ungerade; und man käme somit sicher auf eine Curve die mit s weniger Schnittpunkte als λ, aber wieder eine ungerade Zahl gemein hat. Und so weiter gehend würde man schliesslich eine geschlossene Curve K finden, die s nur in einem Punkte träfe und sonst nur fundamentale Uebergänge passirte. Auf dieser Curve K könnte man dann ohne s zu passiren durch fundamentale Uebergänge vom α^{ten} Blatt in's β^{te} kommen und der fundamentale Uebergang s wäre unnöthig, so dass man mit n — 2 solchen ausreichte, was nicht möglich ist.

Eine geschlossene Curve, die nur fundamentale Uebergänge überschreitet, muss also jeden eine gerade Anzahl Male überschreiten.

Nehmen wir nun in der vorigen Ueberlegung an λ sei gerade, so ist $\lambda - 2$ gerade, ebenso $\lambda - 2\mu$ und $2\mu - 2$; dagegen sind $\lambda - 2\mu - 1$ und $2\mu - 1$ ungerade. Da aber C_1 und C_2 wieder geschlossene Curven sind, so ist der letztere Fall nicht möglich und folglich erhält man Curven mit wenigen Schnittpunkten, die dem Integral denselben Werth ertheilen wie C, so dass entweder

$$\int_C = \int_{C'} \quad \text{oder} \quad \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

ist. Indem man auf C′ oder C_1 und C_2 dasselbe Verfahren anwendet, kann man die Zahl der Schnittpunkte mit s noch weiter herabsetzen bis man schliesslich zu einem System geschlossener Curven kommt, welche einzeln s gar nicht mehr schneiden. Mit den andern Uebergängen verfährt man ebenso und findet endlich, dass das über C erstreckte Integral denselben Werth hat wie eine Summe von Integralen, von welchen jedes einzelne über eine geschlossene Curve genommen ist, die gar keinen Uebergang mehr passirt und folglich ganz in einem Blatte verläuft. Da aber in einem Blatte y und folglich auch $\varphi(x\,y)$ eine einwerthige Function von x ist, so ist ein solches Integral = o und somit ist auch das vorgegebene, über C erstreckte Integral = o, womit der am Anfang des § angekündigte Satz bewiesen ist. Die Riemann'sche Fläche T, wenn sie durch die Bedingung beschränkt ist, dass man nur fundamentale Uebergänge überschreiten darf, soll als Fläche T′ bezeichnet werden.

Also ist $\int_{P_0}^{P} \varphi(x\,y)\,dx$ in T′ eine einwerthige Function des Ortes P. Sie ist aber bekanntlich keine stetige Function, sondern erleidet an den Seiten von L Unstetigkeiten, auch dann, wenn man zwei Punkte als obere Grenzen nimmt, die auf verschiedenen mit demselben Buchstaben bezeichneten Ufern sich gegenüberliegen. Sind P′ und P″ zwei solche Punkte auf den beiden mit s bezeichneten Ufern, so ist die Differenz

$$\int_{P_0}^{P'} \varphi(x\,y)\,dx - \int_{P_0}^{P''} \varphi(x\,y)\,dx,$$

beide Integrale in T′ genommen, die nämliche, wo auch die unendlich nahen Punkte P′ und P″ längs des Ueberganges s gewählt sein mögen[1]). Sie ist die zum Uebergange s gehörige Periode.

Da bei den fundamentalen Uebergängen das Integral stetig ist, so ist die Zahl der Perioden, weil einzelne = o werden können, höchstens gleich der Zahl der nicht-fundamentalen Uebergänge, also

$$= n(q + k) - 2n + 1 = \sigma.$$

§ 3.

Zwischen den Perioden bestehen eine Reihe von Gleichungen. Es sei ξ irgend ein besonderer Werth von x und $P(x - \xi)$ eine der nach ganzen oder gebrochenen Potenzen fortschreitenden Reihen, welche für y gesetzt der Gleichung $f(x\,y) = o$ genügen. Beschreibt nun x in E um ξ einen kleinen Kreis, so wird der entsprechende Punkt X der Riemann'schen Fläche eine geschlossene Curve beschreiben, wenn $P(x - \xi)$ nach ganzen Potenzen fortschreitet, dagegen eine offene, wenn die Reihe nach Potenzen von $(x - \xi)^{\frac{1}{\mu}}$ geordnet ist. Im letzten Falle muss x den Kreis der Ebene E μ-mal durchlaufen, bis X eine geschlossene Curve in T′ beschreibt. Jedem Punkte ξ in E entsprechen soviele geschlossene

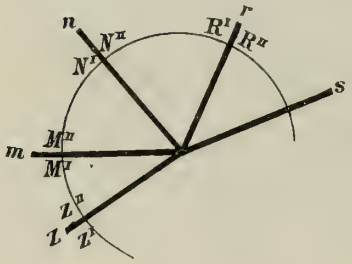
1) Siehe hiefür z. B. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. Auflage. Leipzig 1884. Seite 192.

Curven in T als zu ihm Reihen $P(x - \xi)$ gehören, indem jede Reihe eine Curve liefert. Zu einem gewöhnlichen Punkte gehören also n Curven, zu einem Verzweigungspunkte weniger als n, etwa zum Punkte w_i nur c_i Curven. Jede dieser Curven besteht entweder aus einem einzigen Kreise oder aus mehreren, in verschiedenen Blättern liegenden Stücken von Kreisen, welche die dem ξ entsprechenden Punkte von T umgeben und sich zu Vollkreisen zusammenschliessen. Diejenigen der beschriebenen Curven, welche zu den Verzweigungspunkten und Knotenpunkten gehören, seien als die Curven U bezeichnet; ihre Zahl ist $= nk + \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda = \nu$, und sie seien in irgend einer Folge als $U_1, U_2, \ldots U_\nu$ unterschieden.

Da wir unter $\varphi(x\,y)$ einen Integranden erster oder zweiter Gattung verstehen, so enthält $\varphi[x, P(x - \xi)]$ für keinen Punkt ξ und keine der zu ihm gehörenden Entwickelungen ein Glied mit $\frac{1}{x-\xi}$ und folglich ist das Integral gleich Null, welches über die von $P(x-\xi)$ gelieferte Curve genommen ist. Daher liefern die ν Curven U alle für das Integral den Werth Null. Nun möge eine von ihnen in dem α^{ten}, $\beta^{ten} \ldots \varkappa^{ten}$ Blatte verlaufen und die Uebergänge m, n, r, s ... z bez. von M′ zu M″, N′ zu N″, ... Z′ zu Z″ passiren (Fig. 6)[1]. Dann hat man

$$0 = \int_{M''}^{N'} \varphi(x\,y)\,dx + \int_{N''}^{R'} \varphi(x\,y)\,dx + \ldots + \int_{Z''}^{M'} \varphi(x\,y)\,dx$$

Fig. 6.



wo bei den einzelnen Integralen als Wege die einzelnen Kreisbogen dienen, welche U zusammensetzen.

Zieht man nun in T′ von P_0 nach den Punkten M′ M″ N′ N″ ... Z″ Curven, dann ist der Weg

$$M'\,P_0\,M''\,N'\,P_0\,N''\ldots Z'\,P_0\,Z''\,M'$$

in T′ geschlossen und liefert für das Integral

1) Der Raumersparniss wegen sind die einzelnen Blätter neben einanderliegend gezeichnet.

den Werth Null. Bezeichnet man mit $(P_0 P)$ das Integral $\int_{P_0}^{P} \varphi(x\,y)\,dx$, wenn sein Weg in T' verläuft, so entsteht durch Combination der beiden Resultate

$$o = (P_0 M'') - (P_0 M') + (P_0 N'') - (P_0 N') + \ldots + (P_0 Z'') - (P_0 Z').$$

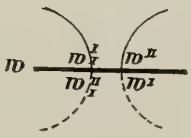
Die Differenzen $(P_0 M'') - (P_0 M')$ u. s. w. sind aber die den Uebergängen m, n, . . . zugehörigen Perioden oder, je nach Definition, vielleicht auch das Negative derselben.

Nennt man die Perioden bez. (m), (n) . . . (z), so ist demnach $(P_0 M'') - (P_0 M') = \pm(m)$, je nachdem (m) definirt war, u. s. w. und somit hat man die Gleichung

$$\pm(m) \pm(n) \ldots \pm(z) = o.$$

Da ν Curven U existiren, so gibt es auch ν solcher Gleichungen. Deren linke Seiten sind aber nicht unabhängig. Ueberschreiten nämlich die beiden Curven U_i und U_k denselben Uebergang w (Fig. 7), die eine von W' zu W'', die andere von W_1' zu W_1'' und integrirt man beidemale im Uhrzeigersinne, so tritt in der linken Seite der Gleichung, die von U_i herrührt,

Fig. 7.



$$(P_0 W'') - (P_0 W') = \pm(w)$$

dagegen in der andern Gleichung, die U_k entspricht,

$$(P_0 W_1'') - (P_0 W_1') = \mp(w)$$

auf, zwei Differenzen die entgegengesetzt gleich sind. Kommt also in der einen Gleichung die Periode $+(w)$ vor, so tritt in der zweiten $-(w)$ auf. Jeder Uebergang gehört aber auch nur zu zweien der Curven U, von welchen er, an seinen beiden Enden, überschritten wird. Addirt man also die sämmtlichen Gleichungen so entsteht $o = o$, so dass von den ν Gleichungen mindestens eine eine Folge der übrigen ist. Besteht nur e i n e Beziehung zwischen den Gleichungen — wie dies nachher bewiesen werden soll — so kann man demnach $\nu - 1$ der Perioden linear und ganzzahlig durch die übrigen ausdrücken, deren Zahl $= \sigma - (\nu - 1)$

$$= n\,q - \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda - 2\,(n-1)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{q} (n - c_\lambda) - 2\,(n-1) = 2\,\varrho$$

ist.

§ 4.

Es soll nun bewiesen werden, dass in der That zwischen den ν aufgestellten Gleichungen nur eine Beziehung besteht. Schreiben wir die von der Curve U_i herrührende Gleichung $G_i = 0$. Wenn man in allen den Ausdrücken $G_1 \ldots G_\nu$ die σ Perioden durch Variable $x_1 x_2 \ldots x_\sigma$ ersetzt und die entstehenden Functionen mit $g_1 g_2 \ldots g_\nu$ bezeichnet, so fragt es sich, ob eine Gleichung von der Form

$$\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \ldots \gamma_\nu g_\nu \equiv 0;$$

die wir kurz $I' \equiv 0$ schreiben wollen, noch in anderer Weise möglich ist als durch die Annahme $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_\nu$. Da jede Periode nur in zweien der Ausdrücken G_i auftritt, so kommt jede Variable x_i nur in zweien der Functionen g_i vor und zwar einmal mit dem Coefficienten $+1$, das andere Mal mit dem -1 versehen.

Gesetzt x_1 käme in g_1 und g_2 vor, so hätte es in I' den Coefficienten $\gamma_1 - \gamma_2$ und $I' \equiv 0$ würde $\gamma_1 = \gamma_2$ verlangen. Enthielten g_1 und g_2 noch eine Variable x_2 die in ihnen zusammen genommen nur einmal vorkäme, so müsste sie in einer andern Function etwa g_3 nochmals vorhanden sein. Dann hätte x_2 in I' den Coefficienten $\gamma_1 - \gamma_3$ und es müsste $\gamma_3 = \gamma_1$ sein. In $g_1 g_2 g_3$ möge nun ferner eine Variable x_3 auftreten, die nur einmal in diesen drei Functionen und also noch in einer vierten g_4 sich findet. Dann ergibt sich $\gamma_4 = \gamma_1$. Auf diesem Wege weitergehend kann man offenbar die Gleichheit aller γ_i nachweisen, wenn nur die eben wiederholt benützte Bedingung erfüllt ist, dass es immer in einer Gruppe von Functionen g eine Variable gibt, die nur einmal in jener Gruppe auftritt. Es soll jetzt gezeigt werden, dass dies stets der Fall ist, ausser wenn die Gruppe die sämmtlichen Functionen g umfasst.

Wenn in einer Gruppe $g_1, g_2 \ldots g_h$ von h ($< \nu$) Functionen jede vorkommende Variable zweimal vorkommt, so heisst dies, weil ja die Variablen an die Stelle der Perioden getreten sind: in den Ausdrücken $G_1, G_2, \ldots G_h$ kommt jede Periode zweimal vor; und dies sagt wieder aus, dass jeder nicht-fundamentale Uebergang, der von einer der Curven $U_1, U_2, \ldots U_h$ überschritten wird, auch noch von einer zweiten passirt wird.

Man kann nun in einem einzigen zusammenhängenden Zug die Ufer aller nicht fundamentalen Uebergänge durchlaufen, so dass jedes

Ufer nur einmal dabei betreten wird. Um dies zu zeigen bemerken wir zunächst, dass der Satz I des vorigen § sich auch umkehren lässt. Wenn nämlich zwei geschlossene Curven (Fig. 5 auf Seite 337) RUSR und PVQP beide dem Uebergang s in einem Theile ihres Verlaufes zur Seite liegen, die eine in einem, die andere im zweiten der beiden durch s verbundenen Blätter, so kann man aus beiden die neue geschlossene Curve PVQSURP ableiten, welche mit zweimaligem Ueberschreiten von s geschlossen ist. Nun kann man, wie schon in § 1 erwähnt, das im ersten Blatte befindliche Liniensystem L_1 in einem Zuge umlaufen. Führt ein fundamentaler Uebergang a vom ersten Blatte in's α^{te} Blatt, so kann man den Weg um L_α, der auch geschlossen ist, mit dem um L_1 zu einem einzigen geschlossenen Weg vereinigen, der a zweimal passirt, wobei die beiden Wegstrecken, die im ersten und α^{ten} Blatte auf den Ufern von a lagen, wegfallen. Führt nun der fundamentale Uebergang b von einem der beiden eben benutzten Blätter in's β^{te} Blatt, so kann man den eben hergestellten Weg, indem man b zweimal überquert, mit dem um L_β wieder zu einem einzigen zusammenhängenden Weg zusammen schmelzen. So kann man weiter gehen und wird nach n — 1 Operationen zu einem Wege W_0 gelangen, der jeden fundamentalen Uebergang zweimal überschreitet und den Ufern jedes nicht-fundamentalen Ueberganges entlang führt. Wir können dabei den Weg W_0 so einrichten, dass er in der Nähe der Ecken des Liniensystems L soweit es möglich ist die im vorigen § beschriebenen Curven U benutzt, so dass also in jedem Blatte diese Ecken in Kreisstücken umgangen werden[1]). Es gehören aber von jeder Curve U Stücke zum Weg W_0. Denn wenn man die Entstehung von W_0 betrachtet, so sieht man, dass der Weg um L_1 von Curven U alle die Stücke benutzt, die im ersten Blatte liegen, der um L_α dagegen alle im α^{ten} Blatte liegenden Stücke; durch die Verschmelzung beider fällt keines dieser Kreisstücke weg — sondern nur Verbindungsstrecken zweier Kreisstücke — vielmehr schliessen sich nur zweimal je zwei vorher getrennte Kreisstücke an einander (Fig. 8^a und 8^b;[2]) 8^a zeigt die beiden Wege ABCE..FGHK.. im 1ten und LMNP..QRST... im α^{ten}

1) Beispiele für die Gestaltung von W_0 finden sich in § 10.

2) Die im ersten Blatte verlaufenden Curvenstrecken sind ausgezogen, die im α^{ten} Blatte gestrichelt; a führt vom 1ten Blatte oben zum α^{ten} unten.

Blatte vor der Verschmelzung; 8^b dagegen den Weg AB, durch a nach C, dann weiter D...EFGH.....KL durch a nach M...NPQR.. und zurück längs L_1 nach A).

Fig. 8a.

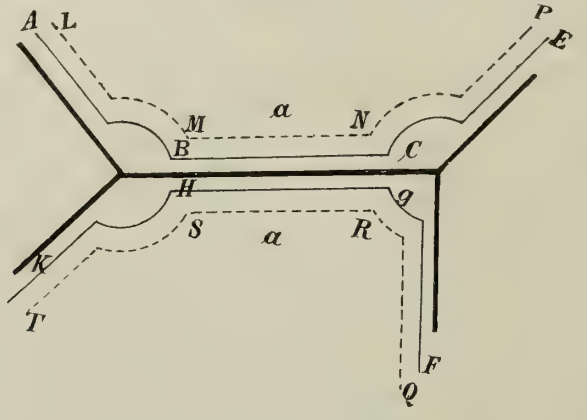
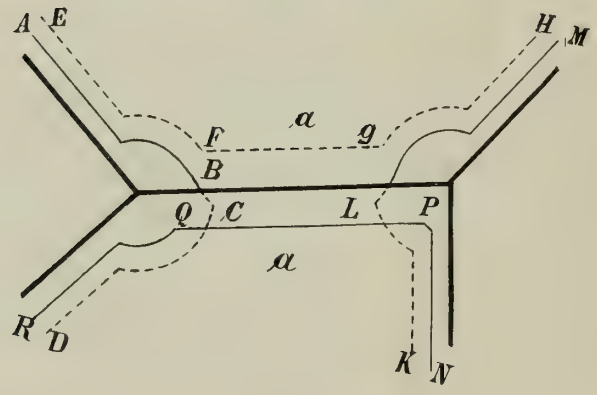


Fig. 8b.



Man stelle nun in einer Hilfsebene jede Curve U_i durch einen beliebig gewählten Punkt P_i dar und verbinde zwei Punkte P_i und P_k durch eine gerade oder krumme Linie, wenn die beiden Curven U_i und U_k denselben nicht fundamentalen Uebergang überschreiten. Dabei werde die Verbindungslinie mit demselben Buchstaben bezeichnet wie der Uebergang. In einem Punkte P_i sollen die verschiedenen von ihm ausgehenden Verbindungslinien, wenn man ihn im Uhrzeigersinn umläuft, in derselben Ordnung aufeinanderfolgen, in der die gleichbezeichneten Ueber-

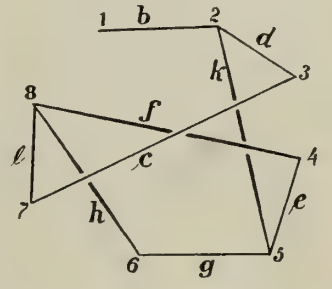
gänge von U_i überschritten werden, wenn man diese Curve im Uhrzeigersinn durchwandert.

Es wird manchmal nicht möglich sein dabei Ueberschneidungen zweier Verbindungslinien zu vermeiden, wenn man sie nicht mit einer kleinen Ausbiegung über einander wegführen will. Die so entstehende Figur soll, mit Benutzung eines Listing'schen Ausdrucks,[1]) das Diagramm des Weges W_0 heissen, da es ähnlichen Zwecken dient wie Listing's Diagramm. (Wir bemerken dabei, dass die Betrachtungen die im Folgenden auf das Diagramm gegründet werden, auch ohne Bezug auf ein räumliches Bild sich durchführen liessen.) Wenn z. B. 8 Curven U vorhanden sind, welche (wie im ersten Beispiel des § 10) die folgenden nicht-fundamentalen Uebergänge in der beigesetzten Ordnung überschreiten,

U_1	b	U_5	g k e
U_2	k b d	U_6	g h
U_3	c d	U_7	c l
U_4	e f	U_8	h l f

so hat das Diagramm die in Fig. 9 gegebene Gestalt. Das Diagramm des Weges W_0 kann nicht in getrennte Theile zerfallen. Zum Beweise bemerken wir zuerst, dass eine Curve U nicht nur fundamentale Uebergänge passiren kann. Denn U ist eine geschlossene Curve, würde sie nur fundamentale Uebergänge passiren, so müsste sie jeden eine gerade Anzahl Male überschreiten (§ 2), während sie doch jeden von ihr überschrittenen Uebergang nur einmal überquert. Für das Diagramm heisst dies: von jedem Punkte P_i geht mindestens eine Verbindungslinie aus. Man kann aber auch weiter zeigen, dass zwischen irgend zwei Punkten P_i und P_k Verbindung ist. Denn U_i trifft mindestens einen nicht-fundamentalen Uebergang p; beginnt man W_0 auf dem einen Ufer von p, bei der Curve U_i und geht p entlang, so kommt man zu einer Curve U_α. Wenn α nicht $=$ k ist, so muss

Fig. 9.



1) Census räumlicher Complexe. Abhandl. d. math. Classe d. kgl. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen. 10. Band. 1861/62. Seite 115.

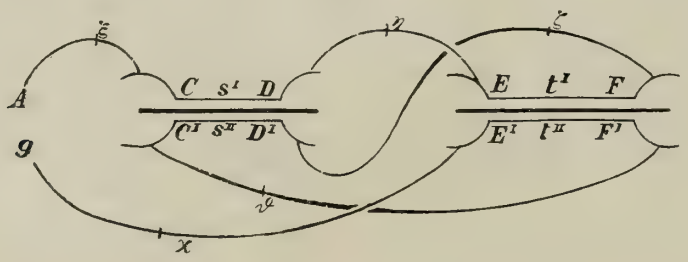
man, weil W_0 sicher ein Stück von U_k enthält, von U_α auf W_0 längs eines nicht-fundamentalen Ueberganges q weiter gehen können und gelangt zu U_β, von dem wieder ein nicht-fundamentaler Uebergang nach $U_\gamma \ldots$ führt u. s. w., bis man längs w gehend schliesslich von $U_\varkappa$ zu U_k gelangt. Im Diagramm kommt man also von P_i über die Verbindungslinien p q ... w und die Punkte $P_\alpha P_\beta \ldots P_\varkappa$ nach P_k. Damit ist der oben angeführte Satz bewiesen.

Kehren wir nun wieder zur früheren Untersuchung zurück, die uns zu dem zu widerlegenden Resultate geführt hatte, dass jeder nicht-fundamentale Uebergang der von einer der h Curven $U_1 U_2 \ldots U_h$ durchsetzt wird, auch noch von einer zweiten durchsetzt wird. Wäre dies richtig, so müsste ein Theil unseres Diagramms bestehend aus den h Punkten $P_1, P_2, .. P_h$ vom Rest isolirt sein. Denn wenn von einem der Punkte P_l, wo $l \leq h$, eine Verbindungslinie z nach einem Punkte P_m mit $m > h$ ginge, so würde der Uebergang z von U_l und von U_m überschritten, während doch noch eine zweite der Curven $U_1 U_2 .. U_h$ ihn überschreiten sollte. Unsere Annahme kann also nur dann richtig sein, wenn die h Punkte $P_1 .. P_h$ mit den ν Punkten $P_1 \ldots P_\nu$ identisch sind. Folglich wird jede Gruppe von Ausdrücken $g_1 g_2 .. g_h$ bei der $h < \nu$ ist, sicher eine nur einmal auftretende Variable enthalten; und damit ist der am Ende des vorigen § angekündigte Satz bewiesen.

§. 5.

Im Folgenden soll W_0 abgeändert und dabei sollen die Perioden durch neue Grössen ausgedrückt werden. Dazu dient die folgende Entwickelung. Ein geschlossener oder ungeschlossener Weg W, der in A beginnt und in G endigt, (Fig. 10) führe unendlich dicht an den beiden

Fig. 10.

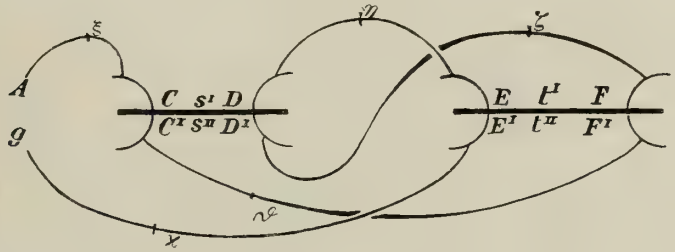


Ufern s' s'' bez. t' t'' von zwei Uebergängen s und t entlang und zwar so dass man, in der Richtung von A nach G gehend, dieselben in der Reihenfolge s' t' s'' t'' durchläuft.

Man wähle nun auf s' und s'' zwei Paare von gegenüberliegenden Punkten C C' resp. D D' und auf t' und t'' zwei Paare E E' und F F' aus und ersetze W durch den neuen Weg (Fig. 10a)

A C C' F' F D' D E E' G

Fig. 10a.



der in den Punkten C C', D D', E E', F F' die Uebergänge s und t überschreitet. Die Curvenstücke A C, D E, F D', C' F', E' G sind beiden Wegen gemeinsam; auf ihnen seien bezüglich die Punkte ξ, η, ζ, ϑ, $\varkappa$ angenommen um dann die Integrale $\int \varphi(x\,y)\,dx$ von A aus über W und W' bis zu jenen Endpunkten erstreckt zu vergleichen.

Das Integral über W' genommen soll, wie das über W genommene, durch Zusammenstellung der Endpunkte in einer Klammer bezeichnet und das erstere vom letzteren durch einen Accent unterschieden werden. Wenn der Weg unzweideutig bezeichnet ist, fällt jene Angabe fort.

So ist dann

1) $(A\,\xi)' = (A\,\xi)$,

weil von A nach ξ nur ein Weg führt.

2) Dagegen ist

$$(A\,\eta)' = (A\,C\,C'\,F'\,F\,D'\,D\,\eta)$$
$$(A\,\eta) = (A\,C\,D\,\eta)$$

daher

$$(A\,\eta)' = (A\,\eta) + (D\,C\,A\,C\,C'\,F'\,F\,D'\,D).$$

(C A C) ist = o, weil es (A C) + (C A) gleicht; (D C) = (D D') + (D' C') + (C' C); somit folgt

$$(A\,\eta)' = (A\,\eta) + (D\,D'\,C'\,F'\,F\,D'\,D) = (A\,\eta) + (D'\,C'\,F'\,F\,D').$$

3) $(A\zeta)' = (ACC'F'F\zeta)$
$(A\zeta) = (ACDEF\zeta)$.

Also

$$(A\zeta)' = (A\zeta) + (FEDCC'F'F).$$

Ersetzt man wie oben (DC), so wird

$$(A\zeta)' = (A\zeta) + (FEDD'C'F'F)$$

und wenn man $(D'F) + (FD') = o$ zufügt

$$(A\zeta)' = (A\zeta) + (FEDD'F) + (FD'C'F'F).$$

Schreibt man das zweite Integral rechts mit cyklischer Vertauschung der Buchstaben, so wird

$$(A\zeta)' = (A\zeta) + (FEDD'F) + (D'C'F'FD').$$

4) $(A\vartheta)' = (ACC'\vartheta)$; $(A\vartheta) = (ACDEFD'C'\vartheta)$

daher ist

$$(A\vartheta)' = (A\vartheta) - (C'CACDEFD'C')$$
$$= (A\vartheta) - (C'CDEFD'C').$$

Ersetzt man hier (CD) durch $(CC'D'D)$, so wird das zweite Integral $= (C'D'DEFD'C') = (D'DEFD') = -(FEDD'F)$ und folglich

$$(A\vartheta)' = (A\vartheta) + (FEDD'F).$$

5) $(A\varkappa)' = (ACC'F'FD'DEE'\varkappa)$
$(A\varkappa) = (ACDEFD'C'F'E'\varkappa)$.

Wenn man die Integrale, die sich gegenseitig zerstören, fortlässt, so wird

$$(A\varkappa)' = (A\varkappa) + (E'F'FEE') + (C'D'DCC')$$

oder, weil die beiden rechts Null sind

$$(A\varkappa)' = (A\varkappa).$$

Bezeichnet man die Integrale

$(DEFD'D)$ mit σ
$(C'F'FD'C')$ mit τ,

so sind σ und τ über geschlossene Curven genommen und man hat die Gleichungen

$$(A\xi)' = (A\xi)$$
$$(A\eta)' = (A\eta) + \tau$$
I $$(A\zeta)' = (A\zeta) + \tau - \sigma$$
$$(A\vartheta)' = (A\vartheta) - \sigma$$
$$(A\varkappa)' = (A\varkappa).$$

Ferner folgen durch Subtraction die Beziehungen

$$(\xi\eta)' = (\xi\eta) + \tau;\quad (\xi\zeta)' = (\xi\zeta) + \tau - \sigma;\quad (\xi\vartheta)' = (\xi\vartheta) - \sigma;\quad (\xi\varkappa)' = (\xi\varkappa)$$
$$(\eta\zeta)' = (\eta\zeta) - \sigma;\quad (\eta\vartheta)' = (\eta\vartheta) - \tau - \sigma;\quad (\eta\varkappa)' = (\eta\varkappa) - \tau$$
$$(\zeta\vartheta)' = (\zeta\vartheta) - \tau;\quad (\zeta\varkappa)' = (\zeta\varkappa) - \tau + \sigma$$
$$(\vartheta\varkappa)' = (\vartheta\varkappa) + \sigma.$$

Schreibt man

$$A\,C\,.\,C\,D\,.\,D\,E\,.\,E\,F\,.\,F\,D'\,.\,D'\,C'\,.\,C'\,F'\,.\,F'\,E'\,.\,E'\,G$$

als Bezeichnung des ersten Weges W, so ist der zweite W', der durch „Elimination" der unterstrichenen Strecken CD u. s. w. entsteht, gegeben durch

$$A\,C\,.\,C'\,F'\,.\,F\,D'\,.\,D\,E\,.\,E'\,G$$

wobei die CC', DD' u. s. w. weggelassen sind.

Deutet man den Ort der Punkte $\xi\eta\zeta\vartheta\varkappa$ an, schreibt unter EF und D'C' bez. $-\sigma$ und $-\tau$; dagegen unter CD und F'E' resp. τ und σ, so ist der erste Weg

$$A\,\underset{\tau}{\xi}\,C\,.\,C\,D\,.\,D\,\underset{-\sigma}{\eta}\,E\,.\,E\,F\,.\,F\,\underset{-\tau}{\zeta}\,D'\,.\,D'\,C'\,.\,C'\,\vartheta\,F'\,.\,F'\,\underset{\sigma}{E'}\,.\,E'\,\varkappa\,G$$

und man erkennt die einfache Regel, dass das Integral zwischen irgend zweien der Punkte $\xi\eta\zeta\vartheta\varkappa$ auf dem Weg W' genommen, gleich dem zwischen denselben Punkten längs W genommenen Integrale ist plus der Summe derjenigen der vier Grössen τ, $-\sigma$, $-\tau$, σ, welche oben zwischen den betreffenden beiden Buchstaben stehen.

Es sei jetzt $\psi(xy)$ eine zweite rationale Function von x und y; indem man nur die Punkte eines bestimmten Weges — W oder W' — betrachtet sei sie mit $u(x)$ bezeichnet, wobei x einen Punkt dieses Weges darstellt.

Wir bilden nun

$$J' = \int_A^G u(x)\,(Ax)'\,dx$$

über W' genommen, wo $(Ax)'$ das von A bis x über W' genommene $\int \varphi(xy)\,dx$ bezeichnet. Zerlegt man J' in 5 Theile und bezeichnet den einzelnen Theilen entsprechend x durch $\xi\eta\zeta\vartheta$ oder $\varkappa$, so wird, wenn man von den Gleichungen I Gebrauch macht

$$J' = \int_A^C u(\xi)\,(A\,\xi)\,d\xi + \int_{C'}^{F'} u(\vartheta)\,[(A\,\vartheta) - \sigma]\,d\vartheta$$
$$+ \int_F^{D'} u(\zeta)\,[(A\,\zeta) + \tau - \sigma]\,d\zeta + \int_D^E u(\eta)\,[(A\,\eta) + \tau]\,d\eta$$
$$+ \int_{E'}^G u(\varkappa)\,(A\,\varkappa)\,d\varkappa.$$

Vergleicht man mit dem über W genommenen Integrale

$$J = \int_A^G u(x)\,(A\,x)\,dx$$

indem man auch dies in die einzelnen Theile zerlegt, so sieht man, dass J von J' diejenigen Theile enthält, welche weder σ noch τ enthalten, dass aber noch hinzukommt die Integralsumme

$$\int_C^D u(\lambda)\,(A\,\lambda)\,d\lambda + \int_E^F u(\pi)\,(A\,\pi)\,d\pi + \int_{D'}^{C'} u(\mu)\,(A\,\mu)\,d\mu$$
$$+ \int_{F'}^{E'} u(o)\,(A\,o)\,do$$

wo mit $\lambda\,\mu\,o\,\pi$ vier Punkte auf CD, C'D', E'F' und EF bezeichnet sind. Nimmt man λ und μ einerseits, o und π andererseits sich gegenüberliegend an, so ist

$$d\lambda = d\mu,\ d\,o = d\pi,\ u(\lambda) = u(\mu),\ u(\pi) = u(o)$$
$$(A\,\mu) = (A\,\lambda) + (\lambda\,D) + (D\,E\,F\,D') + (D'\,\mu) = (A\,\lambda) + \sigma$$
$$(A\,o) = (A\,\pi) + (\pi\,F) + (F\,D'\,C'\,F') + (F'\,o) = (A\,\pi) + \tau;$$

daher die obige Summe

$$= \sigma \int_{D'}^{C'} u(\mu)\,d\mu - \tau \int_E^F u(\pi)\,d\pi$$

wird. Alles zusammengefasst wird nun

$$J' = J - \sigma\left\{\int_{D'}^{C'} u(\mu)\,d\mu + \int_F^{D'} u(\zeta)\,d\zeta + \int_{C'}^{F'} u(\vartheta)\,d\vartheta\right\}$$
$$+ \tau\left\{\int_E^F u(\pi)\,d\pi + \int_F^{D'} u(\zeta)\,d\zeta + \int_D^E u(\eta)\,d\eta\right\}.$$

Der Coefficient von $(-\sigma)$ ist das Integral $\int \psi(x\,y)\,dx$ über den-

selben Weg genommen, auf den τ sich bezieht; es sei mit T bezeichnet. Der Coefficient von τ dagegen ist obiges Integral über den Weg von σ erstreckt. Nennt man seinen Werth Σ, so folgt also:

$$J' = J + \tau\Sigma - \sigma T \qquad \text{II}$$

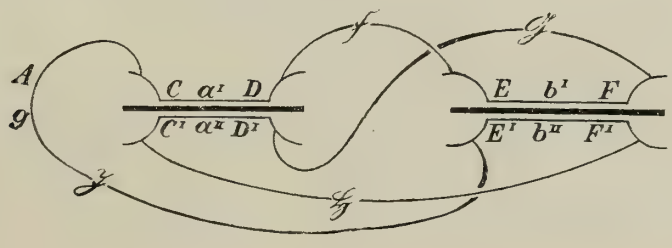
§ 6.

Um die Anwendung auf die Perioden von $\int \varphi(xy)\,dx$ zu machen, denkt man sich in T' den oben (Seite 343) beschriebenen Weg W_0 durchlaufen und die Buchstaben nebeneinandergestellt, welche die Ufer der Uebergänge bezeichnen, in der Reihenfolge, wie sie beim Durchwandern von W_0 getroffen werden. In dieser Reihe R_0, die man sich wie den Weg W_0 cyklisch geschlossen denken muss, ist es nun möglich, dass niemals zwei gleiche Buchstaben durch zwei andere ebenfalls gleiche Buchstaben getrennt werden. Dann ist die beabsichtigte Umänderung nicht möglich und, wie später gezeigt wird, auch nicht nöthig. Wenn aber „Trennungen" gleicher Buchstaben durch andere gleiche auftreten, so seien etwa die beiden a durch die beiden b getrennt. Indem wir die dazwischenliegenden Buchstabengruppen durch besondere Zeichen bezeichnen und die beiden durch a bez. durch b bezeichneten Ufer noch durch a' und a'', b' und b'' unterscheiden, können wir R_0 schreiben

$$R_0 = a'\,\mathfrak{F}\,b'\,\mathfrak{G}\,a''\,\mathfrak{H}\,b''\,\mathfrak{J}.$$

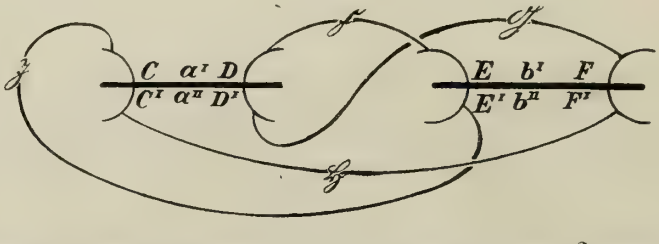
Mit Anwendung der im vorigen § entwickelten Methode kann man nun aus W_0 einen neuen Weg W_1 ableiten. Nimmt man a' a'' b' b'' für die vorhin mit s' s'' t' t'' bezeichneten Ufer und setzt die Buchstaben CDEF wie in Fig. 11 an die Enden der Kreisstücke, welche im Wege W_0 die vier in Frage kommenden Ecken von L umgehen, so ist der Weg W_1 gegeben durch die Reihe $\mathfrak{H}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\mathfrak{J} = R_1$,

Fig. 11.



wobei zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ und zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ ein Durchgang durch a, zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$, sowie zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{J}$ einer durch b stattfindet. (Fig. 12).

Fig. 12.



Die Perioden des Integrals sind die Werthe von $\int \varphi(xy)dx$ in T' auf einer Curve von einem Punkte auf dem ersten Ufer eines Ueberganges nach dem gegenüberliegenden Punkte des zweiten Ufers genommen. Als solche Curve, deren Gestalt gleichgültig ist, kann man W_0 wählen. Dann ist die Periode (a) für den Uebergang a gleich dem Integral über den Weg $\mathfrak{F}b'\mathfrak{G}$ genommen, die (b), welche zu dem Uebergang b gehört, ist der Werth des Integrales über den Weg $\mathfrak{G}a''\mathfrak{H}$ genommen. Für irgend einen andern Uebergang s von denjenigen c, d, e, f..., welche ausser a und b noch in R_0 auftreten, kann man die Periode (s), statt durch ein über W_0 genommenes Integral, ausdrücken durch ein über W_1 zwischen denselben, an beiden Ufern von s sich gegenüberliegenden, Punkten genommenes. Bezeichnet man den letzteren Werth mit $(s)_1$, so ist nach dem vorigen §

$$(s) = (s)_1 + \delta(a) + \varepsilon(b),$$

wo δ und ε Zahlen bezeichnen, die entweder 0, 1 oder -1 sind und sich nach früherer Regel leicht bestimmen. Weil $\int \varphi(xy)dx$ in T' einwerthig ist, so ist das um W_0, als um eine geschlossene Curve, genommene Integral gleich Null. Denselben Werth hat also auch das über W_1 genommene Integral.

Trägt man die Werthe der Perioden (c) (d), ... durch die Grössen $(c)_1$, $(d)_1$, ... ausgedrückt, in die Beziehungen ein, welche zwischen den Perioden im § 3 nachgewiesen wurden, so entstehen zwischen den Grössen (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1$, ... lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, deren rechte Seiten Null sind. Diese Gleichungen kann man aber ein-

facher durch directe Betrachtung erhalten. Der Weg W_1 verfolgt wie der W_0 in der Nähe der Ecken von L Stücke der Curven U. Möge nun, wie oben im § 3, eine dieser Curven die von ihr überschrittenen Uebergänge in den Punkten M' M'' ... treffen. Dann ist (siehe Seite 340)

$$(M''N') + (N''R') + (R''S') + \ldots + (Z''M') = 0.$$

Man gehe nun von einem Punkte A in W_1 aus und integrire immer in derselben Richtung längs W_1, dann ist

$$(M''N') = (A\ N)' - (AM'')'$$
$$(N''\ R') = (AR')' - (AN'')'$$
$$\ldots\ldots$$
$$(Z''\ M') = (AM')' - (AZ'')'$$

wo die Klammern rechts den Accent tragen, um die Integration längs W_1 anzudeuten. Damit wird die obige Gleichung

$$(AM')' - (AM'')' + (AN')' - (AN'')' + \ldots = 0.$$

Es ist aber $(AM') - (AM'')$, beide Integrale längs W_0 genommen, die zum Uebergang m gehörige Periode $\pm(m)$. Entsprechend ist $(AM')' - (AM'')'$ die zu demselben Uebergang gehörige neue Grösse $\pm(m)_1$. Aehnlich verhalten sich die übrigen Differenzen und somit erhält man statt der Gleichung

$$\pm(m) \pm(n) + \ldots \pm(z) = 0$$

jetzt die Gleichung

$$\pm(m)_1 \pm(n)_1 + \ldots \pm(z)_1 = 0.$$

Dabei fallen nicht nur die den fundamentalen Uebergängen entsprechenden Grössen weg, sondern auch die, welche mit $(a)_1$ und $(b)_1$ zu bezeichnen wären, weil ja W_1 die Uebergänge a und b überschreitet.

Zum Wege W_1 kann man auch ein Diagramm construiren, das man aber aus dem für W_0 offenbar erhält, wenn man die mit a und b bezeichneten Verbindungslinien fortnimmt. Da W_1, wie W_0, noch Theile von jeder Curve U enthält, so muss es möglich sein, von jeder Curve U zu jeder andern zu gelangen, indem man dem Wege W_1 folgt und folglich kann das Diagramm von W_1 nicht in getrennte Theile zerfallen.

Dies ist aber nur möglich, wenn im Diagramm von W_0 geschlossene Polygone vorhanden sind, welchen die Verbindungslinien a und b angehören.

Mit dem Wege W_1 bezw. mit der ihn darstellenden Reihe R_1

$= \mathfrak{H}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\mathfrak{J}$ kann man nun ganz ähnliche Betrachtungen anstellen. Enthält er keine Trennungen eines Paares gleicher Buchstaben durch ein anderes Paar gleicher mehr, so ist die Umformung beendigt. Kommen aber solche Trennungen noch vor und schreibt man, eine heraushebend,

$$R_1 = c\,\mathfrak{F}_1\,d\,\mathfrak{G}_1\,c\,\mathfrak{H}_1\,d\,\mathfrak{J}_1,$$

so kann man aus W_1 den geschlossenen Weg W_2 ableiten, der durch die Uebergänge c und d hindurchführt und mit der Buchstabenreihe

$$R_2 = \mathfrak{H}_1\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{J}_1$$

bezeichnet werden kann. Ist s irgend einer der ausser c, d in W_1 noch vorhandenen, nicht überschrittenen Uebergänge e, f ... so ist, nach dem früheren, das Integral von einem Punkte von s nach dem gegenüberliegenden, genommen

$$\text{über } W_1 \text{ gleich } (s)_1$$
$$\text{über } W_2 \quad \text{„} \quad (s)_2$$

und

$$(s)_1 = (s)_2 + \delta_1\,(c)_1 + \varepsilon_1\,(d)_1.$$

Dabei sind δ_1 und ε_1 Factoren, die einen der Werthe 0, 1, oder — 1 haben. Hiemit wird nun

$$(s) = (s)_2 + \delta\,(a) + \varepsilon\,(b) + \delta_1\,(c)_1 + \varepsilon_1\,(d)_1,$$

so dass alle Perioden sich durch (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1$ und die über W_2 genommenen Integrale $(e)_2$, $(f)_2$ ... linear und ganzzahlig ausdrücken. Umgekehrt sind aber auch $(c)_1$ und $(d)_1$ lineare und ganzzahlige Functionen von (c), (d), so dass sich auch $(s)_2$ linear und ganzzahlig durch (s), (a), (b), (c), und (d) darstellen lässt. Die oben gefundenen Gleichungen zwischen den Perioden, von welchen

$$\pm (m)_1 \pm (n)_1 + \ldots = 0$$

eine war, gehen dann in Gleichungen über, wie die:

$$\pm (m)_2 \pm (n)_2 + \ldots = 0.$$

Das zu W_2 gehörige Diagramm entsteht aus dem für W_1 durch Fortlassen der c und d genannten Verbindungslinien, und es muss wie das letztere zusammenhängend sein. Auf W_2 und die Reihe R_2 kann man dieselben Operationen anwenden und so fortfahren, bis man zu einem Wege W_p und einer Reihe R_p kommt, in welcher Paare gleicher Buchstaben durch andere Paare gleicher Buchstaben nicht mehr getrennt sind.

Die Anzahl der in R_p noch übrigen verschiedenen Buchstaben sei q'. Da nun beim Uebergange von R_{i-1} zu R_i zwei Buchstaben wegfallen und R_0 deren σ enthielt, so ist

$$\sigma = 2p + q'.$$

Die Perioden (a) (b),... drücken sich nach den bewiesenen Sätzen linear und ganzzahlig aus durch die auf die weggefallenen Buchstaben a, b, c, d, .. m, n bezüglichen Integrale (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1$, $(e)_2 \ldots (m)_{p-1}$ $(n)_{p-1}$ und durch diejenigen q' Werthe $(r)_p$, $(s)_p$, $(t)_p \ldots$ welche auf dem Wege W_p erlangt werden, wenn man von einem Ufer zum andern der in R_p noch übrigen Uebergänge r, s, t... integrirt. Auch das Umgekehrte ist richtig.

Die von den Curven $U_1, .. U_\nu$ gelieferten linearen und homogenen Gleichungen zwischen den Perioden bestehen hier zwischen den q' Grössen $(r)_p$, $(s)_p$, $(t)_p \ldots$. Es wird nachher gezeigt werden, dass diese Werthe alle gleich Null sind. Daher sind die in Rede stehenden Gleichungen nichtssagend. Zwischen den Grössen (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1, \ldots (m)_{p-1}$, $(n)_{p-1}$ ergeben also die Curven U keine Gleichung, ebenso wie auch zwischen den 2ϱ Perioden, durch welche sich die übrigen ausdrücken lassen, keine von den U herrührende Gleichung besteht. Da nun, weil die $(r)_p$, $(s)_p$, $(t)_p \ldots$ alle Null sind, sich die 2ϱ Perioden durch die 2p Grössen (a) (b) ... $(n)_{p-1}$ linear und ganzzahlig ausdrücken lassen und auch das Umgekehrte richtig ist, so muss $2p = 2\varrho$ sein. Damit folgt $q' = \nu - 1$ und

$$p = \varrho = \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{q} (n - c_\lambda) - (n - 1).$$

Da p ganz ist, muss folglich auch ϱ ganz sein.

Auch zu W_p gehört ein Diagramm, das, wie alle früheren, nicht zerfallen darf. Weil nun jedes neue Diagramm zwei Verbindungslinien weniger hat als das vorhergehende, so hat dies letzte $\sigma - 2p = q'$ Verbindungslinien zwischen den ν Punkten $P_1 P_2 .. P_\nu$. Um soviele Punkte zu verbinden, braucht man aber mindestens $\nu - 1$ Linien; daher muss $q' \geqq \nu - 1$ sein.

§ 7.

Die im vorigen § gegebene Begründung der Gleichung $2p = 2\varrho$ würde ganz stichhaltig sein, wenn man wüsste, dass es andere Beziehungen zwischen den in Frage kommenden Grössen, als die oben betrachteten nicht gäbe. Man kann aber noch in anderer Weise zeigen, dass $p = \varrho$ sein muss. Zunächst ist am Ende des vorigen § direct bewiesen, dass $q' \geqq \nu - 1$ ist, woraus $2p \leqq \sigma - 2(\nu - 1) \leqq 2\varrho$ sich ergibt.

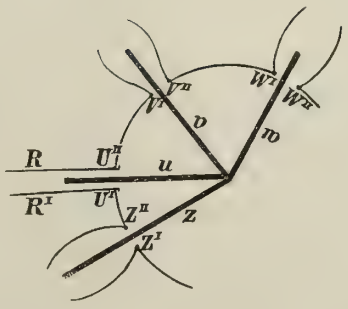
Der Weg W_0 läuft zum Theil längs der Ufer gewisser Uebergänge entlang, die er nicht überschreitet, zum Theil folgt er — und zwar in der Nähe der Ecken von L — kleineren oder grösseren Kreisstücken, die Theile der verschiedenen Curven U bilden. Aus der Art, wie der Weg W_0 gebildet wurde, (§ 4, Seite 343) erkennt man, dass alle diejenigen Kreisstücke von W_0, welche auf der Curve U_i gelegen sind, diese Curve vollständig erfüllen, wenn man von den beliebig klein zu machenden Stücken unmittelbar auf beiden Ufern eines Ueberganges absieht, der nicht überquert wird. (Die kleinen Kreisstücke von Q, P, F, G in Fig. 8^b bis zum Uebergang sind solche Stücke). Da beim Herstellen von W_1, $W_2 \ldots$ aus W_0 nur Uebergänge überschritten werden die vorher verboten waren, so wird bei jedem dieser Wege, und also auch bei W_p, die Eigenschaft bestehen, dass alle zu W_p gehörigen Stücke von U_i diese Curve vollständig erfüllen, ja sogar werden weniger der unendlich kleinen Stücke fehlen als früher, weil jetzt Uebergänge überschritten werden, die vorher gesperrt waren.

Von den Uebergängen, welche von U_i ausgehen d. h. von U_i überschritten werden, mögen nun beim Wege W_p immer noch die u, v, w ... z verboten sein und diese Reihe möge zugleich angeben, wie sie sich folgen, wenn man, etwa im Uhrzeigersinn, U_i durchläuft, so dass man nach Ueberschreitung von z wieder zu u zurück kömmt.

Wenn man nun den Weg W_p verfolgt, so führt er (Fig. 13) von U'' längs U_i zu V', also von u nach v; später dann von V'' nach W' d. h. vom einen Ufer von v nach dem von w u. s. w., schliesslich von Z'' nach U', also von z nach u. In R_p müssen also die Buchstabenpaare vorkommen u v, v w, w x, ... z u. Was ihre Reihenfolge angeht, so kann man R_p schreiben $u\,v\,\mathfrak{U}\,v\,w\,\mathfrak{V}'$, wo mit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}'$ Buchstabengruppen be-

zeichnet sind. Das Paar w x kann nun nicht in $\mathfrak{U}$ stehen, weil sonst v v durch w w getrennt wäre; also muss es in $\mathfrak{V}'$ sich befinden, das man schreiben kann $\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}\,w\,x\,\mathfrak{W}'$. Das Paar x y kann weder in $\mathfrak{U}$ noch in $\mathfrak{V}$ stecken, ebenfalls weil sonst die Trennungen v . x . v . x bez. w . x . w . x auftreten würden, und muss also sich in $\mathfrak{W}'$ finden; Schreibt man $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}\,x\,y\,\mathfrak{X}'$, so wird jetzt

Fig. 13.



$$R_p = u\,v\,\mathfrak{U}\,v\,w\,\mathfrak{V}\,w\,x\,\mathfrak{W}\,x\,y\,\mathfrak{X}'$$

und so kann man fortschliessen und erkennt, dass in R_p die Paare u v, v w, w x .... z u in dieser Reihenfolge auftreten müssen, damit Trennungen nicht da sind. Somit kann man schreiben

$$R_p = u\,v\,\mathfrak{U}\,v\,w\,\mathfrak{V}\,w\,x \ldots z\,u\,\mathfrak{Z}.$$

Bezeichnet nun t einen andern Uebergang, der nicht von U_i getroffen wird, so müssen in R_p die beiden t in einer der mit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ .. $\mathfrak{Z}$ bezeichneten Buchstabengruppe stehen, weil sonst Trennungen vorkämen. Wenn man also annimmt sie seien in $\mathfrak{Z}$ enthalten, und dann $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}'\,t\,\mathfrak{Z}''\,t\,\mathfrak{Z}'''$ schreibt, so gelangt man von einem Punkte R auf dem einen Ufer von t zum gegenüberliegenden Punkte R' entweder auf dem durch $\mathfrak{Z}''$ repräsentirten Weg, wobei man U_i gar nicht trifft, oder auf dem Weg $\mathfrak{Z}'''\,u\,v\,\mathfrak{U}\,v\,w\,\mathfrak{V} \ldots z\,u\,\mathfrak{Z}'$, wobei man die ganze Curve U_i (mit Ausnahme der öfter genannten unendlich kleinen Stücke) durchläuft. Was von U_i gilt, gilt von jeder Curve, die auf dem von R zu R' führenden Wege liegt.

Das über W_p genommene Integral von R nach R' kann man nun zerlegen in die Theile, die längs der Ufer der Uebergänge erstreckt sind und die Summe der Theile, die sich auf die Curven U_i beziehen. Da jede Curve U_i, die überhaupt auf dem Wege liegt, ganz umlaufen wird, so ist das über sie genommene Integral = o. Wenn aber in R_p zwischen den beiden t ein Buchstaben s steht, so steht er da zweimal; der Weg W_p führt also zwischen R und R' an beiden Ufern von s und zwar in entgegengesetzten Richtungen entlang und die beiden Integraltheile, die sich auf s beziehen, heben sich auf. Somit ergibt sich $(t)_p = o$, womit für jeden der Uebergänge r, s, t .. die gegen Ende des § 6 benutzte Eigenschaft bewiesen ist.

Die oben durchgeführte Betrachtung hat, wie erwähnt, gezeigt, dass, wenn man $R_p = \mathfrak{A}\,t\,\mathfrak{B}\,t\,\mathfrak{C}$ schreibt, unter $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Gruppen von Buchstaben verstanden, dann die sämmtlichen von einer Curve U ausgehenden Uebergänge, die in W_p nicht überschritten werden, sich entweder in $t\,\mathfrak{B}\,t$ oder in $t\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}\,t$ vorfinden. Zu den beiden Enden von t mögen nun die Curven U_α und U_β gehören, so dass man also beim Durchlaufen dieser Curven t passirt. Dann müssen alle andern Uebergänge von U_α, ausser t, die in W_p noch nicht überschritten werden, sich in $\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}$ und die ausser t noch in U_β vorhandenen verbotenen Uebergänge in $\mathfrak{B}$ vorfinden. Von einer der beiden Curven braucht kein weiterer Uebergang derart als t auszugehen; wenn von beiden kein weiterer solcher Uebergang ausginge, so wären in dem Diagramm des Weges W_p die beiden Punkte P_α und P_β zwar unter sich durch t verbunden, aber vom übrigen isolirt. Dies ist nicht möglich, wenn nicht das ganze Diagramm nur aus diesen beiden Punkten besteht. In diesem Falle setzt sich aber der Weg W_p aus dem Umlaufen von U_α, dem einen Ufer von t, der Curve U_β und dem andern Ufer von t zusammen, so dass R_p einfach $t\,t$ ist. Dann ist $\nu = 2$, $q' = 1$, daher $q' = \nu - 1$.

Ist aber $\nu > 2$, so müssen mindestens von einem der beiden Punkte, von P_α z. B. weitere, von t verschiedene Linien ausgehen. Würden dann von P_β keine Verbindungslinien ausser t ausgehen, so würde durch Weglassen von t der Punkt P_β vom Rest des Diagramms isolirt werden und das ganze Diagramm also zerfallen. Man kann aber zeigen, dass das Diagramm auch dann durch Fortlassen von t sich in getrennte Theile spaltet, wenn von P_α und von P_β mehr als die eine Verbindungslinie t ausgeht.

Denn würde sich das Diagramm nicht spalten, so könnte man von P_α auf einer Linie $\mathfrak{a}$ zu einem Punkte P_γ, von da längs $\mathfrak{b}$ zu P_δ, von da längs $\mathfrak{c}$ nach P_ε u. s. w. und schliesslich längs $\mathfrak{m}$ von P_λ zu P_β gelangen. Es würden sich dann der Buchstabe $\mathfrak{a}$ sicher in der Gruppe $\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}$ und der $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{B}$ vorfinden. Da nun die Namen der von P_γ ausgehenden Verbindungslinien dieselben sind, wie die der von U_γ überschrittenen, noch in W_p verschlossenen, Uebergänge und diese alle entweder der Gruppe $\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}$ oder der $\mathfrak{B}$ angehören, so wird, weil $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}$ gehört, auch $\mathfrak{b}$ in dieser Gruppe sich finden; dieselbe Ueberlegung zeigt dann dass,

weil $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{GA}$ gehört, auch $\mathfrak{c}$ in dieser Gruppe stehen muss. So weiter gehend könnte man schliesslich zeigen, dass auch $\mathfrak{m}$ derselben Gruppe angehören müsste, während es doch nach unserer Annahme sich in $\mathfrak{B}$ vorfindet. Damit ist also bewiesen, dass das Diagramm von W_p durch Weglassen irgend einer Seite zerfällt. Für eine solche Figur ist aber die Anzahl ν der Punkte um Eins grösser, als die q' der Verbindungslinien, also hat man $\nu = q' + 1$; $q' = \nu - 1$, womit weiter

$$p = \varrho$$

sich ergibt.

Somit ist endgiltig dargethan, dass alle Perioden eines Integrals erster oder zweiter Gattung sich aus höchstens

$$2p = 2\varrho = \sum_{\lambda=1}^{q} (n - c_\lambda) - 2(n - 1)$$

Grössen linear und ganzzahlig zusammensetzen lassen.

§ 8.

Die am Ende des vorigen § genannten $2p$ Grössen sind diejenigen, welche oben in § 6 mit (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1$, ... $(m)_{p-1}$, $(n)_{p-1}$ bezeichnet waren. Diese Perioden sind aber kanonische oder Fundamentalperioden. Um dies zu zeigen nimmt man an, die beiden in § 5 gebrauchten Functionen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ seien Integranden erster Gattung. Ist dann der mit W bezeichnete Weg unser W_0, so ist das Integral $J = o$, weil $\int \varphi(xy)\,dx$ bei gegebener unterer Grenze eine in T' einwerthige und endliche Function ist und folglich von $\psi(xy) \int \varphi(xy)\,dx$ das gleiche gilt und weil ferner W_0 in T' geschlossen ist. In der Gleichung II des § 5 ist dann J' über W_1 genommen und sei mit J_1 bezeichnet. Nennt man nun (A) und (B) diejenigen Grössen, die zu $\psi(xy)$ in derselben Beziehung stehen wie (a) und (b) zu $\varphi(xy)$, so liefert die Gleichung II

$$J_1 = (a)(B) - (b)(A).$$

Auf J_1 wendet man dasselbe Verfahren an und erhält ein über W_2 genommenes Integral J_2

$$J_2 = J_1 + (c)_1 (D)_1 - (d)_1 (C)_1$$

wo wieder $(C)_1$ und $(D)_1$ sich in derselben Weise zu ψ verhalten, wie $(c)_1$ und $(d)_1$ zu φ. Indem man so fort geht entsteht schliesslich die Gleichung

$$J_p = (a)(B) - (b)(A) + (c)_1(D)_1 - (d)_1(C)_1 + (e)_2(F)_2 \ldots\ldots$$
$$+ (m)_{p-1}(N)_{p-1} - (n)_{p-1}(M)_{p-1}.$$

Die linke Seite ist aber $= o$. Denn das Integral $\int \varphi(xy)dx$ hat in zwei gegenüberliegenden Punkten eines der in R_p noch auftretenden Uebergänge denselben Werth (§ 7) und da das ganze Integral

$$\int \psi(x\,y)\,dx \int \varphi(x\,y)\,dx$$

an den beiden Ufern entlang in entgegengesetztem Sinne erstreckt ist, so entsteht Null. Weil ferner jede Curve U_i ganz umlaufen wird und der Integrand in seiner Entwickelung ein Glied mit $\frac{1}{x-\xi}$ nicht enthält, so hat auch der auf U_i bezügliche Integraltheil den Werth Null. Somit hat man die Gleichung

$$o = (a)(B) - (b)(A) + (c)_1(D)_1 - (d)_1(C)_1 + \ldots$$
$$+ (m)_{p-1}(N)_{p-1} - (n)_{p-1}(M)_{p-1},$$

welche die zwischen den fundamentalen Perioden der beiden Integrale

$$\int \varphi(x\,y)\,dx \text{ und } \int \psi(x\,y)\,dx$$

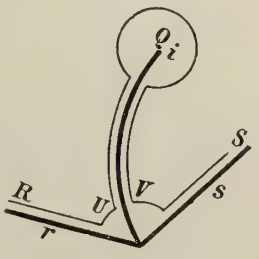
bestehende bilineare Gleichung in der von Riemann gegebenen Form darstellt.

§ 9.

Die Betrachtungen der früheren §§ setzen ein Integral erster oder zweiter Gattung voraus. Wenn dagegen ein Integral vorliegt, das für gewisse Entwickelungen logarithmisch unendlich wird, so ist die Fläche T' nicht mehr zu einer eindeutigen Darstellung geeignet, wenn nicht etwa die fraglichen Reihen zu einem Verzweigungs- oder Knotenpunkte von L gehören. Sind die Punkte der Fläche T, für welche das Integral logarithmisch unendlich wird und die weder Verzweigungspunkte noch Knotenpunkte sind, die $Q_1\ Q_2 \ldots Q_l$, so wird man am einfachsten jeden dieser Punkte durch eine Curve, die in dem Blatt verläuft in dem er liegt, mit einem Eckpunkt des Liniensystems L in Verbindung setzen und zwar so, dass diese Curven keine Seiten von L treffen. Die l Curven seien a_1, $a_2 \ldots a_l$. Setzt man nun fest, dass sie nicht überschritten werden dürfen, so entsteht aus T' die neue Fläche T'', in der das Integral eine ein-

werthige Function der oberen Grenze ist. Das neue Liniensystem, das entsteht, wenn man zu den Linien von L noch die l Curven $a_1 \ldots a_l$ hinzunimmt, kann in einem einzigen zusammenhängenden Zug umlaufen werden. Denn ist (Fig. 14), die Linie a_i zwischen die Uebergänge r und s eingeschaltet, so würde der Weg W_0 von R über U und V nach S führen; geht man statt dessen über R nach U, umkreist dann a_i von U nach V und geht dann nach S weiter, so sind die beiden Ufer des Ueberganges a_i, die selbst a_i genannt seien, in W_0 aufgenommen und der Kreis um den Punkt Q_i ist dann zu den Curven U_i hinzugekommen. Wenn man mit allen Curven a_i so verfährt, so entstehe aus W_0 der neue geschlossene Weg $\mathbf{W}_0$. Da, wie die angestellte Ueberlegung zeigt, die beiden Ufer von a_i hintereinander durchlaufen werden, so wird, wenn man sich die zu W_0 gehörige Buchstabenreihe $\mathbf{R}_0$ bildet, diese genau dieselben Trennungen von Buchstabenpaaren darbieten, wie R_0. Man kann also aus $\mathbf{R}_0$ die Reihen $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2 \ldots \mathbf{R}_p$ ableiten und entsprechend aus $\mathbf{W}_0$ die Wege $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2 \ldots \mathbf{W}_p$, ohne dass dabei die nebeneinanderstehenden Buchstaben $a_1\ a_1$, $a_2\ a_2$, $\ldots$ $a_l\ a_l$ getrennt werden. Es wird also dann

Fig. 14.



$$\mathbf{R}_p = \mathfrak{A}_1\, a_\alpha\, a_\alpha\, \mathfrak{A}_2\, a_\beta\, a_\beta\, \mathfrak{A}_3\, a_\gamma\, a_\gamma \ldots a_\lambda\, a_\lambda\, \mathfrak{A}_{l+1},$$

wobei die Zahlen $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \lambda$ eine Permutation von $1, 2 \ldots l$ sind und die Reihe

$$\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{l+1}$$

mit der R_p identisch ist.

Wie oben in § 6 drücken sich hier die Perioden des Integrals dritter Gattung durch 2p Grössen aus, die den dort mit (a), (b) $\ldots$ $(m)_{p-1}$ $(n)_{p-1}$ bezeichneten entsprechen und durch die $\nu - 1 + l$ Integrale, die längs $\mathbf{W}_p$ genommen sind, von einem Punkte eines in $\mathbf{R}_p$ noch auftretenden Ueberganges zum gegenüberliegenden am andern Ufer. Diejenigen Theile dieser Integrale, welche sich längs der Uebergänge erstrecken, zerstören sich gegenseitig und es bleiben nur die Theile, welche sich auf die im Wege liegenden Curven U_i beziehen, zu welchen aber jetzt auch die Kreise um die Punkte Q gehören. Wenn zu einer Curve U_i eine

Entwickelung von $\varphi(x\,y)$ gehört, in welcher $\frac{1}{x-\xi}$ fehlt, so ist das fragliche Integral $= o$, sonst hat es einen von Null verschiedenen Werth. Ist also die Anzahl aller Curven U_i, deren zugehörige Entwickelungen in $\varphi(x\,y)$ ein Glied mit $\frac{1}{x-\xi}$ erzeugen, gleich m und sind $A_1, A_2, \ldots A_m$ die betreffenden Integralwerthe, so drücken sich die sämmtlichen Perioden des Integrales $\int \varphi(x\,y)\,dx$ durch die $2p$ Grössen $(a), (b), \ldots (m)_{p-1}, (n)_{p-1}$ und die $A_1, A_2 \ldots A_m$ aus. Die letzteren sind aber nicht unabhängig. Denn weil in T'' $\int \varphi(x\,y)\,dx$ eine einwerthige Function der oberen Grenze und W_0 in T'' geschlossen ist, wird das um W_0 genommene Integral gleich Null. Bei dieser Integration zerstören sich wieder die über die Ufer der Uebergänge genommenen Theile; diejenigen, die sich auf eine und dieselbe Curve U_i beziehen, schliessen sich zu einem um diese Curve genommenen Integral zusammen und ergeben o oder eine der Zahlen $A_1, A_2, \ldots A_m$. Also ist

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = o$$

womit ein bekanntes Resultat wieder gefunden ist.[1]) Es lassen sich also die Perioden des Integrals dritter Gattung mit m logarithmischen Unstetigkeiten durch höchstens $2p + m - 1$ Grössen darstellen.

Ein weiteres Eingehen auf die, wie in § 8 abzuleitenden Beziehungen, wobei Integrale zweiter und dritter Gattung in Frage kommen, würde zu sehr von meinem nächsten Zweck abführen; ich kann es daher umsomehr unterlassen, als es keiner Schwierigkeit unterliegt, z. B. den Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter mit den gegebenen Hilfsmitteln abzuleiten.

---

1) Siehe z. B. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie u. s. w. 2. Auflage. Seite 204 Gl. (19a).

§ 10.

Zum Schlusse noch einige Beispiele.

I. Zweiblätterige Fläche mit 4 Verzweigungspunkten, zu welchen wir noch zwei Knotenpunkte hinzunehmen, (Fig. 15 in der die Verzweigungs-

Fig. 15. (Erstes Blatt)

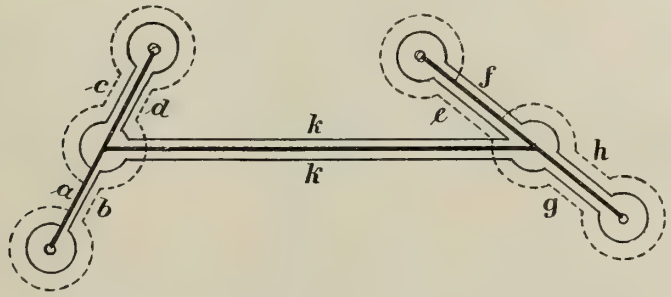
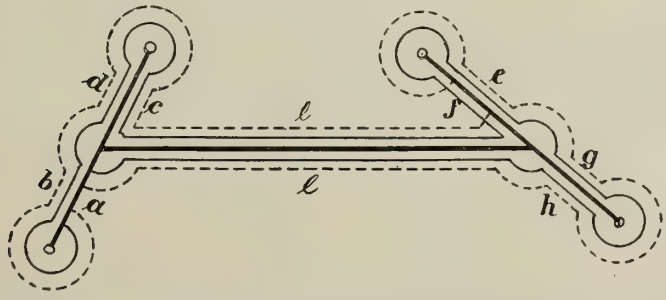


Fig. 15. (Zweites Blatt)



punkte mit kleinen Kreisen bezeichnet sind). Die nähere Untersuchung ergibt die in der Figur angegebene Art des Zusammenhangs. Nimmt man a zum fundamentalen Uebergang, so ist die Reihe

$$R_0 = c\,d\,\underline{k}\,e\,\underline{f}\,h\,g\,\underline{k}\,b\,b\,d\,c\,l\,\underline{f}\,e\,g\,h\,l$$ [1])

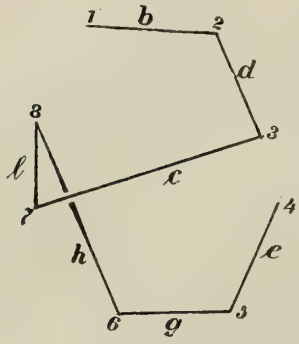
der entsprechende Weg W_0 ist in Fig. 15 eingezeichnet (die ausgezogene Linie), und sein Diagramm ist oben in Fig. 9 Seite 345 gegeben. Eliminirt man k und f, so entsteht

$$R_1 = c\,d\,b\,b\,d\,c\,l\,h\,g\,e\,e\,g\,h\,l$$

in der Trennungen gleicher Buchstabenpaare durch andere Paare nicht mehr vorkommen. Der Weg W_1 ist der in der Figur punktirt gezeichnete; das Diagramm zeigt Fig. 16.

1) Die zu eliminirenden Buchstaben sind hier und bei den folgenden Beispielen unterstrichen.

Fig. 16.



Die fundamentalen Perioden sind die Integrale über die Uferfolgen

e f h g und h g k b b d c l.

II. Als zweites Beispiel nehmen wir das von Clebsch und Gordan gegebene, indem wir annehmen, die Verzweigungsschnitte seien alle aus einem Knotenpunkte gezogen. Dann ist der Zusammenhang der Blätter direct durch die Schleifen gegeben und wir erhalten folgende Uebersicht der Uferbezeichnungen:

Schnitte

Blätter		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	a b		e f			l m		p q				
	2	b a	c d		g h			n o	q p	r s	t u		
	3		d c			i k	m l			s r		v w	x y
	4			f e	h g	k i		o n			u t	w v	y x

Unter der Nummer eines Schnittes stehen die Bezeichnung der Ufer und jeweils links und rechts der Namen des Ufers, welches vom Knotenpunkte gesehen links bez. rechts ist. Viele Ufer sind nicht bezeichnet. Würde man für sie Zeichen einführen, so würden dieselben durchweg nebeneinander auftreten und auf alle Werthe ohne Einfluss sein. Indem wir die Uebergänge a c und e zu fundamentalen wählen wird

$R_0 = f\,l\,m\,p\,q\,i\,k\,m\,l\,s\,r\,v\,w\,x\,y\,d\,d\,g\,h\,n\,o\,q\,p\,r\,s\,t\,u\,b\,b\,h\,g\,k\,i\,o\,n\,u\,t\,w\,v\,y\,x\,f.$

Eliminirt man l und q, so wird

$R_1 = f\,s\,r\,v\,w\,x\,y\,d\,d\,g\,h\,n\,o\,i\,k\,m\,m\,p\,p\,r\,s\,t\,u\,b\,b\,h\,g\,k\,i\,o\,n\,u\,t\,w\,v\,y\,x\,f$

und das erste Paar von fundamentalen Periodenwegen ist gegeben durch die Buchstabenreihen

m p q i k m

i k m l s r v w x y d d g h n o.

Eliminirt man weiter s und g, so entsteht

$R_2 = f\,t\,u\,b\,b\,h\,h\,n\,o\,i\,k\,m\,m\,p\,p\,r\,r\,v\,w\,x\,y\,d\,d\,k\,i\,o\,n\,u\,t\,w\,v\,y\,x\,f$

und das zweite Paar von Periodenwegen ist gegeben durch

r v w x y d d g h n o i k m m p p r

und

h n o i k m m p p r s t u b b h.

Eliminirt man endlich etwa w und y, so kommt

$R_3 = f\,t\,u\,b\,b\,h\,h\,n\,o\,i\,k\,m\,m\,p\,p\,r\,r\,v\,v\,d\,d\,k\,i\,o\,n\,u\,t\,x\,x\,f,$

in welcher Reihe keine Trennungen mehr übrig sind. Das dritte Paar von Fundamentalperioden ist durch

x y d d k i o n u t

d d k i o n u t w v

gegeben. Es hätte keine Schwierigkeiten, die entsprechenden Wege in die Riemann'sche Fläche einzuzeichnen.

III. Betrachten wir endlich als drittes Beispiel eine siebenblätterige Fläche mit drei Verzweigungspunkten A B C. Die drei Cyklen, die angeben, wie sich bei einem ganzen Umlauf um einen der Punkte A, B oder C die Wurzeln vertauschen, seien

für A 1234567

B 1357246

C . . . . 1526374.

Legen wir die Linien A B und B C als Verzweigungsschnitte, so ergibt sich der folgende Zusammenhang

Blätter		1	2	3	4	5	6	7
A B	l	a	b	c	d	e	f	g
	r	g	a	b	c	d	e	f
B C	l	p	k	m	o	h	l	n
	r	h	l	n	p	k	m	o

*

wo in der mit l bezeichneten Zeile die Namen der linken, in der mit r bezeichneten die der rechten Ufer stehen; links und rechts angenommen wie sie erscheinen, wenn man von A über B nach C geht.

Nehmen wir a b c d e f zu fundamentalen Uebergängen, so ist

$$R_0 = g\,g\,n\,o\,l\,m\,h\,k\,o\,p\,m\,n\,k\,l\,p\,h.$$

Durch Elimination von n und h kommt

$$R_1 = g\,g\,k\,l\,p\;k\,o\,p\,m\,o\,l\,m$$

mit dem ersten Periodenpaar

o l m h k o p m

k o p m n k l p.

Wird aus R_1 k und p eliminirt, so entsteht

$$R_2 = g\,g\,o\,l\,m\;o\,l\,m$$

und für das zweite Periodenpaar ergibt sich

l p und k o.

Wenn man endlich aus R_2 o und l fortschafft, so folgt

$$R_3 = g\,g\,m\,m$$

und das dritte Periodenpaar hat die Wege

l m und m o.

Freiburg in Baden. Im November 1884.

Ueber eine Reproduction

der

Siemens'schen Quecksilbereinheit.

Von

Karl Strecker.

Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit.[1]

Die vorliegende Arbeit habe ich unternommen auf Anregung des Herrn Professor Kohlrausch als einen Theil der im Auftrage der königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften im physikalischen Institut zu Würzburg auszuführenden Bestimmung der Quecksilbercapacität des Ohm.

Ich habe mir die Aufgabe gestellt, die Widerstandscapacität einer Anzahl von Glasröhren aus den Dimensionen derselben abzuleiten, und mit Hilfe dieser Röhren, welche ich mit Quecksilber füllte, mehrere Normal-Drahtwiderstände herzustellen. Bei diesen Messungen suchte ich eine Genauigkeit von 0,0001 zu erreichen.

Sowohl bei der Bestimmung der Dimensionen der Röhren, als besonders bei einem Theile der galvanischen Messungen hat sich manches Neue ergeben, was mir mittheilenswerth erschien; namentlich glaubte ich die Erfahrungen, welche ich bei der Vergleichung von Widerständen nach der Kirchhoff'schen Methode des Differentialgalvanometers gemacht habe, etwas ausführlich darstellen zu sollen.

Schliesslich habe ich die Gelegenheit benutzt, die von mir hergestellte Quecksilbereinheit mit den gegenwärtig gebräuchlichen Widerstandseinheiten zu vergleichen, nämlich mit der von Siemens und Halske und der von der British Association ausgegebenen Einheit; hierbei standen mir durch die dankenswerthe Güte der Herren Siemens und Frölich, sowie Lord Rayleigh und Glazebrook Stücke zur Verfügung, welche mit besonderer Sorgfalt bestimmt worden waren.

---

1) Im April dieses Jahres veröffentlichte ich zum Zwecke der Mittheilung auf der elektrischen Conferenz zu Paris eine kurze Notiz über meine Untersuchung, welche damals noch nicht vollendet war, in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg 1884. Dieselbe ist auch in Exner's Repertorium der Physik abgedruckt worden.

I. Berechnung des Widerstandes einer Quecksilbersäule.

§ 1. Die Normalwiderstände, welche zu meiner Untersuchung dienten, waren gebildet durch mit Quecksilber gefüllte dickwandige Glasröhren von kleinem Querschnitt. Die Enden dieser Röhren waren eben und senkrecht zur Achse abgeschliffen; sie wurden mittels durchbohrter Korkstopfen, in den seitlichen Tubulaturen passend geformter, oben offener Gläser befestigt, welche die nöthigen Verbindungen vermittelten.

§ 2. Den Widerstand eines solchen Rohres haben wir nun zu berechnen.

Eine Säule Quecksilber von 0^0, welche den unveränderlichen Querschnitt Q und die Länge L besitzt, deren Endflächen Ebenen und Niveauflächen sind, hat den Widerstand

$$\frac{L}{Q}.$$

Taucht die Glasröhre, in welche die Quecksilbersäule eingeschlossen ist, zum Zwecke der galvanischen Verbindung in weite Gefässe, welche zugleich mit jener mit Quecksilber gefüllt werden, so sind die Endebenen der Quecksilbersäule nicht mehr Niveauflächen[1]), und der Widerstand wird nicht mehr durch die obige Formel ausgedrückt.

Bestimmt man ausserdem den Quecksilberwiderstand zwischen einer Niveaufläche, welche in dem einen angesetzten Elektrodengefässe liegt und vom Rohrende ziemlich weit entfernt ist, und einer ebenso gelegenen Niveaufläche im anderen Elektrodengefäss, so kommt noch die beiderseitige Stromausbreitung zu obigem Ausdruck hinzu.

Die durch beide Ursachen zugleich bedingte Veränderung des Widerstandes der Röhre entspricht an jedem Ende derselben einer Verlängerung um ein Vielfaches des Radius des Endquerschnittes; also ist der ganze Widerstand

$$W = \frac{L + a\,(r_1 + r_2)}{Q}.$$

1) Kirchhoff, Berl. Monatsber. 1880. — Wied. Ann. 11. 1880. pag. 804.

Nach Maxwell[1]) liegt a zwischen 0,785 und 0,824; ich habe, wie früher Rink[2]) gethan, den Werth a = 0,80 gewählt.

Lord Rayleigh und Sidgwick[3]) und neuerdings Mascart, Nerville und Benoit[4]) haben den Werth 0,82 für a eingesetzt; die letzteren haben einige Versuche angestellt, welche auf diesen Werth von a ungefähr stimmen.

§ 3. Die letzte Formel setzt noch voraus, dass der Querschnitt der Quecksilbersäule überall der gleiche ist; dies ist aber niemals der Fall, wenn man zur Herstellung der letzteren Glasröhren verwendet, welche meistens einen ganz unregelmässig ändernden Querschnitt besitzen.

Um dieser Veränderlichkeit Rechnung zu tragen, denkt man sich die Glasröhre in gleichlange Abschnitte getheilt, welche man als abgestumpfte Kegel ansehen kann. Bedeutet für einen solchen Kegelstumpf q den mittleren Querschnitt, l die Länge und $l \cdot q$ das Volumen, ferner q_1 und q_2 die Endquerschnitte, so ist der Widerstand des Kegelstumpfes[5])

$$w = \frac{l}{q} \cdot \frac{1 + \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}}{3}$$

$$= \frac{l}{q} \cdot \left[1 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{q_1 - q_2}{q_2}\right)^2 \left(1 - \frac{q_1 - q_2}{q_2}\right)\right]$$

Den Ausdruck

$$\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{q_1 - q_2}{q_2}\right)^2 \left(1 - \frac{q_1 - q_2}{q_2}\right)$$

eine sehr kleine Grösse, will ich mit K bezeichnen und schreibe

$$w = \frac{l}{q} \cdot (1 + K)$$

§ 4. Um die mittleren Querschnitte aller Rohrabschnitte zu vergleichen, calibrirt man das Rohr mit einem Quecksilberfaden, der im Mittel nahezu die Länge l besitzt.

---

1) Maxwell, Elektr. und Magn. I. § 308. 309.

2) Rink, Verslagen en Mededeelingen d. kon. Akad. van Wetensch. Afdeel. Natuurkunde. II. 11. pag. 299. 1877.

3) Lord Rayleigh and Mrs. Sidgwick, Philos. Transactions I. 1883. p. 173.

4) Mascart, Nerville et Benoit, Résumé d'expériences sur la détermination de l'ohm etc. 1884.

5) W. Siemens, Pogg. Ann. 110. pag. 1. 1860.

Zu diesem Zwecke wurde das zu untersuchende Rohr auf einem in Millimeter getheilten Massstabe befestigt, dessen Theilfehler kleiner als 0,05 mm waren. Dieser Massstab diente dazu, das Rohr in Abschnitte zu theilen und die Länge des Quecksilberfadens zu messen. Letzteres geschah mit Hilfe eines auf den Massstab aufgelegten Spiegels durch Ablesung mit blossem Auge; die Länge λ des Fadens wurde bestimmt, wenn die Mitte des Fadens mit der Mitte eines Rohrabschnittes zusammenfiel, was leicht und mit Genauigkeit mittels einer kleinen Luftdruckvorrichtung erreicht werden konnte.

Bedeutet v das constante Volumen des Quecksilberfadens, dessen veränderliche Länge wir mit λ bezeichnet haben, τ den Querschnitt in der Mitte des Quecksilberfadens und also auch in der Mitte des betreffenden Rohrabschnittes, so ist

$$q = \tau \left(1 + \frac{1}{4} K\right)$$

$$\tau = \frac{v}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda^2}{l^2} \cdot K\right)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{v}\left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4 l^2} \cdot K\right)$$

und

$$w = l \cdot \frac{\lambda}{v}\left[1 + \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4 l^2}\right) \cdot K\right]$$

Der Widerstand des ganzen Rohrs ohne den Ausbreitungswiderstand berechnet sich also zu

$$W' = \Sigma w = \frac{l}{v} \cdot \Sigma \lambda \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4 l^2} \cdot \right) K\right]$$

Das Volumen eines Rohrabschnittes ist

$$l \cdot q = l \cdot \frac{v}{\lambda} \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2 - l^2}{4 l^2} \cdot K\right]$$

also das Volumen des ganzen Rohrs

$$V = l v \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2 - l^2}{4 l^2} \cdot K\right]$$

Demnach wird

$$W' = \frac{l^2}{V} \cdot \Sigma \lambda \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4 l^2}\right) K\right] \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2 - l^2}{4 l^2} \cdot K\right]$$

und unter Vernachlässigung des Gliedes, welches in Bezug auf K von der zweiten Dimension ist:

$$W' = \frac{l^2}{V} \cdot \left\{ \Sigma\lambda \cdot \Sigma\frac{1}{\lambda} + \Sigma\frac{1}{\lambda} \cdot \Sigma\lambda \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \cdot K\right) - \Sigma\lambda \cdot \Sigma\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} K \right\}$$

§ 5. In den beiden letzten Gliedern dieses Ausdrucks, welche gegen das erste sehr klein sind, setze ich $\Sigma\lambda = nS$, wobei n die Anzahl der Messungen der Fadenlänge, S den mittleren Werth der letzteren bedeutet; statt $\Sigma\frac{1}{\lambda}$ setze ich näherungsweise $\frac{n}{S}$; dann werden die beiden kleinen Glieder

$$= \frac{n}{S} \cdot \left[\Sigma\lambda \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2}\right) K - S^2 \cdot \Sigma\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} K \right]$$

$$= \frac{n}{S} \cdot \Sigma\left[K \left(\lambda + \frac{(\lambda^2 - S^2)\ (\lambda^2 - l^2)}{\lambda \cdot 4l^2}\right)\right].$$

Diesen Ausdruck kann man unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung auf die Form bringen

$$\frac{n}{S} \cdot \left[l \cdot \Sigma K + \Sigma K\,(\lambda - l) \left(1 + \frac{\lambda - S}{l}\right)\right]$$

Von den beiden Theilen des in der eckigen Klammer stehenden Ausdrucks ist der erste nur aus positiven Werthen zusammengesetzt, während der zweite positive und negative Glieder enthält; ausserdem sind die einzelnen Bestandtheile der zweiten Summe an absoluter Grösse weit geringer als die der ersten. Führt man die Rechnung an einem Beispiele aus, so sieht man, dass $\Sigma K\,(\lambda - l) \left(1 + \frac{\lambda - S}{l}\right)$ noch nicht den hundertsten Theil des in der Klammer stehenden Werthes ausmacht; da der letztere überhaupt sehr gering ist, und nur bei Röhren von wenig gleichmässigem Querschnitt einige Hunderttausendtel des zu berechnenden Widerstandes ausmacht, so darf man den zweiten Summanden aus obiger Klammer weglassen.

§ 6. Damit wird unsere Formel [1])

$$W' = \frac{l^2}{V} \cdot \left[\Sigma\lambda \cdot \Sigma\frac{1}{\lambda} + \frac{n\,l}{S} \cdot \Sigma K \right]$$

---

1) Vgl. Maxwell, Elektr. u. Magn. I. § 361. — Matthiessen, Reports of electr. standards. p. 128. Third report 1864.

Dieser Ausdruck ist für die numerische Berechnung noch sehr unbequem; um das Glied $\Sigma\lambda \cdot \Sigma\frac{1}{\lambda}$ umzugestalten, will ich eine Grösse s einführen, welche bis auf einen im Belieben des Rechners liegenden kleinen Betrag der mittleren Fadenlänge $S = \frac{1}{n} \cdot \Sigma\lambda$ gleich ist.

Dann sei

$$\Sigma\lambda = ns + D$$

worin D eine gegen ns kleine Grösse ist. Ferner kann ich schreiben

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda - s}{s}} = \frac{1}{s} \cdot \left[1 - \frac{\lambda - s}{s} + \left(\frac{\lambda - s}{s}\right)^2 - \cdot\cdot\right]$$

Damit wird

$$\Sigma\lambda \cdot \Sigma\frac{1}{\lambda} = \left[ns + D\right] \cdot \frac{1}{s} \cdot \left[1 - \frac{\lambda - s}{s} + \left(\frac{\lambda - s}{s}\right)^2 - \cdot\cdot\right]$$

$$= n^2 \left(1 + \frac{D}{ns}\right) \left(1 - \frac{1}{ns} \Sigma(\lambda - s) + \frac{1}{ns^2} \cdot \Sigma(\lambda - s)^2 - \cdot\cdot\right)$$

$$\Sigma(\lambda - s) = \Sigma\lambda - ns = D$$

$$\Sigma\lambda \cdot \Sigma\frac{1}{\lambda} = n^2 \left(1 + \frac{D}{ns}\right) \left(1 - \frac{D}{ns} + \frac{1}{ns^2} \cdot \Sigma(\lambda - s)^2 - \cdot\cdot\right)$$

$$W' = \frac{n^2 l^2}{V} \left\{1 + \frac{1}{ns^2} \cdot \left[\Sigma(\lambda - s)^2 - \frac{1}{s} \Sigma(\lambda - s)^3 + \frac{1}{s^2} \Sigma(\lambda - s)^4 - \cdot\cdot\cdot\right]\right.$$

$$\left.\left[1 + \frac{D}{ns}\right] - \left(\frac{D}{ns}\right)^2 + \frac{l}{nS} \cdot \Sigma K\right\}$$

Dieser Formel liegt eine Calibrirung zu Grunde, bei welcher man das Rohr in Abschnitte von der constanten Länge l getheilt hatte; indem die Mitte des zur Calibrirung dienenden Quecksilberfadens immer um die Länge l verschoben wurde, mass man die Länge des Fadens in jedem Rohrabschnitt. Der Anfangspunkt für die genannte Eintheilung der Röhre ist durchaus willkürlich; daraus folgt, dass man jede beliebige Strecke der Röhre von der Länge l als Rohrabschnitt ansehen kann; man darf also die obige Formel auch anwenden, wenn die Mitte des Quecksilberfadens nicht um l, sondern um einen beliebigen Theil von l verschoben und in jeder neuen Lage die Länge des Fadens gemessen wird; gefordert ist nur, dass die Punkte, an denen die Rohrquerschnitte verglichen werden,

durchaus gleichmässig über das ganze Rohr vertheilt seien, und dass man folgerichtig für die Rohrenden, wo eine Messung des Quecksilberfadens unmöglich wird, die Fadenlänge durch Extrapoliren berechnet.

Für die Länge l habe ich 40 mm gewählt, die Mitte des Quecksilberfadens habe ich immer um 10 mm verschoben.

Der Ausdruck K, welcher in der Formel für W vorkommt, enthält die Endquerschnitte der einzelnen Abtheilungen der Röhre; es genügt, hier die Querschnitte umgekehrt proportional zu setzen den Längen λ_1 und λ_2 des Quecksilberfadens, welche beobachtet werden, wenn die Mitte des Fadens mit dem Anfange oder dem Ende eines Rohrabschnittes zusammenfällt. Dadurch wird

$$K = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}\right)$$

Die Längen λ_1 und λ_2 liefert die Calibrirung zugleich mit λ, wenn man die Fadenmitte immer um 10 mm verschiebt.

Bei der Berechnung von $l \Sigma K$ darf man sich weitere Vernachlässigungen erlauben, indem man in dem Ausdruck für K den Factor $1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$ weglässt und statt $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$ den nahe gleichen Bruch $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l}$ setzt. Dann hat man statt $l \Sigma K$ den bequem zu berechnenden Ausdruck

$$\frac{1}{12 \cdot l} \cdot \Sigma (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

welcher dem richtigen Werth von $l \Sigma K$ fast immer genau genug gleich ist.

§ 7. Eine Berechnung der Calibercorrection nach der eben entwickelten Formel ist verhältnissmässig einfach; bei recht guten Röhren ist nur die Summe der Quadrate und Cuben zu ermitteln; bei Röhren von weniger gutem Caliber muss man allerdings bis zu der Summe der sechsten Potenzen fortschreiten, doch ist die Berechnung der Summen höherer Ordnung als der dritten mit nur wenigen Ziffern auszuführen.

Was die bei der Bestimmung der Calibercorrection zu erreichende Genauigkeit betrifft, so hängt dieselbe wesentlich davon ab, ob die gewählte Länge l klein genug ist, um die Voraussetzung zu rechtfertigen, von der wir ausgegangen sind, dass nämlich jedes Stück der Röhre von

dieser Länge l als abgestumpfter Kegel betrachtet werden kann. Man darf nicht sehr kurze Quecksilberfäden nehmen, weil man sonst die Aenderungen der Fadenlänge nicht genau genug beobachten kann; deshalb habe ich l nicht kleiner als 40 mm genommen.

Von der Wahl dieser Länge abgesehen wird man durch grosse Anzahl der Messungen von λ jedenfalls eine sehr grosse Genauigkeit erreichen können. Bei meinen Röhren betrug die Anzahl der gemessenen Fadenlängen 120 bis 150; ich glaube, aus angestellten Versuchen schliessen zu dürfen, dass die bei der Calibrirung gemachten Beobachtungsfehler nur einen Einfluss von wenigen Hunderttausendteln auf das Resultat haben. Etwas Anderes ist die Frage, ob bei allen meinen Röhren die Länge von 40 mm für l ausreichend klein war, um die Calibercorrection richtig zu bestimmen. Ich werde darauf später zurückkommen.

§ 8. Ich setze zur Abkürzung

$$C = 1 + \frac{1}{n s^2} \cdot \left[\Sigma (\lambda - s)^2 - \frac{1}{s} \Sigma (\lambda - s)^3 + \frac{1}{s^2} \Sigma (\lambda - s)^4 - \cdots \right] \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{D}{n s} \right] - \left(\frac{D}{n s} \right)^2 + \frac{l \Sigma K}{n S}$$

und habe dann

$$W' = C \cdot \frac{n^2 l^2}{V} = C \cdot \frac{L^2}{V}$$

Das Volumen der Röhre wird durch Wägung der Masse Quecksilbers gefunden, welche das Rohr bei einer gemessenen Temperatur gerade füllt; ist diese Masse = M, die Dichtigkeit des Quecksilbers bei der beobachteten Temperatur = D, so ist

$$W' = C \cdot \frac{L^2 D}{M}$$

Um auch den Ausbreitungswiderstand richtig hinzuzufügen, hat man zu berücksichtigen, dass in diesem Ausdrucke für W' statt des Querschnitttes Q

$$\frac{M}{LD}$$

steht; wir haben also den gesammten Widerstand der Quecksilberröhre

$$W = C \cdot \frac{LD}{M} \cdot [L + a (r_1 + r_2)]$$

Ist der specifische Leitungswiderstand des Quecksilbers nicht $= 1$, sondern $= \sigma$, so ist

$$W = \sigma \cdot C \cdot \frac{LD}{M} \cdot [L + a(r_1 + r_2)]$$

Um den Widerstand W als die in Metern ausgedrückte Länge einer Säule Quecksilbers von 0^0 und von 1 qmm Querschnitt zu erhalten, hat man in diese Formel L und r in Metern und M in Grammen einzusetzen und als Einheit des specifischen Widerstandes denjenigen des Quecksilbers bei 0^0 zu nehmen.

II. Normalröhren.

§ 9. Herstellung der Normalröhren. Bei der Auswahl meiner Röhren nahm ich darauf Rücksicht, sowohl solche von möglichst constantem Querschnitt, als auch solche von weniger gutem Caliber zu verwenden; ich wählte schliesslich fünf Röhren, von denen zwei sehr gut, eine von mittlerer und zwei von geringer Güte des Calibers waren. Die Längen der Röhren betrugen 1,2 und 1,5 m, die Querschnitte zwischen 0,5 und 3,5 qmm. Die Widerstände verhielten sich ungefähr wie 1 : 3 : 4 : 7 : 9.

Die Enden dieser Röhren wurden mit Schmirgel und Terpentinöl auf einer Kupferscheibe eben und senkrecht zur Achse abgeschliffen; ich benutzte dazu die Drehbank, auf der ich zunächst die Kupferscheibe genau eben und senkrecht zur Drehungsachse abdrehte; dann wurde die parallel der Achse in festen Lagern eingeklemmte Glasröhre sanft gegen die rotirende Kupferscheibe gedrückt, während die letztere fortwährend mit einem dünnen Brei von Schmirgel und Terpentinöl benetzt wurde.

Um zu prüfen, ob die Endflächen hinreichend eben geschliffen seien, drückte ich ein Plättchen aus mattem Glase mit ganz wenig Fett auf das Rohrende; wo sich die Glasflächen berührten, wurde das Plättchen durchsichtig. Das Schleifen wurde so lange fortgesetzt, bis die Probe mit dem Glasplättchen zeigte, dass die Endflächen fast genau eben, jedoch noch schwach convex seien; denn ein Vortreten der Ränder gegen die Rohrmitte würde zu Fehlern bei der Längenmessung und Volumbestimmung der Röhren Veranlassung gegeben haben. Grosse Sorgfalt wurde verwendet, den inneren Rand der Glasröhren beim Schleifen nicht ausspringen zu lassen.

Ausmessung der Dimensionen der Normalröhren.

§ 10. Messung der Rohrlänge. Die Länge der Quecksilbersäule, welche ein Rohr aufnahm, konnte nicht unmittelbar gemessen werden. Man durfte nicht den an einer beliebigen Stelle gemessenen Abstand der beiden Endflächen für diese Länge setzen, da ja diese Flächen nicht genau Ebenen und nur nach dem Augenmass senkrecht zur Achse geschliffen waren.

Ich kittete nun 1,5 mm dicke, runde Milchglasplättchen, welche die Grösse der Endflächen besassen und eben waren, auf die letzteren; wenn man den Abstand der Ränder der aufgekitteten Plättchen auf zwei diametral gegenüberliegenden Seiten der Röhre mass, so lieferte das arithmetische Mittel einen richtigen Werth für die Länge der Quecksilbersäule, welche das Rohr aufnahm.

Die Abstände der Plattenränder wurden gemessen mit Hilfe eines 2 m langen Glasmassstabes, der auf dem grössten Theil seiner Länge in cm getheilt war und an jedem Ende eine 10 cm lange Theilung in mm trug. Dieser Massstab, ein Spiegelglasstreifen von 8 cm Breite und 1 cm Dicke, wurde mit der Theilung nach unten auf die Röhre gelegt, durch untergeschobene Holzklötzchen und Keile dafür gesorgt, dass die Röhre gerade lag und die Theilung des Massstabes auf ihrer ganzen Länge berührte. Die Abstände der Ränder der Milchglasplättchen von den nächstgelegenen Theilstrichen des Massstabes wurden mit einem Mikroskope mit Ocularmikrometer gemessen; das letztere theilte 1 mm des Massstabes in Zehntel und man konnte sicher noch 0,02 mm schätzen. Zugleich überzeugte man sich, dass die Dicke der Kittschicht, welche die Plättchen mit den Röhren verband, so gering war, dass man sie bei der angewandten schwachen Vergrösserung gar nicht wahrnehmen konnte.

Bei jeder Messung wurden beide Ränder jedes Plättchens auf den Massstab eingeschätzt. Nachdem in einer Lage der Röhre drei Messungen ausgeführt worden, drehte man dieselbe um 180^0 und wiederholte die dreimalige Messung. Die zusammengehörigen Bestimmungen lieferten auf etwa 0,03 mm dieselben Werthe.

Die Abstände derselben Plattenränder, gemessen in zwei um 180^0 verschiedenen Lagen des Rohrs, unterschieden sich höchstens um 0,05 mm.

Die Dicke der Milchglasplättchen wurde mit dem Sphärometer bestimmt. Es zeigte sich, dass die mit Hilfe der äusseren Plattenränder bestimmte Rohrlänge ein wenig grösser ausgefallen war, als die mit Hilfe der inneren Ränder ermittelte; doch betrug der Unterschied immer weniger als 0,04 mm.

Schliesslich wurde der benutzte Glasmassstab mit einem Normalmeter verglichen, das von der Normalaichungscommission in Berlin ausgegeben und mit einem Verzeichniss der Theilfehler versehen war. Die Vergleichung geschah unter Anwendung des oben benutzten Mikroskopes mit Ocularmikrometer, indem der Glasmassstab mit der Theilung nach unten auf den Normalstab gelegt wurde.

Die Genauigkeit, mit welcher die Rohrlänge gemessen wurde, ist nach dem eben Gesagten grösser als 0,05 mm.

§ 11. Ausbreitungswiderstand. Um die Werthe von r_1 und r_2 zu erhalten, berechnet man aus M, L und D den mittleren Radius des Rohrs und benutzt die durch die Calibrirung bekannten Verhältnisse des mittleren Querschnittes zu den Endquerschnitten. Ist r der mittlere Radius, λ_a und λ_z die erste und die letzte der gemessenen Längen des Quecksilberfadens, $S = \frac{1}{n} \Sigma\lambda$ die mittlere Länge desselben, so ist

$$r = \sqrt{\frac{M}{L \cdot D \cdot \pi}}$$

$$a\,(r_1 + r_2) = a\,r \cdot \left(\sqrt{\frac{S}{\lambda_a}} + \sqrt{\frac{S}{\lambda_z}}\right)$$

Der Ausbreitungswiderstand beträgt für meine Röhren zwischen 0,6 und 2 mm; da der Faktor a bis auf etwa 3% bekannt ist, wird man die in Frage kommenden Grössen bis auf 0,02 bis 0,06 mm genau bestimmen können.

Das in der Formel für W stehende Product

$$L \,.\, [L + a\,(r_1 + r_2)]$$

wird also im äussersten Fall um 0,0001 unsicher sein.

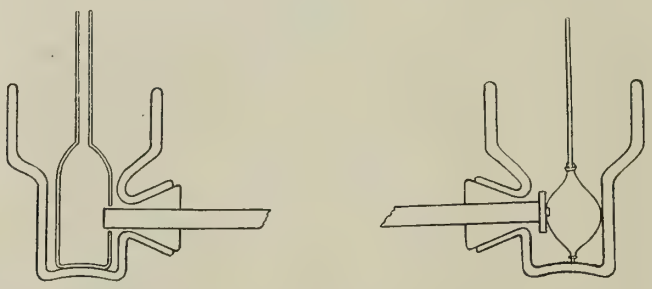
§ 12. Auswägung der Röhren. Die Bestimmung der Masse der Quecksilberfüllung einer Röhre wurde auf folgende Art und Weise ausgeführt, welche mir auch erlaubte, jedesmal nach dem Gebrauche

eines Normalrohres dasjenige Quecksilber zu wägen, welches zur Herstellung des Widerstandes gedient hatte.

Das sorgfältig gereinigte und getrocknete Glasrohr war mit Hilfe zweier durchbohrter Korke in den seitlichen Oeffnungen der beiden oben offenen Glasgefässe befestigt, welche zur Aufnahme der Elektroden dienten. In das eine dieser Gefässe wurde Quecksilber eingegossen, welches dann langsam durch die Röhre strömte und auch das andere Elektrodengefäss anfüllte.

Um den Quecksilberinhalt des Rohrs zu wägen, verschloss man (nach Entfernung der Elektroden aus den Endgefässen) das eine Ende des gefüllten Rohrs unter Quecksilber mit einem ebenen Eisenplättchen, das an einer Feder befestigt war (vgl. Fig.), und saugte das in dem anderen Elektrodengefäss befindliche Quecksilber aus. Dabei war nicht zu vermeiden, dass aus dem offenen Rohrende eine kleine Menge Quecksilber mit fortgenommen wurde; um diese zu ersetzen, hob man vorsichtig das

Fig. 1.



verschliessende Eisenplättchen am anderen Ende ein wenig, damit etwas Quecksilber nachfliessen konnte, doch nur so viel, dass an dem freien Rohrende ein Meniscus entstand. Nun wurde auch das Endgefäss, in welchem sich das verschliessende Eisenplättchen befand, von Quecksilber entleert, darauf der am offenen Rohrende befindliche Meniscus mit einer ebenen Glasplatte weggedrückt, und über dieses Rohrende ein Gefäss geschoben, das zur Aufnahme des Quecksilbers diente; dieses Gefäss war aus Glas gefertigt und hatte eine seitliche Oeffnung, die gerade gross genug war, das Rohrende durchzulassen.

Nachdem das Gefäss über das offene Rohrende geschoben und in seiner Stellung durch etwas weiches Papier, das man in das Elektroden-

gefäss einschob, befestigt worden war, hob man das verschlossene Ende der Röhre ein wenig in die Höhe, entfernte die Eisenplatte und liess die Quecksilberfüllung langsam in das zum Auffangen bestimmte Gefäss fliessen; der letzte im Rohr bleibende grössere Tropfen wurde durch vorsichtiges Blasen herausgebracht. Nun hafteten noch manchmal ganz winzige Quecksilbertröpfchen im Rohr nahe den Enden; dieselben konnte man mit Hilfe eines feinen Drahtes leicht herausschaffen und der grösseren Menge zufügen.

Die beschriebenen Operationen waren leicht und bequem auszuführen; von etwa 30 Entleerungen der Röhre, welche ich auf diese Weise vornahm, misslangen nur zwei; anfänglich hatte die Schliessfeder eine andere Gestalt, welche weniger günstig war, so dass die Versuche öfter fehlschlugen.

§ 13. Das Quecksilber wurde in dem Gefäss gewogen, in dem es aufgefangen worden. Ich benützte dazu eine sehr gute Rüprecht'sche Wage, welche auf 1 mg einen Ausschlag von 1 mm gab und sehr constante Einstellungen lieferte.

Der Gewichtsatz bestand aus vergoldetem Messing und war vor diesen Wägungen calibrirt und mit einem 100 g-Stück der Normalaichungscommission in Berlin verglichen worden. Alle meine Wägungen waren Doppelwägungen.

War das gefundene scheinbare Gewicht einer Quecksilbermasse in Grammen gleich M, so wurde zur Reduction auf den leeren Raum davon abgezogen

$$M \,.\, 0{,}054 \text{ mg}.$$

Von der Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers wird weiter unten (§ 14) die Rede sein.

Nachdem ich vorgängig etwa 30 Auswägungen meiner fünf Röhren vorgenommen hatte, um die Uebereinstimmung der Resultate zu prüfen, habe ich im Laufe der späteren Widerstandsbestimmungen nochmals ebenso viele Wägungen ausgeführt. Die Resultate all dieser Bestimmungen mitzutheilen, dürfte wenig Zweck haben; ich will vielmehr eine Tabelle geben, welche ein Urtheil über die Genauigkeit derselben ermöglicht.

Die erste wagrechte Zeile dieser Tabelle enthält die Grösse der vorkommenden Abweichungen der Einzelbestimmungen vom Mittel in Zehn-

tausendteln des Ganzen; die senkrechten Spalten geben für jedes Rohr an, wie viele der Bestimmungen seines Quecksilberinhalts [reducirt auf eine gemeinschaftliche Temperatur] Abweichungen zeigen, welche innerhalb der in der obersten Zeile gegebenen Grenzen liegen.

Rohr-Nr.	0,0-0,25	0,26-0,50	0,51-0,75	0,76-1,00	1,0-1,3	1,3-1,6	1,8	Summe
1	6	1	0	2	0	0	0	9
2	11	2	1	0	0	1	1	16
3	4	5	1	0	0	1	0	11
4	6	4	2	0	0	0	0	12
5	8	1	2	2	0	0	0	13
Summe	35	13	6	4	0	2	1	61

Ich verfolgte ursprünglich den Zweck. durch die Wägung der Quecksilbermasse, welche die Füllung einer Röhre gebildet und zur Herstellung eines Widerstandes gedient hatte, mich gegen etwaige Veränderlichkeit dieser Masse zu sichern; die angegebene Tabelle zeigt, dass eine solche Veränderlichkeit nicht vorhanden ist; die beobachteten Differenzen der Einzelwerthe vom Mittel, von denen $\frac{4}{5}$ kleiner als 0,00005 und nur $\frac{1}{20}$ grösser als 0,0001 sind, lassen sich durch Beobachtungsfehler erklären. Man darf also, wie Andere bereits gethan haben, die Masse Quecksilbers, welche das Rohr bei einer gegebenen Temperatur aufnehmen kann, als eine Constante des Rohrs ansehen. Deshalb habe ich der Berechnung der Widerstände der Röhren die Mittelwerthe aus sämmtlichen Massenbestimmungen zu Grunde gelegt; die einzelne Wägung nach jeder Widerstandsbestimmung dient dann nur zur Controle.

Von den drei Fällen, in welchen die beobachtete Abweichung vom Mittel die Grösse von 0,0001 übersteigt, entfällt einer auf die vorgängige Auswägung der Röhren, wobei noch keine Widerstandsmessungen vorgenommen wurden, einer wurde bei Untersuchungen von untergeordneter Bedeutung beobachtet (§ 35), und nur der dritte trifft eine Bestimmung von Wichtigkeit (§ 42. 1. 2). Ich werde die Messungen, bei denen die grossen Abweichungen wahrgenommen wurden, besonders hervorheben.

Die der Berechnung der Widerstände der Normalröhren zu Grunde liegenden Mittelwerthe für die Massen der Quecksilberfüllungen sind ohne Zweifel auf einige Hunderttausendtel richtig.

§ 14. Temperaturbestimmung. Um die Temperatur des Quecksilbers zu bestimmen, welches in einer Röhre enthalten war, brachte ich die letztere in ein Wasserbad, welches aus einem 1,6 m langen, 10 cm breiten und 10 cm hohen Troge aus Zinkblech bestand, der auf den Seiten und am Boden mit Filz umhüllt war und mit einem Holzdeckel geschlossen wurde. Das Wasser stand im Troge so hoch, dass alle mit Quecksilber gefüllten Theile der Röhre und der Elektrodengefässe von Wasser umgeben waren und es auch während der beim Entleeren der Röhre nöthigen Manipulationen blieben.

In dem Deckel des Wasserbades befanden sich zwei Löcher, in welchen Thermometer befestigt wurden; wenn der Deckel auf dem Bade lag, waren die Gefässe der beiden Thermometer in gleicher Höhe mit der Quecksilberröhre.

War die Temperatur des Bades längere Zeit hindurch constant geblieben, so wurde das Mittel aus den Angaben dieser Thermometer als die Temperatur des im Rohre befindlichen Quecksilbers angesehen; die beiden Thermometer stimmten immer bis auf Theile von $0^0,1$ überein. Die Aenderung der Temperatur betrug nie mehr als wenige Hundertelgrade in der Viertelstunde.

Ich benutzte mehrere sogenannte Normalthermometer, vier von O. Wiegand in Würzburg (im Februar 1882) verfertigte, welche in Zehntelgrade getheilt waren, und eines von Geissler in Bonn (seit 1873 in Gebrauch), welches Fünftelgrade zeigte; bei allen konnte man noch $0^0,02$ mit Sicherheit schätzen. Die Nullpunkte dieser Thermometer bestimmte ich häufig; ausserdem verglich ich die Thermometer unter einander und zwei derselben mit dem Luftthermometer bei 10^0 und 20^0; die letztere Vergleichung war auf mindestens $0^0,05$ genau, so dass die auf das Luftthermometer bezogenen Angaben meiner Quecksilberthermometer als auf $0^0,05$ bis $0^0,08$ richtig anzusehen sind; $0^0,11$ bedeutet ein Zehntausendtel des Widerstandes.

§ 15. Reinigung des Quecksilbers, specifischer Widerstand und Dichtigkeit desselben. Das Quecksilber reinigte ich auf folgende Weise:

Eine grössere Menge des Metalls wurde mit 5% iger Salpetersäure und darauf mit Wasser gewaschen, indem es aus feinen Oeffnungen in kleinen Tröpfchen durch eine etwa 1,5 m hohe Schicht der Waschflüssigkeit fiel; dann wurde es unter mässigem Erwärmen getrocknet und in einen Destillationsapparat gebracht.

Dieser war dem von L. Weber[1]) beschriebenen continuirlich arbeitenden Apparate nachgebildet; er besass oberhalb des Siedegefässes einen seitlichen Ansatz mit Hahn, um den Apparat mit der Luftpumpe verbinden zu können; das Gefäss, in dem sich das Destillationsproduct sammelte und aus dem es in eine untergesetzte Glasflasche ausfloss, war möglichst klein genommen. Nachdem eine grössere Menge Quecksilber destillirt worden, entfernte ich den Rückstand, reinigte den Apparat und brachte das Product der ersten Destillation nochmals in denselben. Erst nach dieser Wiederholung der Destillation wurde das Quecksilber als rein angesehen.

Dieses Quecksilber zeigte immer das gleiche Leitungsvermögen, einerlei ob es frisch destillirt oder ob es schon Monate lang in Glasflaschen aufbewahrt worden, einerlei ob es luftfrei oder mit Luft geschüttelt war. Die hierzu gehörigen Versuche sollen weiter unten ihre Stelle finden (§ 35. 36).

Um indess jede Unsicherheit, welche in dieser Beziehung entstehen konnte, zu vermeiden, zog ich es vor, zu definitiven Messungen nur Quecksilber zu verwenden, welches noch nicht gebraucht worden war.

Von der Bestimmung des specifischen Widerstandes des Quecksilbers bei Temperaturen zwischen 0^0 und 20^0 wird ebenfalls weiter unten die Rede sein (§ 37). Ich will hier nur angeben, dass ich denselben innerhalb der genannten Grenzen bei der Temperatur t (nach dem Luftthermometer) zu

$$\sigma_t = 1 + 0{,}000900\,t + 0{,}00000045\,t^2$$

1) Leonh. Weber, Carl's Repertorium 15. pag. 52. 1879.

bestimmt habe, und dass diese Formel meine Beobachtungen bis auf wenige Hunderttausendtel genau wiedergibt.[1])

Die Dichtigkeit des Quecksilbers berechnete ich aus den Regnault-schen Zahlen und den von Wüllner[2]) angegebenen Temperaturcoefficienten.

§ 16. Normaltemperatur. Sämmtliche Messungen wurden bei Temperaturen zwischen 8^0 und 17^0 angestellt. Ich reducire alle Angaben auf 10^0 C, gemessen nach dem Luftthermometer.

Für diese Temperatur ist

$$W_{10} = 1{,}00904 \cdot C \cdot \frac{13{,}5713 \cdot L_{10}}{M_{10}} \cdot [L_{10} + a\,(r_1 + r_2)]$$

und für irgend eine andere Temperatur t zwischen 0^0 und 20^0 (unter Berücksichtigung der Ausdehnung des Glases)

$$W_t = W_{10} \cdot \frac{\sigma_t}{\sigma_{10}} = W_{10} \cdot [1 + 0{,}000892\,(t - 10) + 0{,}00000045\,(t^2 - 100)]$$

wofür bei kleinen Temperaturintervallen auch genügt

$$W_t = W_{10} \cdot [1 + 0{,}00090\,(t - 10)]$$

§ 17. Resultate der Ausmessung der Dimensionen der Normalröhren. Die Constanten meiner fünf Röhren, bezogen auf die Normaltemperatur von 10^0 C (nach dem Luftthermometer), sind in der nachfolgenden Tabelle vereinigt. Die beigefügte Zeichnung gibt die Querschnittsänderungen der Röhren; die letzteren selbst sind als Abscissenachsen gedacht und die Querschnitte als Ordinaten aufgetragen. Wo der Rohrquerschnitt gleich dem mittleren Querschnitt ist, wird dies durch eine kurze horizontale Linie angezeigt; der mittlere Querschnitt ist bei allen Röhren durch die gleiche Grösse ausgedrückt. Die Abscissenachsen, welche auf der Figur nicht angegeben sind, würden für jede der fünf Kurven 63 mm von der dem mittleren Querschnitt entsprechenden Horizontalen entfernt sein.

Die Röhren No. 3 und No. 5 sind von gutem Kaliber, No. 4 von mittlerer, No. 1 und No. 2 von geringer Güte; beim Berechnen der

---

1) Die in meiner früheren Mittheilung angegebenen Werthe für specifischen Widerstand und Temperaturcoefficienten sind nach dem Quecksilberthermometer bestimmt.

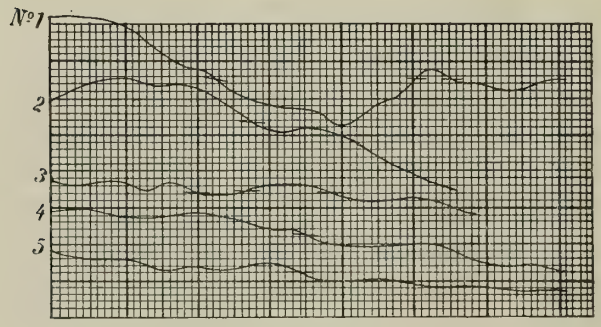
2) Wüllner, Pogg. Ann. 153. p. 440. 1874.

Mittelwerthe sollen die Zahlen, welche durch Messungen mit den Röhren 3 und 5 erhalten wurden, das dreifache Gewicht, und die von Rohr 4 herrührenden das doppelte Gewicht bekommen, wie die mit Hilfe von No. 1 und No. 2 bestimmten.

Tabelle I.

No.	C	L_{10}	M_{10}	$a(r_1 + r_2)$	W_{10}
		m	g	m	$\frac{m}{mm^2}$, Hg von 0^0
1	1,00464	1,51017	88,5200	0,00195	0,35490
2	1,00692	1,20673	20,1113	0,00098	0,99921
3	1,00051	1,23409	15,2109	0,00086	1,37275
4	1,00225	1,50994	12,2647	0,00070	2,55252
5	1,00066	1,50582	9,6908	0,00063	3,20763

Fig. 2.



III. Drahtwiderstände.

§ 18. Die Widerstände der fünf Quecksilberröhren wurden in Neusilberdraht copirt; von jeder Röhre stellte ich drei Copien her, wozu ich zwei verschiedene Sorten Neusilberdraht benutzte.

Die eine Sorte wurde gewählt, weil sie schon 1879 aus der Fabrik bezogen worden war; sie hatte freilich einen specifischen Widerstand von nur 0,18 und einen grossen Temperaturcoefficienten; die Aenderung ihres Widerstandes mit der Temperatur zwischen 0^0 und 20^0 wird dargestellt durch die Formel

$$w_t = w_0 (1 + 0{,}000666\,t - 0{,}0000008\,t^2).$$

Die andere Sorte ist erst im April 1883 bezogen worden (Obermaier in Nürnberg), hatte einen grossen specifischen Widerstand, 0,41, und den mittleren Temperaturcoefficienten bei 10^0 von nur 0,000247.

Die Einrichtung der Widerstandsrollen war die folgende: Durch eine Holzbüchse, 15 cm hoch und 5 cm im Durchmesser, wurden die Elektroden aus dickem Kupferdraht geführt; dieselben wurden mit Guttapercha eingekittet und durch einen aufgeschraubten Holzdeckel festgehalten. Der untere Theil der Holzbüchse war hohl und auf einer längeren Strecke auf geringeren Umfang eingedreht. Auf die letztere Strecke wurden die Widerstandsdrähte bifilar aufgewickelt, nachdem sie in die unteren Enden der Kupferelektroden eingelöthet worden waren; die Stelle, an der der Draht geknickt wurde, ist mit einem Seidenfaden an ein kleines Messingschräubchen angebunden, welches in die Holzbüchse eingesetzt ist. Durch den Deckel der Büchse geht eine Durchbohrung, welche gestattet, ein Thermometer in das Innere der Widerstandsrolle einzuführen. Ueber das Ganze wird ein Glas übergekittet.

Der Elektrodendraht ist ca. 3 mm dick; sein Widerstand beträgt pro Centimeter 0,00003 QE. Auf den Elektroden wird der Widerstand der Rollen durch Feilstriche abgegrenzt.

§ 19. Diese Widerstandsrollen wurden nur in Wasserbädern gebraucht; die letzteren besassen folgende Gestalt:

Ein cylindrisches Gefäss aus Zinkblech von 10 cm Höhe und 13 cm Halbmesser, an Boden und Seiten mit Filz überzogen, war zur Aufnahme von drei Widerstandsrollen bestimmt. Der Deckel dieses Gefässes enthielt drei 5 cm weite Oeffnungen, durch welche die Widerstandsrollen hindurchgesteckt wurden, und besass nach oben einen 4 cm hohen Rand, auf welchen ein zweiter Deckel aufgesetzt werden konnte; der Raum zwischen beiden Deckeln wurde, soweit er nicht von den oberen Enden der Widerstandsrollen und den Elektroden in Anspruch genommen war, sorgfältig mit Filz ausgefüllt.

Durch die Mitte beider Deckel ging eine Durchbohrung, welche dazu diente, ein Thermometer in das Wasserbad einzuführen; den grossen Oeffnungen des unteren Deckels entsprachen kleinere Oeffnungen des oberen, welche erlaubten, auch in das Innere der Widerstandsrollen Thermometer zu bringen. Der Boden der Widerstandsbüchsen befand sich 2 cm hoch

über dem Boden des Wasserbades. Die Stellen der Elektroden, wo die Widerstände der Rollen durch Feilstriche begrenzt waren, befanden sich noch innerhalb des Filzdeckels, etwa 2—3 cm vom Rande entfernt; nur die äussersten Enden der Elektroden ragten aus der Umhüllung des Bades hervor.

Solche Bäder wurden nur verwendet, wenn das im Gefässe befindliche Wasser nahe die gleiche Temperatur hatte, wie die umgebende Luft. Die Widerstandsrollen wurden immer mehrere Stunden vor den Messungen in die Bäder gebracht. Die Temperatur des Wassers hielt sich sehr constant; sie änderte sich gelegentlich einmal in $^3/_4$ Stunden um $0^0{,}1$, meistens aber nur um wenige Hundertelgrade in derselben Zeit. Ich hielt es deshalb für erlaubt, die Temperatur im Innern der Widerstandsrollen gleich der des umgebenden Wassers zu setzen, wenn die letztere nahe gleich der Lufttemperatur im Beobachtungsraume war.

§ 20. Die letztere Annahme ist nicht mehr gestattet, wenn die Temperatur des Bades von der der umgebenden Luft erheblich verschieden ist; die Temperatur der in dem Widerstandsgefäss eingeschlossenen Luft ist dann um einige Zehntelgrade von der des Bades verschieden, da die dicken Kupferdrähte einen erheblichen Wärmeaustausch zwischen dem Innern der Gefässe und der umgebenden Luft vermitteln. Bei den Versuchen, welche ich in dieser Richtung anstellte, erhielt ich das Wasserbad halbe oder ganze Tage lang constant auf einer Temperatur, welche 10^0 bis 15^0 höher war, als die der umgebenden Luft; dabei blieb die Temperatur im Innern der mit Luft oder Petroleum gefüllten Widerstandsbüchsen $0^0{,}3$—$0^0{,}7$ gegen die Temperatur des Bades zurück.

Will man Fehler dieser Art in der Temperaturbestimmung vermeiden, so dürfte es keineswegs zweckmässig sein, den Widerstandsrollen möglichst dicke Kupferelektroden zu geben; bei sehr dicken Drähten wird der Vortheil des grossen galvanischen Leitungsvermögens durch den Nachtheil des grossen Wärmeleitungsvermögens bedeutend überwogen.

Das Umgeben der Widerstandsdrähte mit Paraffin statt mit Luft wird keinen Vortheil bieten.

Sind die Temperaturen des Bades und der umgebenden Luft verschieden, so muss man die Widerstandsdrähte (wie bei den Siemens'schen

Normalen) direct mit Flüssigkeit (Petroleum) umgeben und die Temperatur dieser Flüssigkeit, nicht diejenige des äusseren Bades messen.

Dieses Verfahren habe ich bei Bestimmung der Temperaturcoefficienten eingeschlagen; die ausführliche Beschreibung desselben wird weiter unten folgen (§ 38).

IV. Methoden der galvanischen Widerstandsvergleichung.

Vergleichung von nahe gleichen Widerständen; Copirung der Widerstände der Normalröhren.

§ 21. Die Vergleichung der Copien mit den Quecksilberröhren wurde nach der Methode vorgenommen, welche F. Kohlrausch vor Kurzem beschrieben hat.[1])

Ich benutzte dazu das Differentialgalvanometer, welches Herrn Prof. Kohlrausch zu seinen Messungen gedient hatte; im Verlaufe meiner Untersuchung wickelte ich dasselbe von Neuem und mit Sorgfalt, so dass ich Gleichheit der Wirkungen beider Hälften auf die Nadel bis auf 0,0001 und Gleichheit der Widerstände (von je 760 QE.) bis auf etwa 9 QE. erreichte; einen Widerstand von der letzteren Grösse, der aus demselben Kupferdraht wie das Galvanometer bestand und bifilar gewickelt war, fügte ich der Zuleitung zum Galvanometer bei und erreichte fast völlige Gleichheit der Widerstände beider Hälften.

Das Galvanometer enthielt zweimal 3000 Windungen in 68 Lagen; die Isolirung der beiden Galvanometerzweige war eine sehr vollkommene. Die Empfindlichkeit des Instrumentes war so gross, dass ein Strom von einem Daniell'schen Element in $2 \cdot 10^7$ QE., welcher durch eine Galvanometerhälfte ging, bei dem Skalenabstand von 3,5 m einen Ausschlag von 1 mm hervorbrachte.

Der Rheostat, den ich als Nebenschliessung zu dem grösseren der zu vergleichenden Widerstände verwandte, war ein älterer Siemens'scher Stöpselrheostat, dessen Korrektionen sehr gering waren; seine Normaltemperatur lag nach meiner Messung bei 11^0; sein Temperaturcoefficient war nach meinen Bestimmungen $= 0{,}0003$. Da dieser Rheostat nur bei

---

1) F. Kohlrausch, Berl. Monatsber. 1883. pag. 465. — Wied. Ann. 20. pag. 76. 1883.

Temperaturen zwischen 8^0 und 17^0 benutzt wurde, die wichtigeren Messungen zudem zwischen 8^0 und 14^0 ausgeführt wurden, so habe ich eine Korrektion der am Rheostaten abgelesenen Widerstände auf richtige Quecksilbereinheiten unterlassen.

Der Rheostat konnte mittels eines sechsnapfigen Commutators sowohl ausser jeder Verbindung gebracht, als auch durch einfaches Umlegen des Stromwenders dem einen oder dem andern der zu vergleichenden Widerstände nebengeschaltet werden.

Um Erwärmung meiner Quecksilber- und Drahtwiderstände durch den Strom zu vermeiden, verwendete ich nur schwache Ströme, meist 1 Daniell oder 1 Smee in einem Stromkreise von 2 bis 8 QE. Ging ein solcher Strom etwa eine Minute lang ununterbrochen durch die zu vergleichenden Widerstände (Quecksilber und Neusilber), so änderte er das Verhältniss derselben um mehrere Zehntausendstel; bei einer Dauer des Stromes von 8 sec. betrug die Aenderung noch 0,0001 bis 0,0003; diese Veränderungen verschwanden nach Unterbrechung des Stromes in einigen Minuten wieder. Bei meinen Messungen wurde der Strom nur für Augenblicke geschlossen, auf etwa 0,1 bis 0,2 sec., während 5 min., der Dauer einer Bestimmung, etwa 20—30 mal. Die durch einmaligen kurzdauernden Stromschluss hervorgerufene Erhöhung der Temperatur und damit Aenderung des Widerstandes des Quecksilbers und des Neusilbers war jedenfalls so gering, dass sie nicht mehr bemerkt werden konnte; auch das häufigere Aufeinanderfolgen der Stromschlüsse hatte keinen bemerkbaren Einfluss, was ich durch öfter angestellte Kontrolbestimmungen nachwies.

§ 22. Die bei den Messungen nöthigen Stromleitungen wurden aus gewöhnlichem übersponnenem Kupferdraht hergestellt. Diejenigen Verbindungen von Drähten unter sich und mit den Commutatoren, welche während der verschiedenen Messungen nicht geändert werden sollten, waren durch Verlöthen hergestellt; die Löthstellen wurden zum Schutze gegen Quecksilber mit Schellack oder Collodium überzogen. Die auswechselbaren Verbindungen waren durch Kupfer- und Messingklemmen hergestellt; erstere wurden da verwendet, wo das Auftreten thermoelektrischer Kräfte zu Fehlern Veranlassung geben konnte.

Für die Drähte, welche die zu vergleichenden Widerstände mit dem

Commutator im Hauptstromkreis verbinden, hat F. Kohlrausch [1]) die Bedingung angegeben, dass die Summe der Widerstände des einen Paares derselben gleich sei der Summe der des anderen; diese Bedingung wurde sorgfältig erfüllt, ausserdem auch darauf geachtet, dass die Widerstände dieser Verbindungsdrähte nicht zu gross wurden gegen die zu vergleichenden Widerstände, und dass durch die Art, wie diese Drähte geführt wurden, sowohl eine Aenderung ihres Widerstandsverhältnisses durch Temperaturschwankungen im Beobachtungsraume, als auch eine Fernewirkung des Stromes auf die Nadel des Galvanometers ausgeschlossen waren.

Die Stromzuleitungen zu dem Normalrohr wurden durch die angesetzten weiten Endgefässe vermittelt; in das in letzteren enthaltene Quecksilber tauchten je zwei Platinbleche und ein Platindraht, der auf dem grössten Theil seiner Länge mit einem dünnen Glasröhrchen umgeben war und nur unten in einer kurzen Spitze heraustrat; dieser Draht bildete die Verbindung des Quecksilberrohrs mit dem Galvanometer. Die beiden Platinbleche versahen das eine die Verbindung mit dem Commutator des Hauptstromkreises, das andere die mit dem Rheostaten, wenn derselbe dem Quecksilberrohr zum Nebenschluss gegeben werden sollte.

Diese sechs Platinelektroden waren in die aufgeschlitzten Enden von sechs dicken Kupferdrähten eingeklemmt, von denen je drei an einem Brettchen befestigt waren; die beiden Brettchen konnte man auf die Ränder des langen Wasserbades auflegen, und die Kupferdrähte waren so gebogen, dass dann die Platinelektroden in das Quecksilber der Endgefässe der Normalröhre eintauchten.

§ 23. Es genügt wohl auch, zwei solche Platinbleche, resp. Drähte für jedes Endgefäss zu nehmen, indem man die Abzweigung zum Rheostaten mit der Zuleitung des Hauptstromes oder mit der Abzweigung zum Galvanometer vereinigt; man hat dann nur an der beobachteten Differenz der zu vergleichenden Widerstände eine geringe Correction anzubringen. Ist nämlich Hg der Widerstand des Quecksilberrohrs, δ die Summe der beiden kleinen Widerstände, welche auf jeder Seite zwischen

1) F. Kohlrausch, l. c. pag. 470.

dem Elektrodengefäss und der Stelle liegen, wo die Abzweigung zum Rheostaten sich befindet, ist R' der bei dieser Verbindungsart beobachtete Widerstand, welcher dem Quecksilberrohr als Nebenschluss gegeben werden muss, so ist der bei streng richtiger Verbindung einzuschaltende Nebenschluss

$$R = R' \left(1 - \frac{\delta}{Hg}\right)$$

Die weiter unten (§ 39) anzuführenden Werthe der Copien meiner Normaleinheiten sind zum Theil in dieser Weise corrigirt; die betreffenden Zahlen sind durch Sternchen gekennzeichnet. Die Correctionen waren meist unbeträchtlich; sie betrugen in 5 Fällen bis 0,00002, in 2 Fällen 0,00017 des Widerstandes. Eine Messung indess musste wegen zu hohen Betrages dieser Correction verworfen werden; deshalb fehlt in der genannten Tabelle einer der Werthe für eine Copie des Rohrs No. 1. Später habe ich diese Unsicherheit durch Zufügen des dritten Platinbleches vermieden.

§ 24. Die Drahtwiderstände wurden auf folgende Weise in die Aufstellung eingefügt: an die Stellen der Elektroden, wo die Widerstände der Rollen abgegrenzt waren, wurden Kupferklemmen angesetzt, welche je zwei 6 cm lange Stücke (ca. 0,7 mm starken) Kupferdraht trugen. Wenn die Widerstandsrollen in das Wasserbad gesetzt wurden, befanden sich die Kupferklemmen noch innerhalb des mit Filz ausgefüllten Raumes zwischen den Deckeln des Bades, während die Enden der Elektroden und die der angeklemmten Drahtstücke aus der Umhüllung hervorragten. Die Enden der Elektroden dienten zur Verbindung im Hauptstromkreis, während die dünneren Kupferdrähte die Abzweigungen zum Galvanometer und zum Rheostaten vermittelten.

§ 25. Der Gang einer Messung nach dieser Methode war der folgende:

Zunächst wurde das Quecksilberrohr durch Korkstopfen in den Endgefässen befestigt, die Korke selbst und die benachbarten Glastheile (zum Schutze gegen das Eindringen des Wassers in die Elektrodengefässe) mit Collodium überzogen; darauf füllte man die Röhre mit Quecksilber und setzte sie in das oben (§ 14) beschriebene Wasserbad ein. Dann wurde

der erwähnte 1 m lange Holzdeckel mit den beiden Thermometern auf das Bad gelegt, die Brettchen mit den Elektroden an die passenden Stellen gebracht und der noch offene Theil des Wasserbades mit Glasscheiben gedeckt. Die mit dem Quecksilberrohr zu vergleichenden Drahtwiderstände waren schon mehrere Stunden vorher in das für sie bestimmte Wasserbad (§ 19) gebracht worden, in dem sich ebenfalls ein Thermometer befand. Nachdem nun alle nöthigen Verbindungen hergestellt worden, überliess man die ganze Aufstellung mindestens eine Viertelstunde lang der Ruhe; dann wurden die galvanischen Messungen ausgeführt, und schliesslich auf die oben (§ 12. 13) beschriebene Weise der Quecksilberinhalt des Rohrs bestimmt.

Die Genauigkeit der Vergleichung nach dieser Methode war eine sehr grosse; jede einzelne Messung war mindestens auf 0,0001 sicher.

Als Beispiel gebe ich nachstehend eine vollständige Copirung.

Copirung des Rohrs No. 5.

Thermometer, corrig.		No. der Copie	Commutator im Hauptstr.	Rheostat im Nebenschluss			$W - Hg = \frac{Hg \cdot W}{R}$	
Normalrohr	Copie			Temper.	Widerstand in QE. R	bei	$\frac{1}{R}$	$\frac{Hg \cdot W}{R}$
10,80 10,77	10,57	1	I	12°,5	3650	Copie (= W)	0,000274	0,00038
			II		5000	Normalrohr (= Hg)	0,000200	
		2	II		2240	Copie	0,000446	0,00705
			I		1085	„	0,000921	
		3	I		1705	Copie	0,000586	0,00362
10,81 10,79	10,59		II	12°,5	8600	„	0,000116	

Temperatur des Quecksilbers, bezogen auf das Lufthermometer $10^0,79$

„ der Copien „ „ $10^0,58$

Wägung der Quecksilberfüllung (als Controlbestimmung anzusehen).

Scheinbares Gewicht gegen Messing . . 9,6904 g
Absolutes Gewicht (vgl. § 13) . . . 9,6899 g } bei $10^0,79$
Absol. Gew., reducirt auf 10^0 (vgl. Tab. I) 9,6910 g

Widerstand des Quecksilberrohrs nach Tab. I bei $10^0,79$ = 3,20991 QE.

Widerstände der Copien:

	bei 10^0,58	bei 10^0,00
No. 1	3,20991 + 0,00038 = 3,21029	3,20907
No. 2	3,20991 + 0,00705 = 3,21696	3,21575
No. 3	3,20991 + 0,00362 = 3,21353	3,21307

Vergleichung von stark ungleichen Widerständen; Herstellung von Normaleinheiten.

§ 26. Von den Copien meiner Normalröhren habe ich eine Anzahl von Normaleinheiten abgeleitet. Die Vergleichung der letzteren mit den Copien geschah nach der Methode des Differentialgalvanometers, welche von Kirchhoff[1]) herrührt, aber von demselben nur kurz beschrieben worden ist. Durch dieses Verfahren wird das Verhältniss zweier Widerstände unter Eliminirung sämmtlicher Uebergangswiderstände mit grosser Schärfe bestimmt. Angesichts der Bedeutung, welche in Folge dessen der Methode zukommt, möge es mir gestattet sein, bei der Mittheilung meiner Erfahrungen über dieselbe etwas länger zu verweilen.

Bei der genannten Methode werden die beiden Galvanometerhälften den zu vergleichenden Widerständen zu Nebenschliessungen gegeben und in dieselben Nebenschliessungen zwei Rheostaten eingefügt. Seien die Widerstände der Galvanometerhälften gleich und = G; die beiden zu vergleichenden Widerstände seien W und w, und W = n w. Die Rheostatenwiderstände, welche in die Nebenschliessung zu W eingeschaltet werden, mögen mit R, die im Nebenschluss zu w mit r bezeichnet werden. Seien i_1 und i_2 die Intensitäten in den beiden Galvanometerzweigen, I die Intensität des unverzweigten Hauptstromes, so ist

$$i_1 = I \cdot \frac{W}{W + G + R}$$

$$i_2 = I \cdot \frac{w}{w + G + r}$$

Wenn $i_1 = i_2$ ist, so bleibt die Nadel in Ruhe; dann ist W : w = G + R : G + r. Einen der Rheostatenwiderstände darf man willkürlich

1) G. Kirchhoff, Berl. Monatsber. 1880. p. 601. — Wied. Ann. 13. p. 410. 1881.

wählen; nehme ich r einmal = o und einmal = r, so erhalte ich zwei Gleichungen

$$W : w = G + R_0 : G$$

und

$$W : w = G + R_0 + R : G + r$$

also auch

$$W : w = R : r = n$$

Der Widerstand r bleibt nun noch so zu wählen, dass die Empfindlichkeit der Methode ein Maximum wird. Bei der Bestimmung, welche die Gleichung

$$W : w = G + R_0 + R : G + r$$

lieferte, war

$$i_1 = i_2 = I \cdot \frac{w}{w + G + r}$$

Wird nun einer der Rheostatenwiderstände R und r um einen Bruchtheil geändert, so sind die Intensitäten i nicht mehr gleich; man beobachtet dann am Galvanometer einen Ausschlag, welcher proportional ist der Differenz

$$i_1 - i_2 = I w \cdot \left[\frac{1}{w + G + r\,(1 + \delta)} - \frac{1}{w + G + r}\right],$$

und r ist nun so zu wählen, dass der beobachtete Ausschlag der Galvanometernadel ein Maximum wird. Differenzirt man den Inhalt der Klammer nach r, so erhält man

$$-\frac{1 + \delta}{[w + G + r\,(1 + \delta)]^2} + \frac{1}{[w + G + r]^2}$$

und indem dies = Null gesetzt wird

$$r = G + w$$

Wenn G gegen die zu vergleichenden Widerstände W und w gross ist, so hat man also

$$r = G$$

zu wählen, um eine möglichst grosse Empfindlichkeit zu erreichen. Zu demselben Resultate bin ich auch auf experimentellem Wege gelangt. — Bei meinen Messungen war G = 760, r = 700 QE.

§ 27. Extraströme. Um mit der angegebenen Methode eine grosse Genauigkeit erreichen zu können, musste man ein Differential-

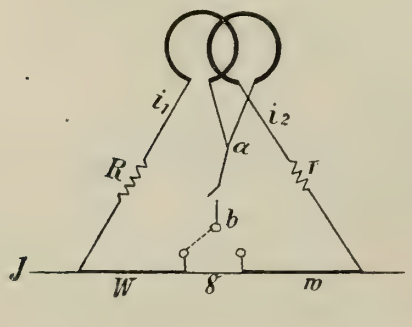
galvanometer von sehr vielen Windungen verwenden; dies brachte aber einen Uebelstand mit sich, welcher den durch Anwendung eines Multiplicators von grosser Windungszahl erstrebten Zweck zu vereiteln drohte.

In den beiden Zweigen des Differentialgalvanometers entstehen beim Schliessen und Oeffnen des Stromes durch wechselseitige und Selbstinduction elektromotorische Kräfte, und zwar werden in jeder Galvanometerhälfte zwei elektromotorische Kräfte von entgegengesetztem Vorzeichen und nicht ganz gleicher Grösse inducirt; in jedem Zweige bleibt also die Differenz dieser beiden Kräfte übrig. und die beiden übrig bleibenden Kräfte (in jedem Zweig eine) sind einander gleich. Da nun jeder Galvanometerzweig durch den Widerstand, dessen Nebenschluss er bildet, zu einem Stromkreise geschlossen ist, so erzeugen die beiden gleichen inducirten elektromotorischen Kräfte Ströme, deren Intensitäten den Widerständen der Stromkreise, also auch den zu vergleichenden Widerständen umgekehrt proportional sind. Für das Verhältniss 1 : 1 heben sich die Wirkungen auf die Nadel auf, aber schon bei 1,2 : 1 ist der Inductionsstoss deutlich merkbar.

Ich versuchte, die störende Induction zu compensiren, indem ich eine unifilar gewickelte Drahtrolle in die eine Nebenschliessung einschaltete, dann auch einen Eisenstab in die Rolle einlegte, u. dgl. m. Alle diese Versuche führten indess zu umständlichen Operationen und gaben nicht genügende Sicherheit für die Richtigkeit der Messung.

§ 28. Aenderung der Kirchhoff'schen Methode. Ich musste deshalb zu einer Aenderung der Aufstellung greifen; durch dieselbe wird die Kirchhoff'sche Anordnung in eine Brückencombination verwandelt.

Fig. 3.



Die beiden zu vergleichenden Widerstände W und w sind durch den Widerstand γ, welcher der Bequemlichkeit wegen klein gegen W und w gewählt werden mag, verbunden; die beiden Galvanometerdrähte, welche an die einander zugewandten Enden der zu vergleichenden Widerstände angesetzt werden sollen, werden von a an gemein-

sam geführt. und das gemeinsame Ende der beiden Drähte wird mit Hilfe eines dreinapfigen Commutators einmal an das eine und dann an das andere Ende von γ angesetzt. Die gemeinschaftliche Strecke a b (die Brücke) enthält einen Unterbrecher.

Ist der letztere offen, und wird der Hauptstromkreis geschlossen, so befinden sich die beiden Galvanometerhälften hinter- und gegeneinander im Nebenschluss zu $W + \gamma + w$; dann bleibt, Gleichheit der Wickelung beider Galvanometerzweige vorausgesetzt, die Nadel in Ruhe. Wird nun der Unterbrecher in a b geschlossen, so erfolgt kein Ausschlag der Nadel, wenn die Widerstände der Nebenschliessungen, in denen sich die Galvanometerzweige befinden, sich verhalten wie die zu vergleichenden Widerstände, d. h. einmal wie $W : w + \gamma$ und einmal wie $W + \gamma : w$. Wir bestimmen also auf diese Weise

$$W + \gamma : w = \frac{R}{r} = n_1$$

$$W : w + \gamma = \frac{R'}{r} = n_2$$

Setzt man $\frac{n_1 + n_2}{2} = n$, so hat man hieraus

$$W : w = \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{R + R'}{2} + \frac{R - R'}{2} \cdot \frac{n - 1}{n + 1}\right]$$

Der Verbindungswiderstand γ wird vollständig eliminirt; man kann ihn aus den gegebenen Gleichungen ebenfalls berechnen zu

$$\gamma = \frac{R - R'}{r} \cdot \frac{w}{n + 1}$$

γ betrug bei meinen Vergleichungen meist 0,00024 bis 0,00036, in mehreren Fällen jedoch bis 0,015 Q E; je grösser man γ nimmt, desto umständlicher werden Beobachtung und Rechnung.

§ 29. Das Differentialgalvanometer, welches ich benutzte, war das oben (§ 21) beschriebene von zweimal 3000 Windungen; ich habe schon hervorgehoben, dass die Wirkung der beiden Galvanometerzweige auf die Nadel fast gleich war; die geringe Ungleichheit von etwa 0,0001 compensirte ich durch zwei Drahtwindungen, welche verschiebbar auf dem Gestell des Galvanometers angebracht waren. Um noch geringere

Ungleichheiten der beiden Galvanometerzweige — hervorgerufen durch Verziehen des Holzes, Aenderungen des magnetischen Meridians, welche auf die Wirkung der Correctionswindungen von Einfluss waren — zu eliminiren, diente ein Commutator, der die beiden Galvanometerzweige in Bezug auf die zu vergleichenden Widerstände vertauschte.

Die beiden Rheostaten, welche in die Nebenschliessungen der zu vergleichenden Widerstände eingeschaltet waren, befanden sich der Gleichheit der Temperatur wegen in einem gemeinschaftlichen Kasten; ich hatte nämlich in den Siemen'schen Stöpselrheostaten, von dem schon weiter oben die Rede war (§ 21), noch eine Widerstandsrolle von 700 QE. eingesetzt, welche ebenfalls durch Stöpselung aus- und eingeschaltet werden konnte. Der Draht, aus dem diese Rolle bestand, hatte denselben Temperaturcoefficienten, wie die Widerstände des Rheostaten.

Der Siemens'sche Rheostat lieferte Widerstände von 0,1 bis 11111 QE. Ich führte drei Calibrirungen desselben aus, zwei bei 12^0 und eine bei 23^0, welche sehr gut übereinstimmten und keine Verschiedenheit in den Temperaturcoefficienten der Widerstände des Rheostaten erkennen liessen. Ich nahm aus den drei Bestimmungen das Mittel und berechnete eine für alle Temperaturen gültige Correctionstabelle. Die Fehler, mit denen in Folge der vorhandenen geringen Unsicherheit der Calibrirung die Widerstandsvergleichung behaftet sein kann, betragen höchstens 0,00003.

Die von mir angefertigte Correctionstabelle stimmte fast genau überein mit derjenigen, welche Herr Prof. Kohlrausch zwei Jahre vorher festgestellt hatte. Man brauchte also auch nicht zu fürchten, dass die neue Tabelle in Folge späterer Aenderungen des Rheostaten unbrauchbar würde.

§ 30. Bestimmung von r. Der Widerstand r wurde häufig mit einem ihm nahe gleichen Widerstand aus dem Siemens'schen Rheostaten verglichen; ich benutzte dazu sowohl die Wheatstone'sche Brücke, als auch ein anderes Verfahren, welches ich nun beschreiben will.

Vergleicht man nach der Methode, welche ich eben auseinandergesetzt habe, zwei nahe gleiche Widerstände, so erhält man

$$\frac{W}{w} = \frac{R + R'}{2r}$$

indem das zweite Glied der rechten Seite unserer Formel aus § 28 ver-

schwindet; kann man ausserdem W und w ohne Widerstand verbinden, so wird die Gleichung noch einfacher, weil dann $R = R'$ ist.

Nachdem diese Bestimmung ausgeführt ist, vertauscht man die beiden Rheostaten in den Nebenschliessungen mit einander, so dass nun r sich neben W' und R neben w befindet; nun bestimmt man

$$\frac{W}{w} = \frac{2r}{R_1 + R_1'}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Division

$$\frac{(R + R')(R_1 + R_1')}{4r^2} = 1$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(R + R')(R_1 + R_1')}$$

Bei der Vorrichtung, welche ich zu dieser Bestimmung von r gebrauchte, waren W und w ohne Widerstand verbunden; also hatte ich die einfachere Formel

$$r = \sqrt{R \cdot R_1}$$

anzuwenden.

Bestimmungen dieser Art führte ich zu verschiedenen Zeiten aus. Die Resultate stimmten vollkommen mit denen, welche ich durch Anwendung der Wheatstone'schen Brücke erhielt. Die Genauigkeit, welche erreicht werden kann, ist sehr gross; 7 Bestimmungen, welche ich innerhalb 6 Tagen anstellte, lieferten für r Werthe zwischen 700,10 und 700,14. Dieser Widerstand änderte sich aber langsam mit der Zeit, so dass es nöthig war, denselben bei jeder Messung von Neuem zu bestimmen; die Veränderungen betrugen indess nur einige Zehntausendtel des Ganzen in einem Zeitraum von mehreren Monaten.

§ 31. Der Stromschlüssel, welchen ich bei diesen Messungen gebrauchte, bestand aus einem federnden Brettchen, in welchem zwei amalgamirte Kupferdrähte befestigt waren. Die letzteren tauchten beim Niederdrücken der Holzfeder in zwei Quecksilbernäpfe. Die beiden Unterbrechungsstellen, welche ich mit Hilfe dieser Einrichtung erhielt, befanden sich im Hauptstromkreis und in der Brücke, und die Stellung der eintauchenden Kupferdrähte sowie die Menge des Quecksilbers in den Näpfen war so gewählt, dass zuerst der Hauptstrom und unmittelbar

darauf die Brücke geschlossen wurde; die umgekehrte Folge fand beim Oeffnen des Stromkreises durch Loslassen des federnden Brettchens statt.

§ 32. Nachstehend gebe ich eine vollständige Vergleichung zweier Widerstände nach dieser Methode. Der Commutator A, B vertauschte die beiden Galvanometerhälften; derjenige, dessen Stellungen durch 1, 2 bezeichnet sind, ist der dreinapfige Commutator der Figur in § 28, und der Commutator a, b vertauscht bei der Bestimmung von r die Rheostaten in den Nebenschliessungen. Die in den Nebenschliessungen den Galvanometerzweigen zugefügten Widerstände sind in der mit „Rheostaten" überschriebenen Spalte enthalten.

Bestimmung von r.

Commutatoren		Rheostaten		R	r
A	a	5,98	0		
	b	13,26	0		
	b	716,72	r	703,46	$r = \sqrt{703{,}46 \cdot 696{,}87}$
	a	702,85	r	696,87	$= 700{,}156$
B	a	0,98	0		
	b	8,28	0		
	b	711,67	r	703,39	$r = \sqrt{703{,}39 \cdot 696{,}89}$
	a	697,87	r	696,89	$= 700{,}131.$

$$r = 700{,}14.$$

Vergleichung der Copie No. 1 des Normalrohrs No. 5 (vgl. § 25) mit der Normaleinheit No. 6.

Temperatur von W u. w.	Commutatoren		Rheostaten		R		
11°,09	A	1	1715,56	0			
	A	2	1716,52	0			
	B	2	1718,54	0			
	B	1	1717,44	0			
	B	1	3967,19	700,14	2249,75	2250,20	$R = 2250{,}69$
	B	2	3969,19	700,14	2250,65		
	A	2	3967,24	700,14	2250,72	2250,20	$R' = 2249{,}71$
11°,09	A	1	3965,24	700,14	2249,68		

$\frac{R+R'}{2} = 2250{,}20$; $\frac{R-R'}{2} = 0{,}49$; $\frac{W}{w}$ näherungsweise $= 3{,}21$

$$\frac{W}{w} = \frac{1}{700{,}14} \cdot \left(2250{,}20 + 0{,}49 \cdot \frac{2{,}21}{4{,}21}\right) = 3{,}21443$$

gemeinschaftliche Temperatur von W und w $= 11^0{,}09$. Die Temperaturcoefficienten sind gleich.

W (nach § 25) bei $10^0{,}00$ $= 3{,}20907$ QE.

w (Normaleinheit No. 6) bei $10^0{,}00 = \frac{3{,}20907}{3{,}21443} = 0{,}99833$ QE.

§ 33. Prüfungen. Zur Prüfung der abgeänderten Methode verglich ich drei Widerstände, welche nahe gleich 1 QE. waren, auf drei verschiedene Arten mit einander:

1. Nach der Methode von Kohlrausch mit übergreifendem Nebenschluss.
2. Nach der ungeänderten Kirchhoff'schen Methode.
3. Nach der in eine Brückencombination verwandelten Kirchhoff'schen Methode.

Die drei verglichenen Einheiten seien mit I, II, III bezeichnet; es wurde gefunden:

	Methode 1.	Methode 2.	Methode 3.
I : II	1,00149	1,00151	1,00149
II : III	1,00181	1,00172	1,00183
I : III	1,00331	1,00339	1,00335

Ausserdem wurden mehrmals nach der mit 3 bezeichneten Methode drei ungleiche Widerstände a, b, c mit einander verglichen und folgende Verhältnisse gefunden:

	a : b	1,85926	1,38217	1,86163	1,85955
beobachtet:	c : a	1,25595	2,76582	1,25393	1,25304
	c : b	2,33532	3,82319	2,33433	2,33026
berechnet	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a}$	2,33514	3,82283	2,33435	2,33009

Die Zahlen der letzten Zeile, welche durch Multiplication der in den beiden ersten Zeilen stehenden Grössen erhalten worden sind, sollten mit den Werthen der dritten Zeile identisch sein; die Abweichungen betragen weniger als 0,0001, finden aber grösstentheils im gleichen Sinne statt. Man könnte wohl vermuthen, dass hier ein einseitiger Fehler vor-

liegt, der in der Methode oder in den verwendeten Instrumenten begründet ist.

Ich habe noch eine grosse Anzahl von Messungen nach dieser Methode ausgeführt, welche etwas anders angeordnet waren. Ich verglich nämlich drei Paare von Einheiten (meine Normaleinheiten) mit den Copien der Quecksilberröhren nach folgendem Schema: Bedeutet C die Copie und I_a, I_b die zu einem Paare gehörigen Einheiten, so bestimmte ich die Verhältnisse $\frac{C}{I_a}$ und $\frac{C}{I_b}$ nach der Kirchhoff'schen Methode und dann $I_a : I_b$ mit übergreifendem Nebenschluss. Aus $C : I_a$ und $C : I_b$ konnte nochmals $I_a : I_b$ berechnet werden. Solcher Sätze von je drei Vergleichungen erhielt ich zwölf. Die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Werthen für dieselben Verhältnisse $I_a : I_b$ betrugen meist mehrere Hunderttausendtel und gingen sogar bis zu 0,00013 hinauf. Da bei dieser Anordnung einseitige Fehler in den Bestimmungen nach der Kirchhoff'schen Methode die Werthe von $C : I_a$ und $C : I_b$ auf gleiche Weise beeinflussen, im Quotienten daher verschwinden müssten, so hat man einen Massstab für die Genauigkeit an den Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Werthen des Verhältnisses $I_a : I_b$; dieselben zeigen, dass der Fehler einer Bestimmung nach dieser Methode etwa die Hälfte des beobachteten grössten Unterschiedes zwischen dem beobachteten und dem berechneten Werthe für $I_a : I_b$ beträgt, d. i. etwa 0,00007.

Die oben bemerkten Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Werthen desselben Verhältnisses, welche grösstentheils in demselben Sinne ausfielen und deshalb zur Vermuthung eines einseitigen Fehlers in der Methode veranlassten, betragen bis 0,00008; jede derselben ist die Summe der Fehler von drei Einzelbestimmungen, deren jeder 0,00007 ausmachen kann; man wird also die Ursache der Erscheinung, dass der grösste Theil jener Differenzen dasselbe Vorzeichen hat, nicht in einem einseitigen Fehler der Methode als vielmehr in der zufälligen Combination der Fehler der Einzelbestimmungen zu suchen haben.

Nach dem Gesagten glaube ich die Genauigkeit einer einzelnen Messung nach der abgeänderten Kirchhoff'schen Methode auf 0,0001 angeben zu dürfen.

§ 34. Commutator. Um bei meinen Widerstandsvergleichungen rasch von einer der angewandten Methoden zur andern übergehen zu können, verwendete ich einen Commutator, welcher mir erlaubte, durch eine einzige Drehung, ohne Aenderung eines Drahtes, die Aufstellung zur Vergleichung mit übergreifendem Nebenschluss in die zur Vergleichung nach der Kirchhoff'schen Methode zu verwandeln. Ich will mich begnügen, den Zweck dieses Commutators anzugeben und die Einfachheit seiner Handhabung hervorzuheben; eine Beschreibung würde zuviel Raum beanspruchen.

V. Hilfsbestimmungen.

§ 35. Einfluss der Art der Aufbewahrung und des Gebrauches des Quecksilbers auf das Leitungsvermögen des letzteren.

Ich verglich wiederholt, meist ohne Wägung des Quecksilberinhaltes, das Normalrohr No. 3 mit einer seiner Copien. Ich fand für den Widerstand der letzteren, wenn ich den des Rohrs aus Tab. I entnehme, fast unverändert dieselben Zahlen, obgleich ich gebrauchtes und ungebrauchtes, frisch destillirtes und längere Zeit aufbewahrtes Quecksilber zur Füllung der Röhre verwendete. Folgendes sind die Beobachtungen:

29./30. Juni 1883.

Quecksilberfüllung des Normalrohrs.	Widerstand der Copie bei 17°.
Destillat vom 19. Februar 83, ungebraucht	1,38325 QE.
dasselbe Quecksilber aus dem Rohr ausgesaugt und wieder eingefüllt	1,38325
Wiederholung desselben	1,38315
Destillat vom 28. Juni 83, ungebraucht	1,38317
aus derselben Flasche wie voriges, ungebraucht	1,38317
dieselbe Füllung, nachdem das Rohr 5 St. im Wasserbad gestanden	1,38315
nach weiteren 13 St.	1,38317
gleich nachher	1,38322
Destillat vom 20. Febr. 83, ungebraucht	1,38318
8. August 1883.	
Destillat vom 1. Aug. 83, ungebraucht	1,38317
aus derselben Flasche, ungebraucht	1,38315
Destillat vom Febr. 83, ungebraucht	1,38325
Destillat vom 25. Juni 83, ungebraucht	1,38310[1])

1) Bei dieser Bestimmung wurde der Quecksilberinhalt des Rohrs No. 3 um 0,00016 geringer gefunden, als in Tab. I angegeben. Vgl. § 13.

Später füllte ich das Rohr No. 2 mit Quecksilber, indem ich das frische Destillat unmittelbar aus dem Destillationsapparat in das eine Endgefäss des Rohrs einfliessen liess; nachdem ich die drei Copien des Rohrs mit letzterem verglichen hatte, entleerte ich das Rohr auf die gewöhnliche Weise und wiederholte die Manipulationen des Einfüllens und Entleerens 10 mal. Als das Quecksilber zum elften Mal in das Rohr eingefüllt worden war, wiederholte ich die Vergleichung. Die Resultate sind:

Copie	Widerstände der Copien bei 10^0	
	ungebrauchtes Hg	gebrauchtes Hg
No. 1	1,00052	1,00057
No. 2	0,99907	0,99911
No. 3	0,99747	0,99754

Im Juni 1884 verglich ich das Rohr No. 4 mit seinen Copien, indem ich Quecksilber verwandte, welches im März desselben Jahres destillirt worden war; auf der Oberfläche des Metalls hatten sich Spuren eines schwärzlichen Häutchens gebildet, und ich wünschte zu erfahren, ob dies einen Einfluss auf das Leitungsvermögen habe. Nach dem älteren Destillat verwandte ich ganz frisch destillirtes Metall. Die Widerstände der Copien waren bei 15^0:

Copie	Altes Destillat	Frisches Destillat	
No. 1	2,56752	2,56741	2,56744
No. 2	2,56844	2,56844	2,56855
No. 3	2,56757	2,56759	2,56761

§ 36. Luftgehalt des Quecksilbers. Schliesslich verglich ich noch das Leitungsvermögen von völlig luftfreiem, im Vacuum zum Sieden erhitzten Quecksilber mit demjenigen des mit Luft geschüttelten Metalls auf folgende Weise:

An die Enden eines Rohrs von etwa 0,6 qmm Querschnitt und 15 cm Länge waren Erweiterungen angeblasen, durch deren Wände einige Platindrähte als Elektroden führten; die eine Erweiterung stand durch

eine Röhre in Verbindung mit einem kleinen cylindrischen Glasgefäss, das zur Aufnahme von Quecksilber diente, die andere setzte sich fort in eine Glasröhre, mittels deren man die ganze Vorrichtung mit der Quecksilberluftpumpe verbinden konnte.

Zunächst wurde nun Quecksilber, welches in einer Glasflasche stark mit Luft geschüttelt worden, in den Apparat gebracht und der Widerstand des Quecksilbers, welches die enge Röhre erfüllte, mit dem eines Neusilberdrahtes verglichen. Darauf pumpte ich die Luft aus dem Apparat aus, erhitzte das Quecksilber in dem am einen Ende der engen Röhre befindlichen Gefäss zum Sieden und schmolz das Metall luftfrei im Apparat ein. Nachdem ich nun die enge Röhre wieder mit dem Quecksilber angefüllt hatte, verglich ich abermals den Quecksilberwiderstand mit dem Neusilberdraht; nach Anbringung der wegen Temperaturänderungen nöthigen Correctionen blieb ein Unterschied von 0,00004 des Ganzen.

Die angeführten Zahlen beweisen, dass das Quecksilber in allen Fällen merklich dasselbe Leitungsvermögen hatte; die beobachteten geringen Differenzen, welche einer kleinen Vergrösserung des Leitungsvermögens durch den Zutritt der Luft entsprechen würden, lassen sich schon durch die Annahme eines Fehlers in der Temperaturbestimmung von $0^0{,}02$ bis $0^0{,}04$ völlig erklären.

Lenz [1]) findet einen ganz entschiedenen Einfluss des Zutrittes der Luft zum Quecksilber; er beobachtet dabei eine Abnahme des Leitungsvermögens. Seine Wahrnehmungen haben mich zu dem grösseren Theile der eben mitgetheilten Versuche veranlasst, deren Resultat mit dem seinigen nicht übereinstimmt. Auch Mascart, Nerville und Benoit [2]) haben keinen merklichen Unterschied im Leitungsvermögen des luftfreien und des mit Luft gemischten Quecksilbers gefunden.

§ 37. Veränderlichkeit des Leitungsvermögens des Quecksilbers mit der Temperatur. Zur Bestimmung der Temperaturcoefficienten des Quecksilbers verwendete ich ein Glasrohr, dem ich eine für meine Aufstellung passende Gestalt gab. Das Rohr, von ca. 15 cm Länge und 1,1 QE. Widerstand, war U-förmig gebogen; an seine

1) R. Lenz, Etudes électrométrologiques I. 1884.
2) Mascart, Nerville und Benoit, l. c.

Enden waren Erweiterungen angeblasen, in deren jede drei Glasröhren mündeten, welche als Elektroden dienten; diese sechs Röhren, von verhältnissmässig grossem Durchmesser, liefen parallel und nahe neben einander und waren etwa 12 cm lang; nahe den oberen offenen Enden derselben waren Platindrähte durch die Glaswände durchgeschmolzen, welche die Verbindung zwischen dem Quecksilber und den kupfernen Leitungsdrähten der Aufstellung vermittelten. Die ganze Vorrichtung kam auf ein kleines Drahtgestell zu stehen, so dass die Biegung des Widerstandsrohres nach unten, die sechs Elektrodenröhren senkrecht nach oben verliefen. Darauf wurde Quecksilber eingegossen, bis die erwähnten Platindrähte vollständig in das Metall eintauchten. Die offenen Enden der sechs Röhren wurden mit kleinen Korken verschlossen.

Den Widerstand dieses Rohrs verglich ich bei verschiedenen Temperaturen mit einem Neusilberdraht von geringem Temperaturcoefficienten, dessen Widerstand dem des Quecksilberrohrs bei etwa 10^0 gleich war, nach der Methode des übergreifenden Nebenschlusses. Das Verhältniss der verglichenen Widerstände zu den Widerständen des Rheostaten, der als Nebenschluss diente, wurde mit der erforderlichen Genauigkeit bestimmt.

Die Resultate der einzelnen Messungen sind folgende:

Ist der specifische Widerstand des Quecksilbers bei $0^0 = 1$, so ist derselbe, wenn die Temperaturen mit dem Luftthermometer gemessen werden, bei

$10^0 =$	1,00901	1,00903
	1,00905	
15^0		1,01361
20^0		1,01818

Die Werthe der letzten Spalte lassen sich bis auf 0,000015 genau darstellen durch

$$\sigma_t = 1 + 0{,}000900\,t + 0{,}00000045\,t^2$$

und auf 0,00004 genau durch

$$\sigma_t = 1 + 0{,}000907\,t.$$

Unter Uebergehung der älteren Untersuchungen über die Abhängigkeit des specifischen Widerstandes des Quecksilbers von der Temperatur will ich zum Vergleich mit meinen Zahlen die Resultate einiger Bestimmungen aus den letzten zwei Jahren anführen; ich werde mir dabei er-

lauben, die meistens angegebenen scheinbaren Coefficienten um den Betrag der Ausdehnung des Glases zu vermehren.

		absol. mittl. Coeff. bei 10^0	15^0
[1]) 1882.	Siemens und Halske	0,000889	0,000908
[2]) 1883.	Lord Rayleigh & Sidgwick (bei ca. 7^0)	0,000869	
[3]) 1884.	Lenz und Restzoff	0,000884	0,000893
[4])	Mascart, Nerville und Benoit	0,000895	0,000906
	Strecker	0,000909	0,000914

Nur die Beobachtungen von Lenz und Restzoff und die meinigen beziehen sich auf das Luftthermometer; die anderen Zahlen sind mit einer Unsicherheit[5]) behaftet, welche leicht so viel betragen kann, als die Zahlen obiger Tabelle unter einander abweichen.

§ 38. Veränderlichkeit des Leitungsvermögens des Neusilbers mit der Temperatur. Auch für die von mir verwendeten beiden Sorten von Neusilberdraht habe ich die Temperaturcoefficienten bestimmt. Von jeder Sorte wurde ein Stück von etwa 1 Q E. mit den Enden in starke Kupferelektroden eingelöthet; dicht an den Verbindungsstellen von Neusilber und Kupfer wurden an die Elektroden je zwei dünnere Kupferdrähte angesetzt, welche die Abzweigung zum Galvanometer und die zum Rheostaten bildeten, so dass von dem Kupferdraht sehr wenig zu dem zu messenden Widerstand gehörte. Die Neusilberdrähte selbst wurden auf Stramincarton aufgenäht und in Form eines aufgeschnittenen Cylindermantels gebogen. Die sechs Elektrodendrähte wurden durch einen Kork hindurchgesteckt und mit Siegellack befestigt; vermittelst dieses Korkes wurde die ganze Vorrichtung in ein Glas gesetzt, welches so weit mit Petroleum gefüllt war, dass der Widerstandsdraht völlig untertauchte; der Kork diente zugleich als Verschluss dieses Glases. Durch einen Rührer aus zwei concentrischen Ringen, dessen Stiel

1) Siemens und Halske, Reproduction de l'unité de résistance etc. 1882. — Elektrotechn. Ztschr. 1882. Nov. pag. 408.

2) Lord Rayleigh and Mrs. Sidgwick, l. c.

3) R. Lenz und N. Restzoff, Etudes électrométrologiques. II. 1884.

4) Mascart, Nerville und Benoit, l. c.

5) R. Lenz und N. Restzoff, l. c. pag. 4. 5.

durch den Kork hindurch ging, konnte die Flüssigkeit innerhalb und ausserhalb des Cylindermantels, welchen der aufgenähte Neusilberdraht bildete, in Bewegung versetzt werden. In gleicher Höhe mit dem Neusilberdraht befand sich das Gefäss eines Thermometers, das ebenfalls von dem verschliessenden Kork getragen wurde. Dieses Glas mit dem Drahtwiderstande wurde in ein weites Wasserbad oder in Eis gesetzt; unter allen Umständen aber wurde nur die Temperatur des Petroleums gemessen.

Ich verglich die beiden Widerstände, welche bei mittlerer Temperatur einander gleich waren, mit einander nach der Methode des übergreifenden Nebenschlusses bei 0^0, 10^0 und 20^0. Um die nöthige Genauigkeit zu erreichen, bestimmte ich die Grösse der erforderlichen Nebenschliessungen in jedem Falle kurz vor der definitiven Messung; zu der letzteren wurde erst geschritten, wenn ich mich überzeugt hatte, dass die Temperaturen der Petroleumbäder während der zu einer Beobachtung nöthigen Zeit bis auf wenige Hundertelgrade constant blieben; kurz vor und sofort nach jeder galvanischen Messung wurden nach tüchtigem Rühren die Thermometer abgelesen und aus beiden Ablesungen für dasselbe Thermometer die Mittel genommen.

Die für dieselben Drahtstücke aus mehreren Messungen erhaltenen Coefficienten stimmen sehr gut überein. Die für 10^0 berechnete Veränderung des Widerstandes ist danach bis auf mindestens 0,00002 des ganzen Widerstandes sicher bekannt.

Ich habe darauf von der Drahtsorte, welche den grossen Temperaturcoefficienten besitzt, eine grössere Anzahl von Stücken untersucht, welche von der Drahtrolle theils vor, theils während und theils nach Anfertigung meiner Drahtwiderstände genommen worden waren; diese Drähte besassen bis auf 1% denselben Coefficienten.

Für die eine Drahtsorte von stark veränderlichem Leitungsvermögen habe ich den ersten und den zweiten Temperaturcoefficienten ermittelt, für die zweite Sorte habe ich die Bestimmung eines mittleren Coefficienten für ausreichend gehalten. Die Zahlen habe ich bereits oben (§ 18) angegeben.

Auf die kleinen durch Kupfer gebildeten Theile der Widerstände meiner Rollen (vgl. § 18) wurde genügende Rücksicht genommen.

VI. Resultate der galvanischen Messungen.

§ 39. Ich gebe nun die Resultate meiner Widerstandsvergleichungen, welche für die Beurtheilung der Genauigkeit, welche in meinen Messungen erreicht worden ist, von Wichtigkeit sind.

Von meinen fünf Röhren besass ich im Ganzen 15 Copien, von jeder Röhre 3, wovon je eine aus dem Neusilberdraht mit kleinem Temperaturcoefficienten, zwei aus der älteren Sorte angefertigt waren.

Diese 15 Copien theilte ich in drei Reihen, so dass jede Reihe von jeder Röhre eine Copie enthielt, und dass die Glieder einer und derselben Reihe aus derselben Drahtsorte bestanden.

Von jeder Reihe von Copien leitete ich ein Paar von Normaleinheiten ab; ich habe oben (§ 33) das Schema angegeben, nach dem ich bei diesen Vergleichungen verfuhr; ein Paar von Normaleinheiten wurde mit einer Copie einer Röhre in dasselbe Wasserbad (§ 19) gebracht; die Copie wurde mit jeder der Einheiten und dann die letzteren unter einander verglichen.

Für die Copirung eines Normalrohrs und für die Vergleichung einer Copie mit einer Normaleinheit habe ich bereits Beispiele mitgetheilt (§ 25. 32).

Die definitiven Vergleichungen wurden folgendermassen vorgenommen:

16.—18. Januar 1884. Vergleichung der 15 Copien mit den Normalröhren.

23.—29. Januar. Vergleichung der Copien mit den Normaleinheiten.

30. Januar bis 2. Februar. Wiederholung der am 16.—18. Januar ausgeführten Copirung.

Während sämmtlicher Messungen lagen die beobachteten Temperaturen zwischen $9^0,6$ und $11^0,2$. Alle angegebenen Widerstände sind auf die Normaltemperatur von 10^0 reducirt.

Der erste Theil der nachfolgenden Tabelle enthält die Resultate beider Copirungen; ich habe der Berechnung der Werthe der Normaleinheiten die Mittel aus den Resultaten der Copirung zu Grunde gelegt; die grösste vorkommende Abweichung eines einzelnen Werthes für den Widerstand einer Copie vom Mittel beträgt 0,00005.

Der zweite Theil enthält die Werthe, welche ich für meine Normaleinheiten erhalten habe; wegen der Berechnung der Mittelwerthe vergleiche man die Bemerkung zu Tabelle I.

Tabelle II.

Widerstände der Copien der Normalröhren bei 10° in QE.

	Rohr-No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	No. 5
Erste Reihe	0,35820 0,35821	1,00053 1,00052	1,37470 1,37476	2,55879 2,55858	3,20904* 3,20907*
Zweite Reihe	0,35821**	0,99907* 0,99906*	1,37705 1,37708	2,55984 2,55966	3,21573 3,21575
Dritte Reihe	0,36061 0,36062	0,99733** 0,99733*	1,37880 1,37892	2,56388 2,56363	3,21313 3,21307

* und ** corrigirte Werthe nach § 23. Die Correctionen betrugen bei den mit * bezeichneten Werthen bis 0,00002, bei den mit ** bezeichneten 0,00017 des Widerstandes.

Widerstände der Normaleinheiten bei 10° in QE.

	v. d. 1. Reihe der Copien abgeleitete Normaleinheiten		v. d. 2. Reihe der Copien abgeleitete Normaleinheiten		v. d. 3. Reihe der Copien abgeleitete Normaleinheiten	
	No. 6	No. 7	No. 10	No. 11	No. 24	No. 26
abgeleitet von						
Rohr-No. 1	0,99820	0,99647	0,99659	1,00403	0,99901	1,00273
2	0,99809	0,99640	0,99649	1,00382	0,99898	1,00268
3	0,99837	0,99658	0,99673	1,00422	0,99926	1,00300
4	0,99815	0,99643	0,99659	1,00398	0,99913	1,00286
5	0,99833	0,99651	0,99662	1,00404	0,99920	1,00299
Mittel	0,99827	0,99650	0,99663	1,00406	0,99916	1,00291

Eine (etwa 50 Tage) nach diesen Messungen angestellte Vergleichung einer Siemens'schen Doseneinheit mit drei Normaleinheiten, welche durch unabhängige galvanische Messungen bestimmt worden sind, nämlich No. 7.

10. 26 ergab, dass die Werthe dieser Einheiten bis auf 0,0001 genau in den Verhältnissen zu einander standen, welche durch die Mittelwerthe der vorigen Tabelle angegeben werden.

§ 40. Um die Bedeutung des zweiten Theiles dieser Tabelle besprechen zu können, müssen wir die Entstehung der einzelnen Werthe dieser Tabelle vor Augen haben.

Die Zahlen einer und derselben wagrechten Zeile sind von demselben Rohr abgeleitet und es liegen ihnen dieselben Copirungen der Röhre zu Grund. Gemeinsam sind ihnen also die Fehler, welche bei der Calibrirung und Längenmessung der Röhre, bei der Bestimmung der Masse der Quecksilberfüllung und etwa bei der Füllung der Röhre zum Zwecke der Copirung gemacht worden sind.

Dem ersten Zahlenpaar einer Zeile, ebenso dem mittleren und dem letzten, liegt derselbe für die Copie der Normalröhre gefundene Werth zu Grund; ein solches Paar von Zahlen hat also ausser den schon genannten Fehlern noch diejenigen gemeinsam, welche bei der Copirung der Röhre in der Temperaturbestimmung und bei den galvanischen Messungen gemacht worden sind.

Auf jede besondere Zahl kommen die Fehler, welche bei der Vergleichung der Copien mit den Normaleinheiten nach der modificirten Kirchhoff'schen Methode begangen worden sind.

Auf diese Weise setzen sich die Abweichungen der in einer und derselben senkrechten Spalte stehenden Zahlen zusammen; dieselben betragen bis 0,0004. Sucht man für die Zahlen der wagrechten Zeilen (d. i. für die von demselben Rohr abgeleiteten Werthe) die mittlere Abweichung der Einzelwerthe vom Mittel, so erhält man folgende Beträge:

	Mittel-Einzelwerthe
1. Zeile	+ 0,00008
2. Zeile	+ 0,00019
3. Zeile	— 0,00010
4. Zeile	+ 0,00006
5. Zeile	— 0,00003

Diese Zahlen stellen ungefähr die Fehler dar, welche bei der Bestimmung der Dimensionen und der Calibercorrection der Normalröhren gemacht worden sind.

Ich glaube, dass die hauptsächlichste Fehlerquelle die Bestimmung der Calibercorrection ist. Für die Röhren No. 3 und 5, deren Querschnitt sich verhältnissmässig wenig ändert, dürfte die Länge des zur Calibrirung benutzten Quecksilberfadens wohl klein genug sein; aber es scheint, als ob die Röhren No. 1. 2. 4 so sehr veränderlichen Querschnitt besitzen, dass man mit den angewandten Mitteln noch immer ein zu kleines C erhält.[1]) Die mit den beiden guten Röhren No. 3 und No. 5 gemessenen Widerstände stimmen durchschnittlich auf etwa 0,00007 überein, während die am meisten abweichenden Werthe (durch No. 2 und No. 3 erhalten) durchschnittlich um 0,0003 von einander verschieden sind.

Angesichts der geringeren Zuverlässigkeit der mit Rohr-No. 2 (wo die Calibercorrection wahrscheinlich am unsichersten ist) bestimmten Werthe darf man dieselben bei Beurtheilung der Genauigkeit der Endresultate wohl ausser Acht lassen und annehmen, dass die Mittelwerthe für die Normaleinheiten auf 0,0001 richtig bestimmt sind.

§ 41. Fügt man die eben angegebenen Beträge als Correctionen den Werthen der Tabelle der Normaleinheiten zu, so entsteht eine neue Tabelle, in der die Zahlen einer senkrechten Spalte nur noch höchstens um 0,00015 von einander abweichen. Die Hälfte dieser Grösse stellt also ungefähr den Betrag der Fehler dar, welche bei den galvanischen Messungen begangen worden sind.

Die Zufügung dieser Correctionen zu Einzelwerthen sehe ich an als eine Reduction auf den Mittelwerth meiner Bestimmungen der Quecksilbereinheit; dieser Mittelwerth ist derselbe, welcher den Mittelwerthen der Tabelle der Normaleinheiten zu Grunde liegt.

Indem ich dieselben procentischen Beträge den von einander völlig unabhängig berechneten Widerständen der Normalröhren in der letzten Spalte der Tabelle I zufüge, erhalte ich die auf eine und dieselbe mittlere Einheit bezogenen Zahlen:

---

1) Man vergleiche darüber Mascart, Nerville und Benoit, l. c. p. 48., wo durch Versuche nachgewiesen wird, dass durch Wahl eines kürzeren Quecksilberfadens ein grösseres C erhalten wird.

Reducirte Widerstände der Normalröhren

W_{10}

No. 1	0,35493 $\frac{m}{mm^2}$,	Hg von 0^0
2	0,99940	„
3	1,37261	„
4	2,55267	„
5	3,20754	„

Die mittlere Einheit, auf welche diese Zahlen bezogen sind, ist auf 0,0001 richtig.

Diese Einheit liegt den Messungen des folgenden Abschnittes zu Grunde.

VII. Vergleichungen der Einheit der British Association und der von Siemens und Halske ausgegebenen Einheit mit der von mir hergestellten Quecksilbereinheit.

§ 42. Die zur Vergleichung gelangenden Stücke waren:

Ein Widerstand von Neusilberdraht, welcher von Herrn Glazebrook, Cavendish Laboratory, Cambridge, zu

0,99937 B.-A.-U. bei $17^0,7$ C

Mittel aus zwei Bestimmungen am 2./2. und 4./2. 1884. Temperatur-Coefficient 0,000294

bestimmt war und:

Zwei Widerstände aus Neusilberdraht, welche von der Telegraphenbauanstalt Siemens und Halske in Berlin als:

1. { 1,00025 S. E. bei 20^0 C Mittel aus 10 Best. zwischen 19./3. und 16./10. 1883.
   { 1,00038 „ „ „ „ 2 „ „ 15./2. und 21./2. 1884.

Temp.-Coeff. 0,00033

und

2. { 1,99972 S. E. bei 20^0 C Mittel aus 5 Best. zwischen 17./3. und 25./10. 1883.
   { 1,99971 „ „ 1 „ am 16./2. 1884.

Temp.-Coeff. 0,00035

ausgegeben wurden. Ich wähle für meine Vergleichungen die Werthe aus den neuesten Bestimmungen, indem ich annehme, dass kleine zeitliche Aenderungen der Widerstände vorliegen könnten.

Ausser diesen untersuchte ich noch 4 Siemens'sche Einheiten in der gewöhnlichen Dosenform.

Im Folgenden theile ich die Resultate aller einzelnen Vergleichungen mit.

Die Messungen wurden am 11.—17. März 1884 bei Temperaturen zwischen $9^0{,}0$ und $10^0{,}5$ angestellt.

1. Die Einheit der British Association, ausgedrückt durch die Länge einer Quecksilbersäule von 0^0 und 1 qmm Querschnitt ist gleich:

1,04898 m aus der Vergleichung mit Rohr-No. 2 [1])
1,04887 m „ „ „ No. 3
1,04891 m „ „ „ } No. 5
1,04904 m „ „ „ }

2. Die von Siemens und Halske ausgegebene Einheit ist ebenso gleich:

1,00010 m aus d. Vergleichung d. Rohrs No. 2 } [1]) } mit 1··
1,00003 m „ „ „ No. 3 }
1,00010 m „ „ „ } No. 5 }
1,00012 m „ „ „ }
1,00017 m „ „ „ No. 3 }
1,00030 m „ „ „ } No. 5 } mit 2··
1,00034 m „ „ „ }

Die mitgetheilten 11 Messungen sind Vergleichungen der oben beschriebenen Stücke, des Widerstandes der British Association und der Siemens'schen Normalrollen 1·· und 2··, mit meinen Quecksilberröhren.

Durch Vergleichung der beiden Siemens'schen Normalrollen fand ich, dass die Widerstände derselben nicht genau in dem Verhältnisse standen, welches ich aus den Angaben der Firma für meine Beobachtungstemperatur (10^0) berechnete. Halte ich für die Rolle 1 den Werth 1,00038 S. E. bei 20^0 C fest, so wäre nach meinen Messungen der Widerstand von 2 bei 20^0 C

1) Bei der zu dieser und der ersten unter 2. folgenden Messung gemeinschaftlich gehörigen Auswägung der Röhre No. 2 wurde der Quecksilberinhalt um 0,00018 kleiner gefunden, als in Tabelle I angegeben.

2,00007 S. E.
2,00017 „

im Mittel 2,00012 S. E.

Unter derselben Voraussetzung lässt sich auch aus den mitgetheilten Vergleichungen der beiden Rollen mit Quecksilberröhren der Widerstand von 2·· berechnen zu

2,00009 S. E. bei 20^0 C.

Die Vergleichung der vier Doseneinheiten, zum Theil mit Quecksilberröhren, zum Theil mit Normaleinheiten, ergab folgende Resultate:

Doseneinheit	Angabe der Firma		meine Bestimmung richtig bei
No. 2705	Dez. 1882. richtig bei	$15^0,6$	$15^0,3$
2706	„ „	$16^0,1$	$16^0,1$
2707	„ „	$17^0,1$	$17^0,0$
2674	Febr. 1884 „	$19^0,5$	$19^0,4$

Die Uebereinstimmung der von Siemens und Halske ausgegebenen Einheit und meiner Quecksilbereinheit befriedigt vollständig.

3. Endlich habe ich durch directe Vergleichung das Verhältniss der Einheit der British Association zu der von Siemens und Halske ausgegebenen Einheit gefunden wie folgt:

$$\frac{\text{B. A.}}{\text{S. E. (Berlin)}} = \left.\begin{matrix} 1{,}04895 \\ 1{,}04881 \end{matrix}\right\} \text{Vergleichung mit } 1\cdot\cdot$$

$$\left.\begin{matrix} 1{,}04864 \\ 1{,}04867 \end{matrix}\right\} \text{Vergleichung mit } 2\cdot\cdot$$

Resultate:

$$\left.\begin{matrix} 1 \text{ B. A.} = 1{,}04894 \\ 1 \text{ S. E. (Berlin)} = 1{,}00017 \end{matrix}\right\} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2}, \text{ Quecksilber von } 0^0.$$

1 B. A. = 1,04877 S. E. (Berlin).

Zum Vergleich gebe ich einige Zahlen aus den in der letzten Zeit angestellten Untersuchungen über denselben Gegenstand:

Die Einheit der British Association ist nach:

		$\frac{m}{mm^2}$, Hg von 0^0	S. E. (Berlin)
[1])	1882: Lord Rayleigh und Sidgwick	= 1,04809	= 1,04860
[2])	1884: Ròiti	= 1,04859	= 1,04862
[3])	Mascart, Nerville und Benoit	= 1,04850	= 1,04847
	Strecker	= 1,04894	= 1,04877

Hierzu ist zu bemerken, dass Ròiti zur Vergleichung der B.-A.-Einheit mit $\frac{m}{mm^2}$, Hg von 0^0 einen von mir bestimmten Drahtwiderstand benutzte.

---

1) Lord Rayleigh and Mrs. Sidgwick, l. c.

2) Ròiti, Determinazione della resistenza elettrica di un filo in missura assoluta, Nuovo Cimento, Ser. 3. vol. 15. 1884.

3) Mascart, Nerville et Benoit, l. c.

Nachtrag.

Nach Beendigung der vorstehenden Arbeit war es mir durch die Güte der Herren Geh. Reg.-Rath Dr. W. Siemens und Dr. Frölich ermöglicht, im Laboratorium der Telegraphenbauanstalt von Siemens und Halske in Berlin einige meiner Drahtwiderstände mit den Siemens'schen Quecksilberröhren zu vergleichen.

Ehe ich auf die Resultate meiner Messungen eingehe, will ich darauf hinweisen, dass die Formeln, nach denen Siemens und Halske die Widerstände ihrer Normalröhren berechnen, sich in zwei Punkten nicht unbeträchtlich von den meinigen unterscheiden.

Der Ausbreitungscoefficient an den Enden der Quecksilberröhren ist dem Radius der Röhre proportional $= a \cdot r$; Siemens und Halske setzen $a = 1$, während ich $a = 1{,}6$ nahm.[1]) Die Wahl des einen oder des anderen Werthes bedingt einen Unterschied von mehreren Zehntausendteln in den berechneten Widerständen.

Ausserdem haben Siemens und Halske für die Aenderung des specifischen Widerstandes des Quecksilbers mit der Temperatur etwas andere Werthe gefunden als ich; setzt man den Widerstand einer mit Quecksilber gefüllten Glasröhre bei $0^0 = 1$, so ist der Widerstand bei t^0 (scheinbare Aenderung in Glas) nach Siemens und Halske [2])

$$\sigma_t = 1 + 0{,}0008523\, t + 0{,}000001356\, t^2$$

nach Strecker

$$\sigma_t = 1 + 0{,}0008915\, t + 0{,}00000045\, t^2$$

Die nach diesen beiden Formeln berechneten σ_t zeigen bei etwa $21^0{,}5$ den grössten Unterschied mit 0,00032, während sie für etwa 40^0 gleich gross werden.

Um zu erfahren, wie genau die gegenwärtig im Gebrauche der Wissenschaft und Technik befindlichen, von Siemens und Halske aus-

---

1) Vgl. § 2 der vorstehenden Abhandlung.
2) Siemens und Halske, l. c.

gegebenen Widerstandseinheiten mit der von mir hergestellten Einheit übereinstimmen, wird man diese beiden Unterschiede nicht weiter berücksichtigen, wie ich auch in der mitgetheilten Abhandlung gethan habe.

Meine neuerdings angestellten Vergleichungen, über welche ich jetzt berichten will, geben eine gute Bestätigung der am Schlusse meiner Abhandlung mitgetheilten Vergleichungen; ich fand nämlich, wenn ich für die Siemens'schen Quecksilberröhren die von der Firma angegebenen Capacitäten für 0^0 ansetze und die Aenderung des Widerstandes nach der Siemens'schen Formel berechne, dass

1 S. E. (gegenwärtig im Gebrauch) $= 1{,}00027 \frac{m}{mm^2}$, Quecksilber von 0^0 (Strecker) ist.

Indess scheint es mir von Interesse zu sein, zu untersuchen, welches das Verhältniss der Siemens und Halske'schen Einheit zu der meinigen ist, wenn man von den Dimensionen der Normalröhren ausgehend dieselbe Formel für die Berechnung der Widerstandscapacitäten und dieselbe Formel für die Aenderung des specifischen Widerstandes des Quecksilbers mit der Temperatur anwendet.

So lange es sich nur um das Verhältniss der beiden Einheiten, nicht um den richtigen absoluten Werth der Quecksilbereinheit handelt, brauchen wir uns nicht für die Richtigkeit der einen oder der anderen Formel zu entscheiden. Im vorliegenden Fall, wo die Ausbreitungswiderstände nur einen sehr geringen Theil der gesammten Widerstände ausmachen, erhalten wir bis auf 0,0001 dasselbe Resultat, ob wir durchgehends die Siemens'schen oder durchgehends meine Formeln anwenden. Es genügt also hier, wenn wir allen Berechnungen dieselben Formeln zu Grunde legen; die Wahl der Formeln selbst bleibt unserer Willkür überlassen. Ich werde der Einfachheit wegen die in meiner Abhandlung angegebenen Formeln (§§ 8. 16. 37) nehmen; nach diesen werden im Folgenden auch die Widerstände der Siemens'schen Normalröhren berechnet.

Ich gehe nun zur Beschreibung der angestellten Messungen über.

Am 29. Oktober bis 4. November 1884 führte ich im physikalischen Institut zu Würzburg die Vergleichung von fünf meiner Normaleinheiten (No. 6. 10. 11. 24. 26) unter einander und mit Rohr No. 2 aus. Die Methode der Vergleichung war die Kohlrausch'sche des übergreifenden Nebenschlusses. Die fünf Röhren wurden jede mit jeder verglichen, um

möglicherweise vorkommende spätere Veränderungen der Widerstände genau nachweisen zu können; bei der Vergleichung mit Rohr No. 2 wurde dem letzteren der auf das Mittel meiner Bestimmungen der Quecksilbereinheit reducirte Werth

$$W_{10} = 0{,}99940$$

nebst der Reductionsformel

$$W_t = W_{10}\,[1 + 0{,}000892\,(t - 10) + 0{,}00000045\,(t - 10)^2]$$

zu Grunde gelegt; die Beobachtungstemperaturen lagen zwischen $11^0{,}1$ und $11^0{,}5$. Bei diesen wie den folgenden Messungen wurden die Angaben der Quecksilberthermometer auf das Luftthermometer bezogen.

Am 17.—22. November 1884 nahm ich die Messungen im Siemens'schen Laboratorium vor, wobei mich Herr Sittig in dankenswerther Weise unterstützte. Die befolgte Methode war die der Wheatstone'schen Brücke. Ich verglich wieder meine fünf Rollen jede mit jeder, und dann No. 26. 24. 11 mit der Summe der Siemens'schen Quecksilberröhren No. 17 und No. 124, No. 10 und No. 6 mit Rohr No. 122; die Beobachtungstemperaturen lagen zwischen 14^0 und 16^0. Die Capacitäten der Quecksilberröhren bei 0^0 sind (nach meiner Formel berechnet)

Rohr No. 17 bei 0^0	0,34403	Q.E.
No. 122	1,01381	„
No. 124	0,73833	„

Die Resultate der Vergleichungen sind folgende:

1. Vergleichung der Einheiten No. 6. 10. 11. 24. 26 untereinander; die Tabellen geben die beobachteten Differenzen in Hunderttausendteln der Quecksilbereinheit; die erste senkrechte Spalte jeder Tabelle enthält die Minuenden, die erste wagrechte Zeile den Subtrahenden.

bei 10^0:

gemessen in Würzburg, 29./X. — 4./XI. 84

	No. 26	— 24	— 6	— 10
No. 11	86	461	573	733
26		374	490	650
24			119	277
6				159

gemessen in Berlin, 17./XI. — 22./XI. 84

	No. 26	— 24	— 6	— 10
11	83	471	582	739
26		379	493	654
24			116	267
6				157

*

Die Widerstände der fünf Rollen wurden gefunden durch Vergleichung mit Quecksilberröhren zu:

bei 10^0:

	Würzburg $\frac{m}{mm^2}$, Hg von 0^0 (Strecker)	Berlin S. E. (nach der Umrechnung)	Differenz	
No. 11	1,00415	1,00499	0,00084	Vergleichung mit der Summe der Röhren No. 17 und No. 124.
26	1,00324	1,00418	0,00094	
24	0,99949	1,00046	0,00097	
6	0,99837	0,99905	0,00068	Vergleichung mit Rohr 122.
10	0,99679	0,99747	0,00068	
No. 11 + 26 + 24	3,00688	3,00963		Vergleichung mit No. 17 + No. 124.
No. 6 + 10	1,99516	1,99652		„ „ No. 122.

1 S. E. (nach der Umrechnung)

$= 0{,}99909 \frac{m}{mm^2}$, Hg von 0^0; Vergleichung mit No. 17 + 124

$= 0{,}99932$ „ „ „ „ No. 122

Mittel 0,99920 „ „

Beiträge

zur

Kenntnis der Nervenfasern.

Von

Theodor Boveri.

Mit 2 Tafeln.

(Aus dem histiologischen Laboratorium zu München.)

Beiträge zur Kenntnis der Nervenfasern.

Die nachstehenden Untersuchungen wurden zum grössten Teil während des Winter- und Sommersemesters 1883/84 im hiesigen histiologischen Laboratorium angestellt. Sie erstrecken sich sowohl auf die peripheren markhaltigen Nervenfasern, als auch auf die specifischen Fasern des sympathischen Systems und jene des Olfactorius. Ich beginne die Darstellung mit den ersteren.

I. Die periphere markhaltige Nervenfaser

A. der Amphibien und höheren Wirbeltiere.

Die folgenden Ergebnisse beziehen sich der Hauptsache nach auf die Fasern des Frosches; allein einzelne Control-Untersuchungen berechtigen zu der Annahme, dass dieselben im wesentlichen auch für die Nervenfasern der höheren Wirbeltiere Geltung haben.

Methode der Untersuchung.

Den Ausgangspunkt meiner Untersuchungen bildeten die Silberniederschläge, wie sie durch Behandlung mit schwacher Höllensteinlösung an frischen Nervenfasern hervorgerufen werden können. Das Bestreben, die mannichfaltigen Bilder, die sich dabei zeigen, aus dem Bau der Fasern zu erklären, führte dazu, dieselben an der Hand anderer Methoden zu studieren. Da sich jedoch an der intakten Faser, mag sie nun im lebenden Zustand oder nach Behandlung mit irgend einer conservierenden Flüssigkeit untersucht werden, nur ein sehr mangelhafter Einblick in die inneren Strukturverhältnisse gewinnen lässt, schlug ich ein Verfahren ein, das im hiesigen histiologischen Laboratorium bereits früher

bei den Untersuchungen des Herrn A. Maley [1]) sich bewährt hatte. Dasselbe besteht in der Anfertigung möglichst dünner Längsschnitte durch in Osmiumsäure gehärtete Nervenstämme. Die Methode an und für sich wurde, soviel mir bekannt, zuerst von Key und Retzius [2]) benützt; allein sie diente diesen Forschern weniger zum Studium der Nervenfasern selbst, als vielmehr dazu, das Verhalten des Endoneuriums zu zeigen.

Soll die erwähnte Methode vor Zupfpräparaten einen Vorteil gewähren, so müssen die Schnitte so dünn sein, dass dadurch zugleich die einzelnen Nervenfasern in Längsschnitte zerlegt werden. Bei der gegenwärtigen Vollkommenheit der Schneidetechnik ist denn nun auch diese Forderung nicht schwierig zu erfüllen. Ich verfuhr folgendermassen: Der einem frisch getöteten Frosch rasch und möglichst ohne Zerrung ausgeschnittene Nervus ischiadicus wurde, nach Ranvier's Vorschrift ausgespannt, auf etwa vier Stunden in eine $^1/_2$ %ige Lösung von Ueberosmiumsäure gebracht, dann einige Stunden in destilliertem Wasser ausgewaschen und nun in 90%igem Alkohol nachgehärtet. Dem so behandelten Nerven wurde eine etwa 6 mm lange möglichst gerade Portion entnommen, 24 Stunden in einer conc. wässerigen Lösung von Säure-Fuchsin gefärbt und hierauf ebenso lange in absolutem Alkohol ausgewaschen. Zum Behuf des Schneidens wurde das Objekt in Paraffin eingebettet. Zur Orientierung, die natürlich eine möglichst genaue sein muss, benutzte ich den vortrefflichen hiezu construierten Apparat von Jung, der die minimalsten Aenderungen der Richtung mit Leichtigkeit ausführen lässt. Greift die Schneide des Messers das cylindrische Objekt in der ganzen Länge einer Mantellinie an und gelingt es nun, bei Drehung der Mikrometerschraube um 3 — 4 Teilstriche (an dem Jung'schen Mikrotom) Schnitte zu erhalten, so werden dieselben dem gewünschten Zweck vollkommen entsprechen.

Bevor ich daran gehe, eine Beschreibung der so erhaltenen Bilder zu geben, möchte ich mich etwas eingehender über die Zuverlässigkeit

---

1) Kupffer, Ueber den „Axencylinder" markhaltiger Nervenfasern. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Cl. d. k. bayer. Ak. d. Wiss. 1883. Heft III. Maley, Zur Kenntnis d. markhaltigen Nervenfasern Inaug.-Dissertation. München 1883.

2) Key und Retzius, Studien in der Anatomie des Nervensystems und des Bindegewebes. Stockholm 1876.

derselben aussprechen. Seit Ranvier's epochemachenden Arbeiten hält man die Osmiumsäure bei richtiger Anwendung wohl allgemein für ein vollkommenes Fixationsmittel der Nervenfasern und speciell der Markscheide. Da sich nun durch diese Säure sehr verschiedene Bilder der Markscheide hervorrufen liessen, so wurden darauf auch verschiedene Anschauungen über die Struktur derselben begründet (Lantermann [1]), Golgi [2]). In neuester Zeit suchte Pertik [3]) in einer sehr wertvollen Arbeit über Myelin und Nervenmark diese verschiedenen Erscheinungen in einheitlicher Weise zu erklären. Er gelangt zu dem überraschenden Resultat, dass sich die Osmiumsäure nicht direkt mit dem Nervenmark verbindet, sondern nur unter Auftreten von Myelinformationen [4]), so dass bei einer vollständigen Fixation das Nervenmark in toto jenen Umformungsprozess durchgemacht haben muss. Dann erst wird es in Form kleiner schwarzer Körnchen fixiert. Diesem Resultat muss ich widersprechen, d. h. ich muss behaupten, dass die Osmiumsäure im Stande ist, das Nervenmark direkt zu fixieren. Ich verweise dabei auf Fig. I. Taf. I. Die hier gegebenen Abbildungen sind alle drei ein und demselben Präparate entnommen, einem Schnitt, der in der oben beschriebenen Weise angefertigt worden war. Fig. I. a. gehört einer Faser an, die ganz an der Peripherie des Nerven gelegen ist, c. einer solchen aus der Achsengegend, b. liegt zwischen beiden. Hier lässt sich also die Wirkungsweise der Osmiumsäure in ihren einzelnen Stadien verfolgen. Und zwar sind diese nicht etwa nach der Zeit zu unterscheiden, während welcher die einzelnen Fasern der Säurewirkung ausgesetzt waren, sondern vielmehr nach den verschiedenen Concentrationsgraden, in denen die Osmiumsäure mit jeder Faser in Berührung kam. Die peripher gelegenen Fasern wurden sofort von einer 0,5 %igen Lösung bespült; je näher eine Faser der Achse lag, in desto verdünnterem Zustand kam die Säure mit ihr in Berührung.

---

1) Lantermann, Archiv für mikroskop. Anatomie. Bd. XIII.

2) Golgi, Sulla struttura delle fibre nervose midollate periferiche e centrali. Arch. per le scienze med. 1881.

3) Pertik, Untersuchungen über Nervenfasern. Archiv für mikroskop. Anat. Bd. XIX.

4) Zum Verständnis des Folgenden sei bemerkt, dass Pertik in zweckmässiger Weise scharf zwischen Nervenmark und Myelin unterscheidet; das letztere ist eine bei der Verflüssigung auftretende Form des Nervenmarks, dieses demnach eine myelinogene Substanz.

Pertik gibt nun richtig an, dass mit steigender Verdünnung der Lösung die Entwicklung von Myelinformationen zunehme und dass der Charakter derselben sich mehr und mehr demjenigen nähere, der bei reiner Wasserwirkung erscheint. Daraus scheint mir aber direkt zu folgen, dass nicht die Osmiumsäure die Bedingung für das Auftreten der Myelinformation abgibt, ja dass sie im Gegenteil demselben geradezu hinderlich ist, sondern dass es sich hier um die Wirkung des Wassers handelt, neben dem die Säure immer weniger zur Geltung kommen kann. Ihre Beteiligung an dem Umformungsprozess scheint sich nur darin zu äussern, dass sie die Wirkung des Wassers je nach ihrer Stärke in bestimmter Weise modificiert.

Pertik stützt sich wesentlich darauf, dass bei vollkommener Fixation die Markscheide aus einer dunkel schwarzen, harten, brüchigen Masse bestehe, dass sie bedeutend verschmälert und unregelmässig gerunzelt sei, Erscheinungen, die durch die Zerstörung von Myelinformationen hervorgerufen sein sollten. Allein diese Angabe ist nicht unbedingt richtig. Es gibt vielmehr auch eine vollständige Fixation, bei der die Markscheide weder verschmälert, noch gerunzelt, noch brüchig ist, sondern wo sie vollkommen sowohl die Formen und Dimensionen, als auch das ganz homogene Aussehen der lebenden Faser bewahrt (Fig. I. a.). Dass aber eine solche Faser jenen ganzen die Form so bedeutend alterierenden Umwandlungsprozess durchgemacht und schliesslich doch ihre alte Form wieder erlangt habe, das wird wohl niemand glauben. Hier haben wir demnach ohne Zweifel eine direkte Fixation des Nervenmarkes vor uns. Solche Fasern scheint Pertik nicht zu Gesicht bekommen zu haben und es ist dies bei dem Verfahren, das er zur Erlangung normaler Bilder einschlug, auch leicht erklärlich, wenn man bedenkt, dass bei einem in der beschriebenen Weise behandelten Frosch-Ischiadicus kaum die zwei äussersten Faserlagen ein vollkommen normales Aussehen zeigen.

Während ich mit den Deutungen, die Pertik den Bildern Golgi's und Lantermann's gibt, insofern übereinstimme, als auch ich dieselben auf die Entwicklung von Myelinformationen zurückführe, glaube ich ihm in Bezug auf die nähere Begründung in einigen Punkten widersprechen zu müssen. Pertik bildet in Fig. IV. eine Faser ab, die ungefähr mit meiner Fig. I. b. übereinstimmt und in der er, wie nebenbei bemerkt sein mag, die nor-

male Struktur vollkommen erhalten sieht. Die Markscheide beschreibt er hier als aus einer homogenen farblosen (myelinogenen) Grundsubstanz mit dicht eingelagerten durch Osmiumsäure geschwärzten Körnchen bestehend. In der That kann die intakte Faser leicht diesen Eindruck hervorrufen. Dünne Schnitte jedoch lehren (Fig. I. b.), dass gerade umgekehrt farblose Punkte oder Tröpfchen in eine homogenegrau gefärbte Masse eingelagert sind, so dass sich dieses Verhalten direkt an das von Lantermann beschriebene anreiht, wo grössere ungefärbte Tropfen durch eine graue ebenfalls homogene Zwischensubstanz getrennt sind (Fig. I. c.). Zwischen beiden Bildern finden sich alle Uebergänge. Nach Pertik, der in den geschwärzten Partien die am meisten umgeformten sieht, wären die genannten Erscheinungen nur so zu erklären, dass entweder bei der Umwandlung des Markes in Myelin je nach der Concentration der Säure kleinere oder grössere annähernd runde Portionen des Markes zurückblieben, oder aber, dass zunächst alles Mark in Myelin umgewandelt werde und dass die Osmiumsäure bei der Fixierung rundliche Inseln dieser Substanz gleichsam ausspare. Die letztere Annahme ist ganz undenkbar, die erstere aber zum mindesten unwahrscheinlich. Viel plausibler erscheint es, dass sich die entstehende Myelinformation in Form kleinerer oder grösserer Tröpfchen in dem noch unveränderten Marke absetzt, so dass also bei den erwähnten Bildern der grau gefärbte Teil das am wenigsten modificierte Mark darstellen würde, ein weiterer Grund für die Annahme einer direkten Fixierung des Markes durch die Osmiumsäure.

Was Pertik's Versuche an den myelinogenen Extracten betrifft, so scheinen mir dieselben gleichfalls nicht einwurfsfrei zu sein. Sicherlich vernachlässigt er auch hier die Wasserwirkung zu sehr. Um ein reines Resultat der Osmiumsäurewirkung zu erhalten, müsste man mit wasserfreien Dämpfen dieser Substanz arbeiten. Lässt man solche auf isolierte frische Nervenfasern einwirken, so rufen sie durchaus keine Myelinformationen hervor, sondern fixieren das Mark direkt und ohne Veränderung mit gleichmässiger homogener Graufärbung.

Ich glaube demnach behaupten zu dürfen, dass die Osmiumsäurelösung bei richtiger, d. h. solcher Concentration, bei der nicht nebenbei das Wasser zur Wirkung kommen kann (zwischen 0,5 und 1%) und bei

direkter Einwirkung die Markscheide lebender Fasern so zu conservieren vermag, dass wir aus den so erhaltenen Bildern sichere Schlüsse auf die normale Form und Struktur derselben ziehen dürfen. Mit viel geringerer Bestimmtheit lässt sich dies für den Achsencylinder behaupten; denn hier fehlt uns die Controle der Beobachtung im lebenden Zustand. Ich werde auf diesen Punkt unten noch einmal zurückkommen und wende mich nun zur Beschreibung der einzelnen Faserbestandteile, wie sie an den Längsschnitten sich darstellen.

a. Ergebnisse der Längsschnitte.

Hinsichtlich der Schwann'schen Scheide scheinen seit Ranvier [1]) die meisten Forscher darin übereinzustimmen, dass dieselbe aus annähernd gleich langen Hohlcylindern besteht, die unter eigentümlichen Modificationen (Ranvier'che Einschnürung) durch Kittsubstanz mit einander vereinigt sind. Boll [2]) und Rawitz [3]) stehen allerdings dieser Anschauung entgegen, indem sie die Schwann'sche Scheide continuirlich über die Schnürstelle hinwegziehen lassen. Da jedoch einerseits Boll seine Angabe nicht auf direkte Beobachtung stützt, sondern daraus ableitet, dass der unter gewissen Umständen in den Nervenfasern auftretende „Markstrom" stets die Einschnürung passiert und nie an derselben austritt, eine Thatsache, die für die Continuität der Schwann'schen Scheide durchaus nicht beweisend ist, andererseits Rawitz zwar direkte Beobachtungen ins Feld führt, diese aber, wie seine Zeichnungen lehren, sich nicht wirklich auf die Schwann'sche Scheide, sondern auf den (durch Silberbehandlung häufig geschwärzten) Zwischenraum zwischen zwei eng aneinander liegenden Fasern beziehen, so kommen die Angaben dieser Autoren gegenüber dem übereinstimmenden Resultate der übrigen Beobachter nicht in Betracht.

Wenn es deshalb als feststehend gelten kann, dass die Schwann'sche Scheide von Strecke zu Strecke unterbrochen und dadurch in getrennte Segmente zerlegt wird, so ist doch die bisher geltende Annahme, dass

1) Ranvier, Recherches sur l'Histologie et la Physiologie des Nerfs. Arch. de Phys. Tom. IV. 1872.

2) Boll, Archiv für Anatomie und Entwicklungsgeschichte. 1877.

3) Rawitz, Archiv für Anatomie und Physiologie. 1879.

jede ein solches Segment darstellende Membran durch diese Unterbrechungen ihr Ende finde, dass sie also, mit anderen Worten, an den Schnürstellen einfach aufhöre, nicht richtig. Vielmehr wendet sich jede dieser Membranen an den beiden zugehörigen Einschnürungen nach Innen und bekleidet nun die Innenfläche der Markscheide ebenso, wie sie als Schwann'sche Scheide deren Aussenfläche überzieht. Der Umschlagsrand ist an allen gut getroffenen Einschnürungen deutlich wahrzunehmen, wie Fig. II. u. III. (Taf. I.) lehren, von denen ich nach dem oben Gesagten kaum zu erwähnen brauche, dass II. direkt von der angewandten Säurelösung getroffen wurde, während bei III. die Wirkung des Wassers bereits stark zur Geltung kam. Auch die nächste Fortsetzung nach Innen lässt sich leicht constatieren, da sie, selbst an den bestconservierten Fasern, niemals dem Marke unmittelbar anliegt (Fig. II.). Schwieriger dagegen ist es, den weiteren Verlauf zu verfolgen. Hier lässt sich im Allgemeinen nur erkennen, dass das grau gefärbte Mark durch eine scharfe, rot gefärbte Contour begrenzt wird, was übrigens ganz in gleicher Weise auch für die Schwann'sche Scheide gilt. Jene Fasern jedoch, auf die das Wasser bereits stärker modificierend eingewirkt hat, zeigen an den Stellen, an denen dieser Einfluss sich in erster Linie geltend macht, — nämlich in der Nähe der Einschnürung und an den Grenzen der Lantermann'schen Segmente — die genannte Contour so deutlich vom Marke abgehoben (Fig. III. u. I. c.), dass sich dieselbe dadurch mit Evidenz als eine isolierbare Membran erweist, die die ganze Innenfläche des Markes überzieht. Die Schwann'sche Scheide besteht demnach aus den an einander gereihten äusseren Blättern vollständig in sich geschlossener Membranen von der Form zweier concentrisch in einander gesteckter, an beiden Enden in einander übergehender cylindrischer Röhren [1]).

Damit erledigt sich auch der Widerspruch, der hinsichtlich des Schnürringes (anneau constricteur, Ranvier) die Literatur beherrscht, indem derselbe einerseits als Verdickungsring der Schwann'schen Scheide erklärt wird, während er sich andererseits durch seine Schwärzung in

1) Es soll damit jedoch nicht gesagt sein, dass die innere Membran in ihrem Verhalten mit der Schwann'schen Scheide vollkommen übereinstimme; vielmehr lässt sich im Gegenteil das Eine mit Sicherheit behaupten, dass sie in Bezug auf ihre Resistenz gegen mechanische Eingriffe der Schwannschen Scheide bedeutend nachsteht.

Silbernitrat als Kittlinie dokumentiert. Nach dem Gesagten kann der Schnürring nichts anderes sein, als der optische Ausdruck des bald breiteren, bald fast verschwindenden Zwischenraumes zwischen den Umschlagsrändern, durch welche je zwei an einander stossende Segmente der Schwann'schen Scheide mit den zugehörigen inneren Membranen in Verbindung stehen.

Soll es sich darum handeln, die beschriebene Membran zu benennen, so ist zu erwähnen, dass dieselbe bereits einen Namen besitzt, indem sie unzweifelhaft mit der „Achsencylinderscheide" Kuhnt's [1]) und wahrscheinlich auch mit jener Hans Schultze's [2]) identisch ist. Allein diese Bezeichnung ist nach dem Gesagten gewiss unpassend; denn die in Rede stehende Membran gehört entschieden zur Markscheide und nicht zum Achsencylinder. Da es bei der Wahl eines neuen Namens wünschenswert erscheint, dass in demselben die Beziehungen zur Schwann'schen Scheide (dem Neurilemm) zum Ausdruck gelangen, so möchte ich die Benennung „inneres Neurilemm" vorschlagen und davon die Schwann'sche Scheide künftighin als „äusseres Neurilemm" unterscheiden. Ich werde im Folgenden diese Ausdrücke gebrauchen.

Es würde sich hier naturgemäss die Frage anschliessen, ob auch die „innere Hornscheide" (Ewald und Kühne) mit dem inneren Neurilemm identisch sei. Da sich diese Frage jedoch besser im Anschluss an das Horngerüst der Markscheide erörtern lässt, verschiebe ich ihre Besprechung bis dahin und gehe zur Betrachtung der Markscheide über.

Drei Punkte kommen hier in Betracht: einmal das Verhalten des Markes an der Einschnürung, dann die Frage nach der Praeexistenz und den Bedingungen der Lantermann'schen Segmente und endlich die in der letzten Zeit so eifrig discutierte Markstruktur.

Zugleich mit der Entdeckung der Einschnürungen teilte Ranvier die Beobachtung mit, dass an diesen Stellen die Markscheide stets unterbrochen ist. Ja, diese Angabe bildete sogar den wesentlichsten Teil seiner Befunde; denn hauptsächlich hierauf stützte er seine Anschauungen von der morphologischen und physiologischen Bedeutung jener merkwürdigen Stellen. Obgleich

---

1) Kuhnt, Die peripherische markhaltige Nervenfaser. Arch. für mikr. An. Bd. XIII.

2) H. Schultze, Achsencylinder und Ganglienzelle. Arch. für An. und Entw. 1878.

die Discontinuität des Markes von den späteren Beobachtern im Allgemeinen bestätigt wurde, behaupteten doch einige Autoren, zuerst A. Key und G. Retzius [1]), dann auch Rouget [2]) und Kuhnt [3]), dass es neben diesen „vollständigen" Einschnürungen auch „unvollständige" gebe, d. h. solche, bei denen die Markscheide durch die Schnürstelle zwar verschmälert, aber nicht völlig unterbrochen werde. Ranvier [4]) suchte daraufhin vermittelst eines Experimentes darzuthun, dass solche unvollständige Einschnürungen durch starke Pressung der Markscheide hervorgerufene Kunstprodukte seien. Dass Ranvier von Anfang an im Rechte war, das kann nach dem oben geschilderten Verhalten des Neurilemms nicht mehr zweifelhaft sein; nachdem es sich gezeigt hat, dass jedes zwischen zwei benachbarten Einschnürungen gelegene Segment der Markscheide von einer vollkommen geschlossenen Membran umhüllt wird, müssen die unvollständigen Einschnürungen als normale Bildungen aufgegeben werden. Ich möchte übrigens bezweifeln, dass die von den oben genannten Autoren als normal beschriebenen und von Ranvier künstlich hergestellten „unvollständigen" Einschnürungen wirklich solche waren. Aller Wahrscheinlichkeit nach reichte eben in diesen Fällen das Mark von beiden Seiten her so dicht an die Schnürstelle heran, dass die minimale Unterbrechung sich der Beobachtung entzog, ein Verhalten, das dem normalen durchaus nicht so ferne steht, als gewöhnlich angenommen zu werden scheint. Fast sämmtliche Angaben nämlich über die Endigungsweise des Markes an der Einschnürung sind unrichtig. Es rührt dies von dem unbedingten Vertrauen her, das man den Osmiumsäurepräparaten in dieser Hinsicht schenkte, während doch, wie wir oben gesehen haben, von einem mit diesem Fixationsmittel behandelten Nervenstamm nur die ganz peripher gelegenen Fasern ihr normales Aussehen bewahren, die übrigen aber um so stärker verändert sind, je näher sie der Achse des Nerven liegen. So wurden als normale Bilder meist solche gezeichnet, an denen das Mark nach einer leichten Anschwellung in nicht unbeträchtlicher Ent-

1) Key und Retzius, Nordiskt Medicinskt Arch. Bd. IV. 1872, übersetzt im Arch. f. mikr. Anat. Bd. IX.

2) Rouget, Développement des nerfs etc. Arch. de Physiologie. 1875.

3) Kuhnt, l. c.

4) Ranvier, Leçons sur l'Histologie du Système nerveux.

fernung vom Schnürring entweder mit scharfem convexen Rand oder allmählich sich verlierend endet, — Bilder, deren Entstehung auf die Wirkung des Wassers zurückzuführen ist, indem dieses das Mark teils von der Schnürstelle zurückdrängt, teils in Myelinformationen überführt. Das thatsächlich normale Verhalten finde ich nur bei Boll[1]) richtig gezeichnet. Das Mark endigt in der Weise, dass es, stets dem äusseren Neurilemm dicht angeschmiegt, sich allmählich zu einer scharfen Kante auszieht, die sich deutlich bis an den Umschlagsrand verfolgen lässt (Fig. II.). Indem nun das innere Neurilemm dieser Verschmälerung der Markscheide nicht folgt, bleibt zwischen beiden ein ringförmiger Raum übrig, von dem ich nicht angeben kann, wie er ausgefüllt ist. Wie man sieht, stimmt die Endigungsweise des Markes an der Einschnürung mit jener der Lantermann'schen Segmente wesentlich überein, was auch nicht zu verwundern ist, wenn man bedenkt, dass das Ende des interannulären Markcylinders ja zugleich das Ende eines Lantermann'schen Segmentes darstellt.

Die Praeexistenz der hier erwähnten Markabschnitte ist noch immer nicht allgemein anerkannt. Man suchte die Entscheidung durch Untersuchung der lebenden Faser zu gewinnen, allein mit widersprechendem Resultat; denn während die einen Beobachter die Trennungslinien der Segmente deutlich wahrnahmen, konnten andere keine Spur davon entdecken. Und wenn deshalb den ersteren eingewendet werden konnte, sie hätten überhaupt keine normalen Fasern zu Gesicht bekommen, so lässt sich den letzteren, (die Richtigkeit ihrer Beobachtung vorausgesetzt) erwidern, dass eine Abgrenzung des Markes in einzelne Stücke, wenn auch an der intakten Faser unsichtbar, so doch vorhanden sein könnte. Eine Entscheidung auf diesem Wege dürfte demnach wohl kaum zu erreichen sein. Dagegen scheint mir eine andere Erwägung einfach zum Ziel zu führen. Existieren die Lantermann'schen Segmente an der lebenden Faser, so können als Bedingungen für dieselben nur zwei Möglichkeiten in Betracht kommen. Die eine ist die, dass jedes Segment für sich ein abgeschlossenes Ganze, eine selbständige Individualität darstellt, ohne Neigung, mit den benachbarten Segmenten zusammenzufliessen, eine

1) Boll. l. c.

Möglichkeit, die bekanntlich Lantermann [1]) selbst vertrat, indem er einem jeden seiner Markglieder einen Kern vindicierte und dieselben demnach als Zellen betrachtete. Nachdem wir aber einerseits wissen, dass Lantermann sich in diesem Punkte getäuscht hat, und da andererseits jenes Reagens, welches die Grenzen dicht an einander gereihter Gewebsindividuen mit Sicherheit hervortreten lässt, nämlich das salpetersaure Silber, an frischen Nervenfasern durchaus nicht im Stande ist, eine Abgrenzung des Markes in einzelne Abschnitte darzuthun, so bleibt nur noch die andere Möglichkeit übrig, dass nämlich die Segmentierung eine Folge von Membranen oder mindestens Schichten andersartiger Substanz ist, welche die ganze Dicke des Markes in schräger Richtung durchsetzen. Und so verhält es sich in der That, wie dies zuerst Kuhnt [2]) nachgewiesen hat, der zwischen seiner Achsencylinderscheide und der Schwann'schen Scheide trichterförmige Membranen ausgespannt sah und als „Zwischenmarkscheiden" beschrieb. Ich kann seine Angaben an meinen Präparaten vollkommen bestätigen (Fig. I.). Dabei lässt sich Folgendes constatieren. An den Längsschnitten der am besten conservierten Fasern kann man zunächst von den Lantermann'schen Segmenten gar nichts wahrnehmen, das Mark scheint vielmehr die ganze Strecke von einer Einschnürung bis zur nächsten ohne jegliche Unterbrechung auszufüllen. Erst bei Anwendung stärkster Vergrösserung und, wenn man das Augenmerk speciell auf diesen Punkt richtet, erkennt man, wie in unregelmässigen Abständen von der Contour des äusseren Neurilemms zu der des inneren eine feine rot gefärbte Linie das Mark in schräger Richtung durchzieht und wie derselben auf der anderen Seite eine ebensolche, aber entgegengesetzt verlaufende Linie entspricht (Fig. I. a.). Dies sind die Durchschnitte der Zwischenmarkscheide Kuhnt's. Das Mark liegt derselben beiderseits ebenso dicht an, wie dem Neurilemm. Wenn also die Grenzen der Segmente an der lebenden Faser überhaupt sichtbar sind, so können sie nicht als wirkliche Spalten, sondern nur als ganz feine Linien sich darstellen, wie dies von allen Autoren nur Boll richtig gezeichnet hat. Das rasche Auftreten der „Einkerbungen" zwischen den

1) Lantermann, Arch. für mikr. An. XIII.

2) Kuhnt, Die Zwischenmarkscheide der markhaltigen Nervenfasern. Med. Centralblatt. 1876, Nr. 49.

einzelnen Segmenten ist daraus zu erklären, dass sich an den scharf zugespitzten Enden derselben jede das Mark alterierende Einwirkung viel schneller geltend machen kann als im übrigen Verlauf. Auch an den mit Osmiumsäure behandelten Fasern treten schon in geringer Tiefe des Nerven die Einkerbungen auf und liefern Bilder (Fig. I. b.), die fast allgemein als normale ausgegeben werden. In noch grösserer Tiefe haben sich die einander zugekehrten Endflächen der Segmente noch weiter von einander entfernt. Da bei diesem Vorgang die Zwischenmarkscheiden ihre ursprüngliche Lage annähernd beibehalten, lassen sie sich nun meist deutlich als selbständige Lamellen erkennen, die continuierlich einerseits an das äussere, andererseits an das innere Neurilemm sich anschliessen (Fig. I. c.). Damit scheint mir aber ihre Existenz vollkommen bewiesen zu sein.

Die häufig zu beobachtenden cirkulären Streifen zwischen den Enden benachbarter Segmente sind mit Pertik als das Resultat einer fibrillären Aufspaltung des Markes anzusehen.

Von sonstigen Angaben, die sich in der Literatur über die Lantermann'schen Segmente finden, ist zunächst diejenige Ranvier's [1]) zu erwähnen, der sich die Segmente durch Schichten von Protoplasma getrennt denkt, das nach seiner Anschauung in dünner Lage jedes interannuläre Marksegment rings umgibt. Diese Vorstellung, die sich wesentlich auf den von Ranvier durchgeführten Vergleich des interannulären Scheidensegments mit einer Fettzelle stützt, muss, obgleich bestimmte Beweise für dieselbe nicht beigebracht werden können, doch von vornherein als die am meisten wahrscheinliche bezeichnet werden. Man hätte sich demnach unmittelbar unter dem Neurilemm, und von diesem optisch nicht zu trennen, eine äusserst feine Lage von Protoplasma zu denken, welches, die Form des Neurilemms wiederholend, aus einem äusseren und inneren Blatt besteht, die durch trichterförmig durch die Markscheide ausgespannte Lamellen mit einander in Verbindung stehen. Eine abweichende Anschauung vertritt Koch [2]), indem er auf Grund einer mit Chloroform

1) Ranvier, Leçons etc.

2) L. Gerlach, Zur Kenntnis der markhaltigen Nervenfaser. Tageblatt der 51. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Cassel 1878, und: Koch, Ueber die Marksegmente der doppelcontourierten Nervenfasern und deren Kittsubstanz. Inaug.-Diss. Erlangen 1879.

combinierten Silberbehandlung die Lantermann'schen Segmente durch eine Kittsubstanz getrennt sein lässt. Dass sich an der frischen Faser eine Kittsubstanz nicht nachweisen lässt, habe ich oben bereits erwähnt; wie aber jene Niederschläge aufzufassen sind, die durch Combination der Silberlösung mit anderen Reagentien hervorgerufen werden, das werde ich unten bei Besprechung der Silberbilder näher erörtern. Es wird sich dabei zeigen, dass die Koch'schen Silberlinien eher für als gegen die Existenz einer membranösen Zwischenmarkscheide sprechen.

Endlich ist hier noch die Angabe Rumpf's [1]) zu betrachten, der die Zwischenmarkscheiden als geschlossene Membranen in Abrede stellt. Nach ihm werden dieselben durch Hornbälkchen vorgetäuscht, die in schräger Richtung zwischen den beiden „Hornscheiden" ausgespannt sind. Der Zerfall des Markes in die Lantermann'schen Segmente aber soll dadurch bedingt sein, dass das Mark durch die Wirkung der Reagentien schrumpfe und nun an diesen Stellen der geringsten Cohaesion auseinanderweiche. Abgesehen von der Unwahrscheinlichkeit, dass so regelmässige Gebilde wie die Lantermann'schen Segmente durch Schrumpfung entstanden sein könnten, ist hervorzuheben, dass die Präparate, auf die Rumpf seine Anschauung stützt, nämlich Fasern, aus denen das Mark ausgeflossen ist, für diese Verhältnisse nicht massgebend sein können. An diesen Fasern sind eben die dünnen Membranen, deren Resistenz man sich beliebig gering denken kann, von dem Markstrom einfach zerrissen worden und ihre Ueberreste können nun leicht den Eindruck eines Bälkchenwerks hervorrufen, wie es Rumpf beschreibt. Dass Rumpf nicht zu dieser einfachen Erklärungsweise geführt wurde, lässt sich aus seinen theoretischen Anschauungen verstehen. Eine geschlossene Zwischenmarkscheide wäre für ihn eine „Hornscheide", die von dem Markstrom nicht passiert werden könnte. Wie wenig stichhaltig eine solche Deduktion ist, wird sich unten zeigen.

Als Thatsachen, die der Rumpf'schen Darstellung direkt widersprechen, habe ich zu erwähnen: 1) dass ich in allen Fällen, in denen ich an den Längsschnitten die Zwischenmarkscheide auf der einen Seite fand, sie auch auf andern constatieren konnte, und dass die rot gefärbte

1) Rumpf, Zur Histologie der Nervenfaser und des Achsencylinders. Unters. aus dem phys. Inst. d. Univ. Heidelberg. II. 2.

Linie, als welche dieselbe an den Längsschnitten erscheint, stets vom äussern Blatt des Neurilemms zum innern continuierlich verfolgt werden kann, 2) dass an Nervenfasern, aus denen das Mark ausfliesst, das Ausströmen sich, wie bereits Pertik richtig erkannte, zunächst auf das durchschnittene Lantermann'sche Segment beschränkt, während das zweite erst langsam seine schräge Endfläche gegen das Schnittende hervorwölbt und dann plötzlich sich dem Strom des vorhergehenden anschliesst. Beide Thatsachen sind nur dann verständlich, wenn die Segmente durch geschlossene Lamellen von einander geschieden sind.

Wir kommen nun in unseren Betrachtungen zu der Frage, ob die Markscheide ausser dem beschriebenen Aufbau aus einzelnen Segmenten noch feinere Strukturverhältnisse erkennen lässt, d. h. ob der kleinste natürlich abgegrenzte Markabschnitt, den wir bisher kennen gelernt haben, nämlich das Lantermann'sche Segment, abermals aus einzelnen, sei es gleichartigen oder verschiedenartigen Elementen sich zusammensetzt. Prüfen wir in Bezug auf diese Frage die Längsschnitte und zwar jene Bilder, wo wir eine direkte Einwirkung der Osmiumsäurelösung in voller Concentration auf die lebende Faser voraussetzen dürfen, so erscheint an den dünnsten Schnitten bei bester Beleuchtung und bei Anwendung der stärksten Vergrösserung das Mark als eine ganz homogene graublau gefärbte Substanz, in der sich von den beschriebenen Strukturen nicht das Geringste erkennen lässt.

Da nun durchaus kein Grund dafür vorliegt, dass Struktureigentümlichkeiten der lebenden Faser durch die beschriebene Behandlungsweise zerstört worden seien oder dass dieselben an solch dünnen Schnitten sich der Beobachtung entziehen könnten, so stehe ich nicht an, das Nervenmark innerhalb jener Dimensionen, die unserem Auge zugänglich sind, für eine vollkommen homogene Substanz, alle darin beschriebenen Strukturverhältnisse aber als Kunstprodukte zu erklären.

Hinsichtlich der Frage, wodurch dieselben hervorgerufen werden, muss ich vor allem auf die schon einige Male citierte Arbeit Pertik's verweisen, der hier den Nachweis führt, dass die von Mauthner [1]),

1) Mauthner, Beiträge zur Kenntnis d. morph. Elemente d. Nervensystems. Sitzungsber. der Ak. d. Wiss. Wien, Bd. XXXIX. Es handelt sich hier um die zuerst von M. gemachte Beobachtung, dass die Markscheide an Chromsäurepräparaten eine concentrische Schichtung zeigt.

Lantermann [1]) und Golgi [2]) als normal beschriebenen Markstrukturen sämmtlich nur Modificationen der bei der Verflüssigung des Markes auftretenden Myelinformationen sind, in ihren specifischen Eigentümlichkeiten bedingt durch die Verschiedenheit der Reagentien oder die verschiedene Art ihrer Anwendung. Wie schon oben bemerkt, kann ich die Angaben dieses Autors, soweit meine Erfahrungen über diesen Gegenstand reichen, bestätigen und bin nur in dem einen Punkt abweichender Ansicht, dass ich nicht das angewandte Fixationsmittel als solches für die Ursache der Myelinbildung halte, sondern die damit concurrierende Wasserwirkung, während das erstere meiner Meinung nach nur als formgebender Faktor in Betracht kommt.

Nicht in Zusammenhang mit der Myelinbildung lässt sich dagegen das von Ewald und Kühne [3]) am Marke beschriebene Scheidensystem bringen, das aus zwei die Aussen- und Innenfläche des Markrohrs bekleidenden Membranen, den beiden „Hornscheiden", und einem zwischen denselben ausgespannten, in das Mark eingelagerten Balkenwerk, der „Hornspongiosa" bestehen soll. Die Substanz dieser Scheiden und Stützen des Markes ist wie Hornsubstanzen in Trypsin unverdaulich und wurde deshalb mit dem Namen „Neurokeratin" belegt.

Für die Praeexistenz der genannten Gebilde sprach sich später hauptsächlich Rumpf [4]) aus, gegen dieselbe erklärten sich L. Gerlach [5]), Hesse [6]), Pertik [7]) und Waldstein-Weber [8]), und zwar zum Teil mit so schlagenden Gründen, dass die Ewald-Kühne'sche Lehre dagegen nicht mehr haltbar erscheint.

Die Experimente der genannten Autoren beziehen sich fast ausschliesslich auf das dem Marke eingelagerte Horngerüst. Als Hauptargumente,

---

1, 2) l. c.

3) Ewald und Kühne, Ueber einen neuen Bestandteil des Nervensystems. Verhandlungen des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. I. H. 5.

4) Rumpf, l. c.

5) L. Gerlach, l. c.

6) Hesse, Zur Kenntnis der peripher. markhaltigen Nervenfaser, Arch. für Anat. und Phys. 1879.

7) Pertik. l. c.

8) Waldstein et Weber, Etudes histochimiques sur les tubes nerveux à myéline. Laboratoire d'Histologie du Collège de France 1882.

die gegen die Praeexistenz dieses Balkenwerks beigebracht wurden, sind anzuführen:

1) Das Horngerüst der Markscheide kann nur durch die Alkohol- (und Aether-) Extraktion hervorgerufen werden (Gerlach, Hesse, bestimmt erst von Pertik aufgestellt). Die Angabe Rumpf's, dass dasselbe auch durch Behandlung mit Wasser demonstriert werden könne, bezieht sich auf Myelinformationen, die nach Beendigung des Markstromes innerhalb der Schwann'schen Scheide zurückbleiben (Pertik). Behandelt man solche Fasern nachträglich mit Alkohol, so zeigt sich keine Spur eines der Hornspongiosa vergleichbaren Gerüstes.

2) Die Form des Horngerüstes lässt sich je nach der Anwendungsweise des Alkohols in beliebiger Weise modificieren (Gerlach).

3) Die Hornspongiosa kann auch an ausgeflossenem Nervenmark dargestellt werden (Hesse).

Nach diesen Thatsachen, die ich auf Grund meiner eigenen Untersuchungen vollkommen bestätigen kann und von denen jede für sich allein schon die Existenz eines praeformierten Horngerüstes zu widerlegen im Stande ist, muss die Lehre von Ewald und Kühne dahin modificiert werden, dass sich in inniger Mischung mit dem Nervenmark Substanzen in der Markscheide vorfinden, die durch Entfernung des Fettes mittelst Alkohol und Aether unter der Form eines spongiösen Gerüstes zurückbleiben und zum Teil (Rumpf) in Trypsin nicht verdaut werden können.

Es ist klar, dass nach dem Gesagten auch die beiden Hornscheiden, wenigstens als Membranen des Neurokeratins, fallen müssen. Denn eine Substanz, die mit dem Marke gemengt ist, kann unmöglich die Fähigkeit besitzen, dasselbe als differente Membran zu umschliessen und am Ausfliessen zu verhindern. Die Hornscheiden könnten demnach nur in dem Sinne aufgefasst werden, dass die nicht Fett-artigen Substanzen der Markscheide (Eiweisskörper und Neurokeratin) an der Oberfläche über das Nervenmark stark prävalieren und hier eine dünne Rindenschicht darstellen, — eine Annahme, die nicht unmöglich erscheint, obgleich Beweise für dieselbe bis jetzt nicht vorliegen.

Dass, vom Neurilemm vor der Hand abgesehen, unverdauliche ge-

schlossene Membranen weder an der Innen- noch an der Aussenfläche der Markscheide vorhanden sind, lässt sich durch die Verdauung mit Trypin leicht zeigen. Sobald die Schwann'sche Scheide zerstört ist, tritt das Mark unter Bildung von Myelinfiguren überall seitlich aus, (was bereits Pertik richtig beschreibt und in den Anfangsstadien abbildet,) und unterwirft man solche Fasern nun der Alkoholextraktion, so bleibt nur ein ganz unregelmässig knorriges Bälkchenwerk zurück ohne die geringste Spur einer äusseren oder inneren Scheide; dieser Rückstand der Nervenfaser ist so brüchig, dass er bei der geringsten Berührung zerfällt. Ob Beziehungen zwischen den Bruchstücken und den Lantermann'schen Segmenten vorhanden sind, wie Waldstein und Weber vermuten, konnte ich nicht entscheiden. Man könnte glauben, dass nach der oben dargestellten vollständigen Abgrenzung dieser Segmente im Leben auch das Horngerüst in entsprechender Weise unterbrochen sein müsste. Da jedoch durch die Verdauung die Zwischenmarkscheide zerstört wird und die Marksegmente nun ungehindert in Berührung kommen können, ist es wahrscheinlicher, dass das Horngerüst ein continuierliches ist.

Die Frage nun, wie Ewald und Kühne denn zu der Annahme geschlossener Hornscheiden geführt worden sind, dürfte in folgender Weise zu beantworten sein. Zunächst ist zu erwähnen, dass die Existenz der Hornscheiden ursprünglich nicht durch anatomische Darstellung nachgewiesen wurde, ja, dass für die äussere Hornscheide ein solcher Nachweis überhaupt nie geführt worden ist, sondern dass sie indirekt aus Thatsachen, die verschiedener Erklärung fähig sind, erschlossen wurde. Ewald und Kühne geben an, dass durch Behandlung mit Trypsin die Schwann'sche Scheide und der Achsencylinder verdaut werden, dass aber gleichwohl das Nervenmark nicht ausfliesst, weil es noch von einer zweiten, unverdaulichen Scheide umhüllt wird. Da nun, wie wir im Gegensatz zu dieser Behauptung gesehen haben, nach Verdauung der Schwann'schen Scheide das Mark überall seitlich austritt, so folgt daraus, dass, wie bereits Pertik annimmt, bei den Versuchen der genannten Autoren die Schwann'sche Scheide thatsächlich nicht verdaut war. Die Resistenz dieser Membran gegen das Trypsin ist nämlich durchaus nicht unbeträchtlich, ausserdem aber nach den einzelnen Tiergruppen sehr verschieden. So war die Schwann'sche Scheide der Froschnervenfasern in der Trypsin-

lösung, mit der ich arbeitete[1]), nach zwölfstündiger Einwirkung bei einer Temperatur von 40° an den meisten Fasern noch vorhanden. Waldstein und Weber fanden dieselbe an den Fasern des Kaninchens überhaupt unverdaulich, und das Gleiche kann ich von denen des Hechts mittheilen, wo die ansserordentlich dicke Schwann'sche Scheide nach 48stündiger Einwirkung gänzlich unverändert erscheint, während von den Substanzen der Markscheide nach darauffolgender Alkoholbehandlung nur hie und da noch ein krümeliger Rest aufzufinden ist.

Die Membran also, die bei den Experimenten von Ewald und Kühne das Ausfliessen des Markes verhinderte, war sicherlich keine andere, als die unverdaute Schwann'sche Scheide, das äussere Neurilemm. Da ferner von den Vertretern der Hornscheiden selbst, von Rumpf und Kühne-Steiner[2]), die innere Hornscheide der Achsencylinderscheide Kuhnt's gleichgestellt wird, diese aber, wie ich oben schon hervorgehoben habe, mit dem inneren Neurilemm identisch ist, so glaube ich den Satz vertreten zu können: Die beiden Hornscheiden sind nichts anderes als das äussere und innere Neurilemm. Rumpf hat zwar versucht, an Fasern, die durch Einwirkung des Wassers ihr Mark verloren hatten, neben der Schwann'schen Scheide eine äussere Hornscheide nachzuweisen; aber seine eigene Darstellung lässt erkennen, dass es sich hierbei nur um Myelinreste handelt, die nach der Wasserbehandlung sehr häufig in dünner Schicht an der Schwann'schen Scheide zurückbleiben.

Wir haben im Vorstehenden die Nervenfaserscheide nach ihren einzelnen Bestandteilen betrachtet; bevor wir uns zum Achsencylinder wenden, ist es notwendig, dieselbe mit einigen Worten in ihrer Gesammtheit zu besprechen, d. h. nach ihrer Form und der Form des von ihr umschlossenen Hohlraumes. Die drei Hauptbestandteile der Scheide: das äussere Neurilemm, die Markscheide und das innere Neurilemm, sind, wie wir gesehen haben, in der Weise zu einzelnen Abschnitten vereint, dass je ein Segment des äusseren Neurilemms mit einem entsprechenden des inneren zu einer vollkommen geschlossenen Membran zusammentritt,

---

1) Ich erhielt dieselbe (Glycerin-Auszug des Pankreas) aus dem Laboratorium des Herrn Prof. v. Voit, dem ich hiefür an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

2) Kühne und Steiner, l. c.

welche eine gleich lange Portion der Markscheide in sich birgt. Jedes solche Segment besitzt annähernd die Form eines Hohlcylinders mit constant gleichweitem Lumen; nur an beiden Enden wird dieser Hohlcylinder plötzlich stark verschmälert, und indem sich hier mit in gleicher Weise modificierten Enden die benachbarten Segmente anschliessen, entstehen die Ranvier'schen Einschnürungen, die in ihrer äusseren Gestaltung genugsam bekannt sind. Dagegen liegen über die Art, wie der Achsenraum durch die Einschnürungen beeinflusst wird, bestimmte Angaben nicht vor. Die Längsschnitte (Fig. II.) geben hierüber folgenden Aufschluss: Das innere Neurilemm bewahrt auch in der Schnürstelle annähernd seinen durch die Dicke der Markscheide bedingten Abstand von der Schwann'schen Scheide und wiederholt so gewissermassen die äussere Form der Einschnürung. Der Achsenraum wird dadurch von beiden Seiten her ziemlich rasch beträchtlich verengt, so dass sein Durchmesser an der engsten Stelle nur etwa noch die Hälfte oder den dritten Teil von dem des übrigen Rohres beträgt. Diese am stärksten verengte Stelle nun beschränkt sich nicht, wie dies an der Schwann'schen Scheide zumeist der Fall ist, auf einen schmalen Ring, sondern erstreckt sich noch zu beiden Seiten des Schnürrings auf ein nicht unbeträchtliches Stück, so dass hier der Achsenraum sich abermals, wenn auch nur auf kurze Strecke, als ein Cylinder darstellt. (Fig. II.) Da uns gerade dieser Raum bei den weiteren Betrachtungen noch mehrfach begegnen wird, werde ich denselben, zur Vermeidung von Umschreibungen, fortan kurzweg als „Enge des Achsenraumes" bezeichnen. Nicht selten ist dieser Raum gerade in der Ebene des Schnürrings wieder etwas erweitert und nähert sich so der Form zweier mit ihren breiten Grundflächen an einander gestellter Kegelstümpfe, ein Verhältnis, das uns bei Besprechung der Silberbilder näher beschäftigen wird. Eine weitere Complikation ist an der Schnürstelle nicht zu erkennen.

Was ich über den Achsencylinder mitzuteilen habe, knüpft zunächst an die zuletzt besprochenen Verhältnisse an. Bekanntlich bestehen gerade über diesen wesentlichsten Teil der Nervenfasern zwischen den einzelnen Autoren die grössten Differenzen, sowohl was seine Struktur betrifft, als auch hinsichtlich seiner Form und Dimensionen, — Differenzen, die sich

eben daraus erklären, dass der Achsencylinder an der lebenden Faser sich der Beobachtung entzieht, durch Einwirkung von Reagentien aber in der verschiedensten Weise verändert wird. Gewiss darf man auch in Bezug auf den Achsencylinder die Osmiumsäure als das sicherste Fixationsmittel ansehen, so dass die in neuester Zeit von Kupffer [1]) und Maley [2]) auf die Wirkung dieser Säure gegründete Darstellung desselben in erster Linie als massgebend zu betrachten ist. Dieselbe lässt sich kurz dahin zusammenfassen, dass der Achsencylinder aus feinsten Fibrillen besteht, die in gleichmässiger Verteilung und in beträchtlichen Abständen von einander den ganzen Achsenraum erfüllen; als interfibrilläre Substanz ist wahrscheinlich eine seröse Flüssigkeit anzunehmen, in der die Nervenfibrillen gleichsam flottieren [3]). Ich kann diese Darstellung vollkommen bestätigen und insofern vervollständigen, als meine Längsschnittpräparate die Fibrillen noch bestimmter, continuierlicher und in viel regelmässiger parallelem Verlauf zu einander erkennen lassen, als dies in den Figuren, die den genannten Abhandlungen beigegeben sind, der Fall ist.

Eine weitere Ergänzung, die ich in Bezug auf die Nervenfibrillen geben kann, betrifft das Verhalten derselben in der Einschnürung. (Fig. II. und III.) Dasselbe lässt sich am einfachsten in der Weise auffassen, dass die Nervenfibrillen passiv der beschriebenen Verengerung des Achsenraumes folgen. Mit Beginn derselben fangen sie an, gegen einander zu convergieren und erscheinen im Bereich der „Enge“ derart zusammengepresst, dass der sonst beträchtliche interfibrilläre Raum nahezu auf Null reduziert wird. Da die verengte Partie des Achsenraums ziemlich schroff in die weite übergeht, ist das Auseinanderweichen der Fibrillen kein allmähliches, sondern ein ganz scharfes, vergleichbar etwa mit dem plötzlichen Divergieren der die Fassung verlassenden Borsten eines Pinsels. Dieses Verhalten, wie überhaupt die Anordnung der Nervenfibrillen, hat bereits Engelmann [4]) nach Silberpräparaten sehr richtig dargestellt.

1) Kupffer, l. c. — 2) Maley, l. c.

3) Eine hiemit im Wesentlichen ganz übereinstimmende Darstellung des Achsencylinders hat schon früher Engelmann (Ueber die Discontinuität d. Axencylinders und den fibrillären Bau der Nervenfasern. Pflüger's Arch. Bd. XXII. 1880) auf Grund von Silberpräparaten gegeben. Doch konnten diese Präparate nicht in gleichem Masse als beweisend gelten, wie die durch Quer- und Längsschnitte in Osmiumsäure gehärteter Fasern erzielten.

4) Engelmann, l. c.

Eine Unterbrechung, bez. Verlötung der Fibrillen in der Einschnürung, wie dies der genannte Forscher beschreibt, konnte ich dagegen niemals beobachten; stets liessen sich dieselben continuierlich durch die ganze Enge des Achsenraums hindurch verfolgen. Die Gründe, auf die Engelmann seine Anschauung stützt, nämlich eigentümliche Erscheinungen bei der Versilberung, werden bei Betrachtung der Silberbilder zur Sprache kommen; ebenso das von Ranvier in der Einschnürung am Achsencylinder beschriebene „renflement biconique", da dasselbe ebenfalls aus Silberpräparaten erschlossen wurde.

Eine Achsencylinderscheide konnte ich nirgends constatieren. Was bisher als solche beschrieben wurde, ist wohl nichts anderes als das innere Neurilemm. In einzelnen Fällen, so für die Achsencylinderscheide Kuhnt's lässt sich diese Identität mit vollster Sicherheit nachweisen. Dass das innere Neurilemm häufig mit dem Achsencylinder isoliert wird, rührt daher, dass die gebräuchlichsten Isolationsmittel (Salpetersäure, sehr verdünnte Chrom- und Osmiumsäure) die Markscheide unter Aufspaltung sehr stark (auf das Doppelte bis Dreifache ihrer Dicke) gegen den Achsenraum vordrängen, wodurch einerseits eine festere Verbindung zwischen dem inneren Neurilemm und dem nun zu einem soliden Stab zusammengepressten Achsencylinder zu Stande kommt, während andererseits der Zusammenhang der Markscheide bedeutend gelockert wird. Ein mechanischer Insult ist daher leichter im Stande, eine Trennung innerhalb der Markscheide, als eine solche zwischen innerem Neurilemm und „Achsencylinder" herbeizuführen. Es erklärt sich hieraus auch einfach die Thatsache, dass dieser sogenannten Achsencylinderscheide in den meisten Fällen noch Myelinreste, manchmal auch Fetzen der Zwischenmarkscheiden anhaften.

Ausdrücklich heben Kühne und Steiner hervor, dass ihre Achsencylinderscheide von der im Vorstehenden besprochenen verschieden sei. Als Methode zur Darstellung derselben geben sie direktes Zerzupfen frischer Nervenfasern in 0,1%iger Osmiumsäurelösung an. Dadurch soll der Achsencylinder colossal quellen, so dass er, wo er Platz hat, sich auszudehnen, also besonders an Rissstellen, das fünf- bis sechsfache Volumen stärkster markhaltiger Fasern erlangen könne. Dabei sei er von

einer ganz dünnen Membran umhüllt, die sich durch Zusatz von Kalilauge deutlich abhebe.

Ich habe diese Versuche wiederholt und auch Bilder erhalten, die wohl mit den von Kühne und Steiner beobachteten übereinstimmen; aber ich kann dieselben weder für die Quellung des Achsencylinders noch für die Existenz einer specifischen Achsencylinderscheide als beweisend betrachten. Durch die beschriebene Behandlung tritt an der Markscheide jene charakteristische Aufspaltung ein, die Pertik genau beschrieben und in seiner Fig. VI. sehr gut wiedergegeben hat: eine Folge der geringen Concentration der Säure, die neben der Wasserwirkung nur wenig zur Geltung kommen kann und überdies bei der geringen Menge, die bei direktem Zerzupfen Anwendung finden kann, bald aufgebraucht ist. Von wesentlicher Bedeutung nun bei dieser Veränderung der Markscheide ist ihr starkes Aufquellen; sie erreicht sehr rasch das Dreifache ihrer ursprünglichen Dicke und zwar, da die Schwann'sche Scheide sehr wenig nachgiebig ist, auf Kosten des Achsenraumes, der dadurch sehr erheblich verengt wird. Darauf nun scheint mir die von Kühne und Steiner behauptete Quellung des Achsencylinders zu beruhen. Die im Achsenraum enthaltene interfibrilläre Flüssigkeit muss durch den bedeutenden von der Markscheide ausgeübten Druck nach den Stellen des geringsten Widerstandes entweichen, und so wird sie zunächst aus den Schnittenden der Fasern hervordringen, was auch häufig zu beobachten ist, indem sie sich hier durch das vorher ausgetretene Myelin einen deutlich erkennbaren Weg bahnt, der übrigens, soweit meine Beobachtungen reichen, in seinen Dimensionen die des normalen Achsenraumes niemals übertrifft. Ein weiterer Ausweg muss ihr ferner an jenen Stellen geboten sein, wo die Scheiden zerrissen sind. Hier wird zunächst Myelin hervorgetrieben, dann aber sieht man häufig, wie vom Achsenraum ausgehend sich eine breite Bucht hervorwölbt, die von einer dünnen Schicht andersartiger Substanz begrenzt erscheint und, in ihren Dimensionen sehr variabel, nicht selten den Durchmesser starker Fasern mehrfach übertrifft. Auch diese Erscheinung erklärt sich, wie ich glaube, einfach als Folge des starken Druckes, der auf die im Achsenraum enthaltene Flüssigkeit ausgeübt wird. Würde es sich wirklich um eine Quellung des Achsencylinders handeln, so müsste sich doch wohl eine Andeutung

einer fibrillären Struktur an den genannten Ausbuchtungen erkennen lassen; allein dieselben zeigen von einer solchen keine Spur, sondern erscheinen vollkommen klar und homogen. Was nun die Scheide betrifft, die dieselben umhüllen soll, so erscheint es mir von vornherein im höchsten Grade unwahrscheinlich, dass eine Membran, die ohnedies so dünn sein muss, dass sie an Schnitten nicht wahrgenommen werden kann, die Fähigkeit besitzen soll, sich auf mindestens das Achtfache ihrer ursprünglichen Fläche auszudehnen. Dies aber müsste für die Begrenzungsschicht der beschriebenen Ausbuchtungen der Fall sein, falls in ihr eine Achsencylinderscheide zu erblicken wäre. In den Fällen jedoch, die mir zur Beobachtung kamen, war dies sicher nicht der Fall; die deutlich ausgeprägte und sehr verschieden dicke Grenzcontour war überhaupt nicht der Ausdruck einer Membran, sondern sie ergab sich stets als eine Schicht Myelin, das von der ausquellenden Flüssigkeit vorgedrängt und zu einer dünnen Begrenzungshaut ausgezogen worden war. Diese war stets continuierlich nicht in den Achsenraum, sondern in die Markscheide hinein zu verfolgen, bei Zusatz von Kalilauge aber wurde sie sofort zerstört, womit gleichzeitig die Abgrenzung der Ausbuchtung gegen die umgebende Flüssigkeit vollständig verschwand. Membranartige Anordnung des Myelins ist überhaupt nicht selten zu beobachten und kann leicht zu Täuschungen Veranlassung geben, wie wir bei Betrachtung der äusseren Hornscheide Rumpf's gesehen haben. Sollte aber auch in den von Kühne und Steiner beobachteten Fällen eine wirkliche Membran vorhanden gewesen sein, so müsste doch immerhin noch der Nachweis geführt werden, dass dieselbe nicht dass innere Neurilemm war, was sehr wohl denkbar wäre.

Vor der Hand also glaube ich behaupten zu können, dass für die Annahme einer specifischen Achsencylinderscheide zwingende Gründe nicht vorliegen.

b. Bestätigung der beschriebenen Anordnung des Neurilemms durch andere Methoden.

Nachdem ich an den Längsschnitten den Umschlag der Segmente des äusseren Neurilemms nach Innen und ihren Zusammenhang mit entsprechenden Abschnitten einer die Innenfläche der Markscheide bekleidenden

Membran erkannt hatte, musste ich mich fragen, einmal, ob dieses Verhalten mit allen sonstigen Beobachtungen in Einklang stehe, sodann aber, ob es nicht möglich sei, dasselbe auch auf andere Weise zur Anschauung zu bringen. Dass es sich an der lebenden und überhaupt an der intakten Faser für gewöhnlich der Beobachtung entzieht, kann nicht Wunder nehmen. Denn neben den ungünstigen Lichtbrechungsverhältnissen, welche einen Einblick ins Innere des Markrohres kaum gestatten, kommt noch der Umstand in Betracht, dass das innere Neurilemm im Allgemeinen der Markscheide dicht anliegt, an der Einschnürung aber, wo es sich, wie oben erwähnt, auf kurze Strecke von derselben abhebt, den hier zusammengepressten Nervenfibrillen so enge angeschmiegt ist, dass es als deren Begrenzung aufgefasst werden kann. Eine überzeugende Darstellung an der intakten Faser muss deshalb davon abhängen, ob es gelingt, bei möglichster Schonung der dünnen Membran, erstens die Fibrillen zu entfernen oder zum Schrumpfen zu bringen und zweitens das Mark auf weitere Strecken vom Umschlagsrand zurückzudrängen. Diese Forderung wird erfüllt durch eine Methode, welche, soviel mir bekannt, zuerst von Ranvier zum Studium der Einschnürung empfohlen wurde und die darin besteht, einen dünnen gut ausgespannten Nervenstamm zuerst vier und zwanzig Stunden in physiologische Kochsalzlösung zu bringen und dann erst in Osmiumsäure zu fixieren. Die Kochsalzlösung verändert die Elemente der Fasern in der Weise, dass sie das Mark auf kürzere oder längere Strecke, sei es durch Zurückdrängen oder Verflüssigung, von der Schnürstelle entfernt, während der Inhalt des Achsenraums an den meisten Fasern zu einem soliden Stab zusammenschrumpft. Untersucht man nun die Einschnürung derart modificierter Fasern in Wasser oder Glycerin mit starker Vergrösserung, so bekommt man nicht selten Bilder zu Gesicht, wie ich ein solches in Fig. IV. (Taf. I.) wiedergegeben habe.

Hier liegt das innere Neurilemm gleichsam isoliert vor und lässt nun, abgesehen von unvermeidlichen Formverschiebungen, das gleiche Verhalten erkennen, wie an den Längsschnitten, so dass eine weitere Erläuterung wohl überflüssig ist.

Während es demnach gelingt, auf so einfache Weise die beschriebene Anordnung des Neurilemms zu erkennen, und auch im Uebrigen alle an

den Einschnürungen zu beobachtenden Erscheinungen, so namentlich, wie wir unten sehen werden, die Silberbilder, damit in bester Uebereinstimmung stehen, scheint eine Thatsache sich durchaus nicht damit vereinigen zu lassen, nämlich das Durchtreten des Markes durch die Schnürstelle. Boll [1]) war der erste, der das durch die Einwirkung des Wassers verursachte Ausströmen des Markes aus dem Schnittende der Fasern genauer verfolgte und dabei die Beobachtung machte, dass sich dieser Markstrom nicht nur auf das durchschnittene interannuläre Segment beschränkt, sondern dass auch das Mark des folgenden Segments, nachdem es die Einschnürung passiert hat, sich dem Strom des durchschnittenen anschliesst. Ausser Ranvier haben alle späteren Beobachter (Rawitz [2]), Hesse [3]), Rumpf [4]), Pertik [5]) diese leicht zu constatierende Thatsache bestätigt und in mannichfacher Hinsicht erweitert, sowohl in Bezug auf die Substanzen, welche den Markstrom hervorrufen, als auch bezüglich des näheren Details, das sich dabei erkennen lässt. Besonders hat Pertik das Durchtreten des Markes durch die Schnürstelle eingehender beschrieben.

Es erscheint nun auf den ersten Blick unmöglich, dass bei der Abgrenzung zweier benachbarter interannulärer Marksegmente durch eine doppelte Membran, wie ich dies beschrieben habe, ein Durchtreten des Markes durch die Einschnürung statthaben könne, oder umgekehrt, da das letztere thatsächlich der Fall ist, dass meine Darstellung richtig sei. Und ich selbst wurde, obgleich meine Präparate eine andere Deutung kaum zuliessen, an derselben zweifelhaft. Als ich jedoch mit Rücksicht auf diesen Punkt den Markstrom studierte, fand ich, dass das Durchströmen des Markes unter Erscheinungen sich vollzieht, die mit dem beschriebenen Verhalten des Neurilemms sich vollkommen vereinigen lassen, ja sogar, wie ich glaube, nur aus demselben ihre Erklärung finden können.

Um diese Einzelheiten zu erkennen, ist es nötig, dass man mit starker Vergrösserung und bei guter Beleuchtung arbeite, sodann, dass man Einschnürungen beobachte, die durch die Wirkung des Wassers noch wenig verändert sind, wenn das Durchtreten des Markes beginnt.

Verfolgt man an solchen Schnürstellen den Markstrom, so lässt sich constatieren:

1, 2, 3, 4, 5) l. c.

1) dass das Mark des unverletzten Segments sich niemals in das Strombett des vorhergehenden ergiesst, sondern stets in dessen Achsenraum, wo sich seine Bahn noch auf lange Strecken isoliert verfolgen lässt (vielleicht ist Pertik's Achsen- und Wandstrom hierauf zu beziehen),

2) dass das Mark bei Beginn des Durchtretens sich zunächst ganz langsam und allmählich in den Achsenraum des Segments, in welchem die Strömung bereits stattfindet, ausbuchtet, bis es, bei einem gewissen Punkt angelangt, der an allen Fasern in ziemlich gleicher Entfernung vom Schnürring liegt, kurze Zeit zur Ruhe kommt, um dann ganz plötzlich, ohne dass man irgend einen Impuls hiefür wahrnehmen könnte, in äusserst rasches Strömen zu geraten, das sich nur ganz allmählich wieder verlangsamt.

Ich habe in Fig. V. (Taf. I.) von verschiedenen Fasern jenes Stadium, in dem das Mark sich unmerklich langsam durch den Schnürring hindurch zieht, in den Hauptumrissen skizziert. In c. ist nahezu der Moment erreicht, an dem plötzlich das rasche Strömen beginnt.

Würden nun die beiden Scheiden, welche das Mark umschliessen, continuierlich die Schnürstelle passieren und nur in der Ebene des Schnürrings einander bis zur Berührung genähert sein, — die einzige abweichende Deutung, welche die Längsschnitte, allerdings nicht ohne Zwang, gestatten könnten — so wäre zwar eine Anstauung des Markes vor dieser verengten Stelle denkbar, allein das Mark, welches dieselbe bereits überschritten hat, müsste ungehindert weiterfliessen; sodann aber könnte dasselbe nicht in den Achsenraum dringen, sondern es müsste sich notwendig in das Strombett des vorhergehenden Segments, also in den Raum zwischen den beiden Blättern des Neurilemms ergiessen. Da nun beides nicht der Fall ist, so erscheint diese Deutung nicht haltbar, und es kann nur noch die erste Darstellung, die ich von der Anordnung des Neurilemms gegeben habe, zulässig sein, umsomehr, als sich daraus die erwähnten beim Markstrom zu beobachtenden Thatsachen sehr einfach ableiten lassen.

Wenn das Mark aus einem verletzten Segmente ausströmt, so entsteht innerhalb desselben ein negativer Druck, der sich durch den Achsenraum hindurch auf die innere Fläche des folgenden Segmentes fortpflanzt. Das Mark dieses Segments, das infolge der Wasserwirkung das Bestreben hat,

sich auszudehnen, folgt diesem Zug und buchtet, soweit dies möglich ist, seine Umhüllungsmembran in der Richtung, von der der Zug kommt, aus, d. h. es drängt das innere Neurilemm durch die Schnürstelle hindurch in den Achsenraum des folgenden Segments hinein, wie ich dies nach den Bildern der Fig. V. auf dem schematischen Längsschnitt in Fig. VI. dargestellt habe. So wenigstens glaube ich mir diese Bilder und das anfangs langsame Vordringen des Markes erklären zu müssen. Der plötzlich auftretende rasche Strom aber erklärt sich dann einfach so, dass die dünne Membran, nachdem sie den höchsten Grad ihrer Ausdehnbarkeit erreicht hat, von dem Druck des Markes zerrissen wird: damit fällt das Hindernis für die Strömung weg und das Mark ergiesst sich nun unaufhaltsam durch die Schnürstelle hindurch, bis das gestörte Gleichgewicht wieder hergestellt ist.

Ich komme so zu dem Schluss, dass der Markstrom, wie er thatsächlich sich vollzieht, anstatt gegen die beschriebene Anordnung des Neurilemms zu sprechen, viel eher als Stütze für dieselbe betrachtet werden kann.

c. Ueber die Bedeutung der Ranvier'schen Einschnürung.

Schon in seiner ersten grundlegenden Arbeit über die Einschnürungen sprach Ranvier, hauptsächlich auf Grund der Versilberung und der Thatsache, dass zwischen je zwei Einschnürungen stets ein Kern sich findet, den Satz aus, dass dieselben als die Grenzen einzelner Zellen zu betrachten seien, aus denen sich die Fasern aufbauen; und auch alle späteren Autoren, die sich über diesen Punkt äusserten, kamen zu dem gleichen Resultat. Die weitere Frage dagegen, welche Bestandteile der Faser diesen Zellen zugerechnet werden müssen, wird von den einzelnen Forschern in verschiedener Weise beantwortet, und zwar finden sich die 3 Möglichkeiten, welche durch die 3 Hauptbestandteile der Faser (Schwann'sche Scheide, Markscheide und Achsencylinder) gegeben erscheinen, sämmtlich vertreten.

Ranvier selbst nahm die beiden Scheiden (Schwann'sche Scheide und Markscheide) zusammen als Zelle in Anspruch und vergleicht diese mit einer von einem anderen Körper (dem Achsencylinder) durchbohrten Fettzelle, wobei der interannuläre Kern mit seinem Protoplasma dem Kern

und Protoplasma der Fettzelle, die Schwann'sche Scheide der Zellmembran, das Nervenmark endlich dem Fett entspreche.

Allein Ranvier blieb mit dieser Auffassung ziemlich isoliert; viel mehr Anhänger fand die zweite mögliche Anschauung, wonach das interannuläre Segment der Schwann'schen Scheide allein eine Zelle (der Endothelzelle vergleichbar) repräsentiert, eine Ansicht, die, zuerst von Key und Retzius [1]) aufgestellt, wohl in alle Lehr- und Handbücher der Histiologie übergegangen ist.

Die dritte Möglichkeit endlich, dass das ganze interannuläre Segment der Faser (Schwann'sche Scheide, Markscheide und Achsencylinder) als eine Zelle zu betrachten sei, findet sich durch Engelmann [2]) vertreten.

Für die Entscheidung der Frage, welche von diesen drei Anschauungen die richtige sei, muss vor allem die Entwicklungsgeschichte der Nervenfasern in Betracht gezogen werden. Was wir hierüber, hauptsächlich durch die Untersuchungen von Hensen [3]) an den Schwänzen der Froschlarven und von Vignal [4]) an Säugetier-Embryonen, wissen, lässt sich in Kürze dahin zusammenfassen, dass die Nervenstämme, sei es nun, dass sie primär mit dem Endorgan in Verbindung stehen, oder dass sie erst aus dem Rückenmark dahin auswachsen, zunächst sich als eine gleichmässige Grundsubstanz mit eingelagerten Fibrillen darstellen, worin Kerne anfangs vollständig fehlen (Bidder und Kupffer [5]). Erst später grenzen sich in dieser Masse einzelne Bündel ab; aus dem umgebenden Gewebe wuchern Zellen zwischen dieselben hinein, legen sich in unregelmässigen Zwischenräumen an die einzelnen Bündel an, strecken sich stark in die Länge und beginnen nun dieselben zu umgreifen und rings zu umschliessen. Nachdem die Zellen eines solchen Fibrillenbündels soweit gewachsen sind, dass sie ein continuierliches Rohr um den „Achsencylinder" darstellen, tritt in äusserst dünner Schicht die Markscheide auf.

---

1) Key und Retzius, l. c.

2) Engelmann, Ueber Degeneration von Nervenfasern. Pflüger's Arch. 1876. Bd. XIII. und loco cit.

3) Hensen, Ueber die Entwickelung des Gewebes und der Nerven im Schwanze der Froschlarve. Virchow's Arch. Bd. XXXI.

4) Vignal, Mémoire sur le Développement des Tubes nerveux etc. Labor. d'Hist. du Coll. de France 1883.

5) Bidder und Kupffer, Untersuchungen über das Rückenmark. Leipzig. 1857.

Die Bedeutung dieser Thatsachen für die vorliegende Frage besteht wesentlich darin, dass sie die vollständige genetische Unabhängigkeit der eigentlich nervösen Substanz der Nervenfasern von den zelligen Umhüllungen derselben darthun. Damit aber muss notwendig die Engelmann-sche Anschauung über den Zellwert des interannulären Fasersegmentes fallen, und es kann sich nur noch um die Frage handeln, ob die Schwann-sche Scheide allein von den einscheidenden Zellen herstamme oder ob auch die Markscheide denselben zugerechnet werden müsse, bez. als Derivat derselben zu betrachten sei.

Ueber diesen Punkt jedoch vermögen uns die entwicklungsgeschichtlichen Befunde einen Aufschluss nicht zu gewähren; denn bei der Feinheit des embryonalen Nervengewebes und bei der Schwierigkeit der Untersuchung ist es unmöglich zu entscheiden, ob die Markscheide in den genannten Zellen oder unterhalb derselben (zwischen ihnen und dem Achsencylinder) sich anlege, wobei für den letzteren Fall noch die beiden Möglichkeiten offen zu halten wären, dass das Mark entweder als Derivat dieser Zellen gebildet werde, oder dass es vom Achsencylinder aus seine Entstehung nehme. Vignal, der diese Verhältnisse am genauesten studiert hat, glaubt zwar, das Mark entstehe zwischen den einscheidenden Zellen und dem Achsencylinder, ja er neigt sogar der Ansicht zu, dass die homogene Grundsubstanz, in die er die Fibrillen eingebettet fand, an der Bildung desselben beteiligt sei; allein Gründe für diese Angaben vermag er nicht beizubringen.

Hier nun ist die ausgebildete Faser im Stande, die Entscheidung zu geben. Nachdem es sich gezeigt hat, dass das interannuläre Segment der Schwann'schen Scheide nur das äussere Blatt einer völlig geschlossenen Membran darstellt, die neben Kern und Protoplasmarest ein Segment der Markscheide in sich schliesst, kann es, im Zusammenhalte mit den entwicklungsgeschichtlichen Thatsachen keinem Zweifel unterliegen, dass wir in jeder solchen Portion eine jener embroyonalen Zellen in metamorphosiertem Zustand vor uns haben. Die Entwicklungsgeschichte lässt sich daraus in der Weise ergänzen, dass die indifferente röhrenförmige Zelle bei ihrem weiteren Wachstum sich rings mit einer Membran umgibt, deren äusseres Blatt zur Schwann'schen Scheide oder dem äusseren Neurilemm, deren inneres Blatt zum inneren Neurilemm wird, während

das Protoplasma sich zum grössten Teil in Nervenmark umwandelt oder durch diese Substanz ersetzt wird.

Betrachtet man die Nervenfaserscheiden von diesem Gesichtspunkt aus, so besitzt im Grunde genommen jede Faser nur eine einzige Scheide, bestehend aus aneinandergereihten modificierten Zellen, für die ich die Bezeichnung „Scheidenzellen“ vorschlagen möchte.

Wir sehen im Vorstehenden die scharfsinnige Hypothese Ranvier's im Wesentlichen bestätigt; und wenn seine Lehre einer Modification bedarf, so ist es nur in dem einen Punkt, als die Scheidenzelle dadurch, dass sie auch gegen den Achsenraum durch eine Membran abgegrenzt ist, nicht mehr als „durchbohrte“ Zelle, sondern als „röhrenförmige“ Zelle sich darstellt.

Mann könnte der Ansicht sein, dass sich die Entstehungsweise dieser röhrenförmigen Zelle durch eine Längsnaht an derselben dokumentieren müsse. Allein nach dem, was ich der Beschreibung Vignal's entnehme, haben wir es bei der Einscheidung der Nervenfibrillenbündel mit äusserst weichen, membranlosen, amöboiden Zellen zu thun, deren Ränder, nachdem sie das Bündel umgriffen haben, wohl ebenso spurlos mit einander verschmelzen werden, wie die Amöbe einen Fremdkörper rings umfliesst und in ihr Inneres aufnimmt. In Uebereinstimmung mit dieser Betrachtung kann ich mit aller Bestimmtheit angeben, dass sich an der ausgebildeten Faser keine Spur einer solchen Naht nachweisen lässt, indem auf dünnsten Querschnitten die drei Scheidenbestandteile als vollkommen geschlossene Ringe erscheinen, während die sonst so empfindlichen Silberreaktionen in diesem Falle vollständig versagen.

Nach dem Vorstehenden ergibt sich die Einschnürung als die Stelle, wo zwei benachbarte Scheidenzellen mit ihren verengten Enden an einander stossen, der Schnürring aber ist der Ausdruck der Contaktfläche zwischen beiden: er ist ein intercellulärer Spaltraum. Damit haben wir die morphologische Bedeutung der Schnürstelle charakterisiert; allein seit Ranvier wird derselben auch eine physiologische Funktion zugeschrieben und gerade diese wird allgemein in den Vordergrund der Betrachtung gestellt.

Ranvier machte die Beobachtung, dass Salzlösungen (Silbernitrat, carminsaures Ammoniak) die Markscheide nicht zu durchdringen vermögen, sondern dass dieselben an der unverletzten Faser nur durch die

Einschnürung in den Achsenraum gelangen können. Diese Thatsache gibt sich sehr deutlich darin zu erkennen, dass die Einwirkung der genannten Substanzen auf den Inhalt des Achsenraumes zunächst nur in der Gegend des Schnürrings sich geltend macht und von hier aus erst nach beiden Seiten hin allmählich fortschreitet. Ranvier zog daraus den Schluss, dass in dem Wege, der hier den Salzlösungen vorgezeichnet erscheint, zugleich der Weg gegeben sei, auf dem an der lebenden Faser Nährflüssigkeit und Zersetzungsprodukte ein- und austreten, und er erklärte demgemäss die Einschnürung für eine Einrichtung, die der Ernährung des Achsencylinders diene. Diese Anschauung wurde allgemein angenommen. Nur Rumpf[1]) betonte mit Recht, dass die angeführten Thatsachen durchaus nicht als beweisend betrachtet werden können. Denn einerseits beziehen sich die erwähnten Versuche nicht auf die lebende, sondern auf die abgestorbene Faser und andererseits folgt aus der Möglichkeit, dass Ernährungsplasma durch die Einschnürungen eintrete, nicht notwendig, dass der Achsencylinder im Stande ist, dasselbe aufzunehmen. Rumpf suchte direkt das Gegenteil zu beweisen und führt zu diesem Zweck die Thatsache an, dass an doppelt durchschnittenen Nerven die Achsencylinder nach wenigen Tagen vollständig verschwunden sind, woraus nach seiner Meinung folgt, dass der Achsencylinder nur von seinem Central- und Endorgan aus ernährt werden könne. Allein dieses Experiment ist gewiss ebenso wenig im Stande, die Ranvier'sche Anschauung zu widerlegen, als die Art des Eindringens der Salzlösung als ausreichender Beweis für dieselbe gelten kann. Denn wenn der von seinem Central- und Endorgan getrennte Achsencylinder zu Grunde geht, so folgt daraus nur, dass er keine selbständige Existenz führt, aber nicht, dass er seine Nahrung von diesen Punkten aus beziehen müsse.

Viel schwerer wiegend scheint mir die Thatsache zu sein, dass die Einschnürungen und damit die Markunterbrechungen im Rückenmark vollständig fehlen. Wären dieselben für die Ernährung des Achsencylinders notwendig, so müssten sie wohl auch hier sich finden; denn es ist durchaus kein Grund zu der Annahme vorhanden, dass die Ernährungsverhältnisse im Rückenmark andere sein sollten als in den peripheren Nerven.

1) Rumpf, l. c.

Wenn dies aber auch der Fall wäre und wenn sich ferner die Richtigkeit der Ranvier'schen Lehre erweisen lassen sollte, so bleibt damit doch die Einschnürung als solche vollständig unerklärt. Warum besitzen die Scheidenzellen nicht rein cylindrische Form, sondern verjüngen sich an beiden Enden, warum ist der Achsenraum hier verengt, weshalb die Nervenfibrillen dicht an einander gepresst? Weder die Abgrenzung der Scheide in einzelne Zellen, noch die Markunterbrechung, falls sie wesentlich und nicht bloss die Folge der morphologischen Anordnung sein sollte, vermögen dieses Verhalten zu erklären, weshalb demselben eine specifische Bedeutung zugesprochen werden muss.

Welcher Art diese sei, das freilich wird sich kaum mit Sicherheit feststellen lassen. Der einzige Weg, der meiner Ansicht nach uns hier dem Ziele näher bringen kann, ist der der Vergleichung. Nachdem wir wissen, dass die Einschnürungen nur den peripheren Nervenfasern zukommen, an denen der Centralorgane dagegen fehlen, wird die Frage nach der Funktion dieser Bildungen mit der weiteren Frage zusammenfallen, inwiefern die peripheren Fasern anderen Bedingungen unterworfen sind als die centralen. Denn dieser Unterschied allein kann der Grund sein, warum ein und dieselbe Faser in dem einen Teil ihres Verlaufs Eigentümlichkeiten zeigt, die ihr im übrigen Teile fehlen. Die Richtigkeit einer solchen Schlussfolgerung lässt sich durch den Hinweis auf das Vorkommen der Schwann'schen Scheide klar stellen. Dass diese Membran, (wenigstens nachweisbar), ausschliesslich peripheren Fasern zukommt, wird wohl ohne Zweifel daraus zu erklären sein, dass diese Fasern mechanischen Störungen (gegenseitigen Lageverschiebungen, Zerrungen und starken Biegungen) in viel höherem Maasse ausgesetzt sind als jene der geschützten, nur innerhalb sehr enger Grenzen verschiebbaren Centralorgane. Da nun diese Unterschiede in den Existenzbedingungen der beiden Faserarten die einzigen sind, die sich mit Bestimmtheit behaupten lassen, so glaube ich, dass auch die Einschnürungen darauf zurückgeführt werden müssen. Ihre Bedeutung läge demnach, wie die der Schwann'schen Scheide, darin, die störenden Einwirkungen mechanischer Insulte unschädlich zu machen, und es wird sich nicht leugnen lassen, dass die Anordnung der Schnürstellen diese Anschauung unterstützt. Die Nervenfibrillen, die im übrigen Teil des Achsenraumes frei flottieren, erhalten hier, dadurch, dass sie

enge zusammengepresst werden, eine sichere Führung; ausserdem aber machen die Einschnürungen die Faser zu einer Kette kurzer Glieder, die gleichsam durch Gelenke mit einander verbunden sind, so dass starke Biegungen, die an einem Rohr notwendig Knickungen hervorrufen müssten, an diesen gelenkigen Verbindungen ohne Schädigung sich vollziehen können.

d. Die Silberbilder.

Es geschieht nicht ohne Grund, dass ich die Besprechung der an den Nervenfasern auftretenden Silberniederschläge an das Ende dieses Capitels stelle.

Während nämlich die bisherigen Beobachter, die sich mit diesem Gegenstand beschäftigten, zumeist darauf ausgingen, an der Hand der Versilberungsmethoden Strukturen der Fasern zu erkennen, soll hier der umgekehrte Weg eingeschlagen werden: es soll der Versuch gemacht werden, die Silberbilder aus dem Bau der Faser, wie er im Vorstehenden geschildert worden ist, abzuleiten. Weiterhin aber war es mein Bestreben, die mannichfaltigen Erscheinungen, die durch das genannte Reagens hervorgerufen werden, nicht nur nach der Oertlichkeit ihres Auftretens zu erkennen, sondern auch, die Bedingungen festzustellen, denen sie ihre Entstehung verdanken.

Ich kam so zu dem Resultat, dass, (abgesehen von Färbungen, wie der rostbraunen Tinktion der Nervenfibrillen) dreierlei Arten des Silberniederschlags unterschieden werden müssen, die sich nach der Oertlichkeit folgendermassen gruppieren:

1. Niederschläge, die in engen Spalträumen entstehen
   a) zwischen benachbarten Scheidenzellen,
   b) zwischen Scheidenzellen und Nervenfibrillen,
   c) zwischen den Nervenfibrillen selbst;
2. Niederschläge, die in regelmässiger Schichtung den ganzen freien Achsenraum einnehmen (Frommann'sche Linien);
3. Niederschläge, die an die Oberfläche der Markscheide gebunden erscheinen und meist nur bei besonderer Behandlungsweise hervortreten.

Ehe ich auf die unter 1. angeführten Bilder näher eingehe, deren Bedingungen die gleichen sind wie für die sog. „Kittlinien", muss ich

der Deutung, welche diese Art des Silberniederschlags fast allgemein erfährt, einige Worte widmen.

Als Recklinghausen die Beobachtung machte, dass bei Einwirkung stark verdünnter Silbernitratlösung auf frische epitheliale Häute ein Maschenwerk schwarzer Linien auftritt, das die Grenzen der einzelnen Zellen gegen einander bezeichnet, erklärte er diese Erscheinung so, dass hier in dünner Schicht eine specifische Kittsubstanz abgelagert sei, welche auf das Silber eine ganz besondere Anziehungskraft ausübe. In der lebhaften Discussion, die sich an diese Frage anschloss, wurden zwar von verschiedenen Seiten (Auerbach, Schweigger-Seidel [1]), Robinski [2]) Bedenken gegen diese Anschauung laut; allein dieselben fanden, wohl hauptsächlich, weil die Erklärungen, die an die Stelle der obigen gesetzt wurden, gleichfalls nicht einwurfsfrei waren, keine Beachtung, und heutzutage spricht man von der Kittsubstanz als von etwas vollständig Erwiesenem, ja Selbstverständlichem. Dabei wird die Annahme dieses Substanz nicht auf die intercellularen Spalten beschränkt, sondern auch da, wo anderwärts Silberniederschläge sich zeigen, wird die Kittsubstanz als bedingendes Moment herbeigezogen (Engelmann [3]), Verkittung der Achsencylindersegmente). Ja, selbst da, wo die Niederschläge nicht mehr einfach durch direkte Einwirkung der Silberlösung auf frisches Gewebe entstehen, sondern wo sie erst durch eine modificierte Behandlungsweise hervorgebracht werden können, werden sie als Reaktion auf Kittsubstanz erklärt (Koch [4]), Verkittung der Lantermann'schen Segmente).

Es wäre demnach noch heute nicht unnütz, die Frage, was die Versilberung überhaupt nachweisen kann, einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen. Hier beschränke ich mich auf die Mitteilung mehrerer Thatsachen, die für das Verständnis des Folgenden notwendig erscheinen, indem sie, wie ich glaube, geeignet sind, über die Bedingungen der „Kittlinien" einigen Aufschluss zu geben.

Wenn man einen Nerven ohne Zusatz einer Flüssigkeit auf dem

1) Schweigger-Seidel, Die Behandlg. der thierischen Gewebe mit Argent. nitric. Arb. aus der phys. Anstalt zu Leipzig vom Jahre 1866.

2) Robinski, Die Kittsubstanz auf Reaktion des Argent. nitric. Reichert's und Du Boy's Arch. 1871. Heft 2.

3) Engelmann, l. c. — 4) Koch, l. c.

Objektträger rasch zerzupft und nun die Silberlösung hinzutreten lässt, so kann man häufig die Beobachtung machen, dass, gleichzeitig mit den Silberbildern an den Einschnürungen und von gleichem Habitus mit diesen, ein Niederschlag zwischen den einzelnen Nervenfasern auftritt, der ganz den Eindruck von Kittlinien hervorruft; derselbe findet sich nie an einer isolierten Faser, sondern nur da, wo zwei Fasern einander bis zur Berührung genähert sind. Einen gleichen Niederschlag kann man, obgleich viel seltener, zwischen Bindegewebsfibrillen und Remakschen Fasern beobachten. Man könnte glauben, dass auch zwischen diesen Elementen eine Kittsubstanz vorhanden sei. Allein einmal müsste eine solche Substanz bei der Isolation an den einzelnen Fasern haften bleiben und auch an frei liegenden einen Niederschlag hervorrufen, sodann aber muss für die markhaltigen Fasern die Annahme einer Verkittung deshalb ausgeschlossen werden, weil, wie man sich an jedem Querschnitt überzeugen kann, dieselben durch relativ weite Zwischenräume von einander getrennt sind. Die innige Aneinanderlagerung kann also nur eine Folge der Präparation sein und der Niederschlag, der an diesen Contakt geknüpft ist, kann nur als eine Folge desselben erklärt werden.

Noch überzeugender ist eine Erscheinung, die mir bei der Versilberung des Frosch-Mesenteriums öfter zur Beobachtung kam. Wenn nämlich in einem Capillargefäss einige rote Blutkörperchen sehr dicht an einander liegen, was gewöhnlich mit einer gegenseitigen Abplattung verbunden ist, so entsteht an diesen Berührungsflächen der gleiche Niederschlag, wie er zwischen Epithelzellen erscheint; auch er endigt mit dem Punkte, wo die innige Berührung ihr Ende erreicht. Dass nun in diesem Falle keine specifische das Silber reducierende Substanz oder gar ein Kitt vorliegen kann, ist selbstverständlich; der Niederschlag kann nur durch den Contakt selbst verursacht sein.

Als Ergänzung hiezu diene noch Folgendes: Wenn zwei Zellen, die im Leben eng an einander liegen und nach Silberbehandlung eine Kittlinie zwischen sich zeigen würden, durch einen Zufall der Präparation von einander gelöst werden, was allerdings bei der Festigkeit der Adhäsion nur selten der Fall ist, so tritt, wenn nun erst die Silberlösung zugesetzt wird, nicht etwa an einer oder an beiden der einander vorher berühren-

den Flächen ein Niederschlag auf, sondern derselbe entsteht überhaupt nicht mehr [1]).

Aus diesen Thatsachen folgt ohne Zweifel, dass für die als Kittlinien bezeichneten Niederschläge, die durch Behandlung frischer tierischer Gewebe mit verdünnter Höllensteinlösung auftreten, nicht eine specifische Substanz bedingend ist, sondern nur der innige Contakt zweier Gewebselemente, vielleicht darf man direkt sagen: die Adhäsion. Es folgt daraus weiter, dass Niederschläge, die unter den genannten Umständen auftreten, auf nichts anderes schliessen lassen, als auf eine solche innige Berührung, gleichviel, ob diese in der Natur des Gewebes begründet oder künstlich hervorgebracht ist [2]).

Es wäre nach dem Gesagten immerhin möglich, dass, wenn auch nicht als Bedingung für die Silberreduktion, so doch zur Erklärung des festen Zusammenhaltes in den nur aus Zellen bestehenden Geweben eine Kittsubstanz angenommen werden müsste. Diese Frage geht jedoch über den hier behandelten Gegenstand hinaus, und ich möchte deshalb nur bemerken, dass die Adhäsion wohl genügend erscheint, die feste Vereinigung der Zellen zu erklären.

Wenden wir uns nun zu der erwähnten ersten Art der Silberniederschläge, die an den Nervenfasern zur Beobachtung kommen, so lassen sich dieselben auf Grund der eben gewonnenen Anschauungen sehr einfach aus den Längsschnitten ableiten, zu welchem Zweck ich auf die Figur II. verweise. Betrachten wir dieses Bild mit Rücksicht auf die vorliegende Frage, so finden wir den geforderten engen Contakt

---

1) Lässt man ein Stück eines Frosch-Mesenteriums, ohne es zu fixieren, eintrocknen, so behalten die Grenzen der Endothel-Zellen noch auf mindestens einige Stunden die Fähigkeit bei, aus einer Höllensteinlösung Silber zu reducieren. Wird das Mesenterium dagegen fixiert und zwar dadurch, dass man es flach auf einem Objektträger ausbreitet, so muss dadurch, dass nun mit der Schrumpfung der einzelnen Zellen nicht mehr eine entsprechende Verkleinerung der ganzen Fläche Hand in Hand gehen kann, ein Auseinanderweichen der Zellen verursacht werden. So lange dieses einen gewissen Grad nicht überschreitet, tritt der Niederschlag, nun entsprechend breiter, noch auf. Bald jedoch, nach höchstens einer halben Stunde, ist die Grenze erreicht, von der an der Niederschlag nicht mehr zur Ausbildung kommt. Dass hieran die Eintrocknung Schuld sei, kann nach dem oben Gesagten nicht angenommen werden.

2) Wahrscheinlich ist in allen Fällen eine ganz dünne Schicht lymphatischer Flüssigkeit zwischen den sich berührenden Elementen vorhanden.

a) zwischen den beiden aneinanderstossenden Scheidenzellen.

Die Versilberung ergibt demnach hier einen bald breiteren, bald schmäleren Ring, der die Stelle des „Schnürrings“ einnimmt. Derselbe ist vollkommen mit den zwischen anderen Zellen auftretenden Kittlinien zu homologisieren und wird auch allgemein in diesem Sinne erklärt, allerdings nur als Kittlinie zwischen den Segmenten der Schwann'schen Scheide, was demnach zu berichtigen ist.

Eine weitere innige Berührung erkennen wir

b) zwischen Scheidenzellen und Nervenfibrillen, nämlich in der „Enge des Achsenraumes“, also da, wo die verengten Enden der genannten Zellen die zu einem verhältnismässig soliden Bündel zusammengepressten Nervenfibrillen dicht umschliessen. Was oben über die Form des verengten Achsenraumes der Schnürstelle gesagt worden ist, gilt zugleich für die Form des hier auftretenden Niederschlags, der also im Allgemeinen einen kurzen Cylindermantel darstellt.

Die beiden genannten Niederschläge können jeder für sich allein auftreten, meist aber sind sie mit einander combiniert und rufen dann das Bild des „Ranvier'schen Kreuzes“ hervor, welches, wenn die normale Anordnung der einzelnen Faserbestandtheile möglichst erhalten ist, die in Fig. VII. (Taf. I.) wiedergegebene Form zeigt.

Hieran schliessen sich folgende Modificationen. Es wurde oben hervorgehoben, dass die Enge des Achsenraumes nicht selten mehr oder weniger ausgesprochen die Form zweier an einander gelegter Kegelstümpfe annimmt. Der Silberniederschlag wiederholt bis zu einem gewissen Grade diese Form, d. h. nur mit seiner äusseren Fläche, während die innere, dem Fibrillenbündel anliegende cylindrisch bleibt. Er verdickt sich also von beiden Seiten her bis zur Ebene des Schnürrings, wo er continuierlich in den sich gürtelförmig anschliessenden unter a. angeführten Niederschlag übergeht. Dieses Verhalten repräsentiert das „renflement biconique“, welches Ranvier als ein am Achsencylinder präexistierendes Gebilde beschrieben hat. Er sah dasselbe besonders deutlich an Achsencylindern, die sich in ihren Scheiden verschoben hatten, als einen Silbergeschwärzten vom Achsencylinder durchbohrten Doppelkegel. Dass sich der Niederschlag durch nachträgliche Zerrung mit dem geschrumpften

Inhalte des Achsenraumes verschiebt, ist in der That nicht selten. Doch glaube ich nicht, dass er sich dabei vom inneren Neurilemm ablöst, sondern vielmehr, dass dieses den Zusammenhang mit dem äusseren Neurilemm aufgibt und sich als „Achsencylinderscheide“ mitverschiebt, indem, wie schon oben hervorgehoben wurde, der Achsencylinder sich meist mit dieser Membran isoliert.

Eine andere Modification des Ranvier'schen Kreuzes, welche in einer Verlängerung des Längsbalkens besteht (Fig. VIII. Taf. I.) ist so zu erklären, dass durch die Einwirkung der Silberlösung oder vielmehr des Wassers die Markscheide quillt und so den Achsenraum verengt. Dadurch wird auf weitere Strecken das gleiche Verhalten hervorgerufen, das normal nur in der Einschnürung sich findet, nämlich ein inniger Contakt zwischen dem inneren Neurilemm und den zusammengepressten Nervenfibrillen, woraus eine entsprechende Verlängerung des unter b. angeführten Niederschlags folgt.

Eine eigentümliche Ausbildung des eben genannten Niederschlags wird durch Schrumpfung des Nervenfibrillenbündels in der Enge des Achsenraumes bedingt; auch hier kann nämlich trotz der bereits engen Aneinanderlagerung der Fibrillen noch eine beträchtliche Verschmälerung des Achsencylinders erfolgen. Während nun im vorhergehend besprochenen Fall mit der Schrumpfung der Nervenfibrillen eine Quellung der Markscheide Hand in Hand ging, infolge deren zwischen dem Achsencylinder und dem inneren Neurilemm ein inniger Contakt hergestellt wurde, ist dies hier häufig nicht der Fall, d. h. es entsteht zwischen dem Fibrillenbündel und den verengten Enden der Scheidenzellen ein periaxialer Raum, der besonders dann deutlich ausgebildet ist, wenn die Enge jene des öfteren erwähnte Doppelkegelform aufweist. Dass nicht auch hier das innere Neurilemm dem schrumpfendem Inhalt des Achsenraumes nachfolgt, scheint wesentlich daher zu rühren, dass dasselbe im Schnürring, der unter allen Umständen annähernd seinen normalen Durchmesser bewahrt, eine gewisse Fixierung erfährt, vielleicht auch daher, dass das Mark durch die Wasserwirkung zunächst aus dem Umschlagsrand des Neurilemms zurückgedrängt wird, und demgemäss die Markquellung, die wir oben als Bedingung für Herstellung des Contakts erkannt haben, hier fehlt. So kommt es, dass gerade da, wo bei normaler Anordnung der

Faser die innigste Berührung zwischen Scheidenzellen und Nervenfibrillen besteht, dieselbe nun gelöst wird, während sie im weiteren Verlauf je nach dem Grade der Markquellung auf kürzere oder längere Strecke sich ausbilden kann. Solche Umgestaltungen der Faser verursachen dann Silberbilder, wie die in Fig. IX. und X. (Taf. I.) wiedergegebenen, zu deren Erläuterung ich nach dem Gesagten kaum etwas beizufügen brauche. Sie können so recht als Illustrationen für die oben aufgestellten Anschauungen über die Bedingungen des Silberniederschlags gelten, indem sie zeigen, wie einerseits nach Lösung eines Contakts, welcher mit grosser Regelmässigkeit eine Reduktion des Silbers zur Folge hat (Fig. VII.), der Niederschlag nicht mehr zur Ausbildung kommt, andererseits eine durch die Reagenswirkung hervorgerufene innige Aneinanderlagerung zur Entstehung desselben Veranlassung gibt.

Durch verschiedengradige Ausbildung und wechselnde Combination der im Vorstehenden besprochenen Umgestaltungen wird die Mannichfaltigkeit der Bilder bedeutend vermehrt; man kann fast sagen, dass jedes neue Präparat wieder andere zeigt. Da jedoch alle diese Modificationen in gleicher Weise erklärt werden können, wie die beschriebenen, so verzichte ich auf ihre Aufzählung und bemerke nur, dass häufig der Niederschlag nicht, wie in den dargestellten Fällen, symmetrisch zu beiden Seiten des Schnürrings entwickelt ist, sondern, dass er sich auch auf jeder Seite in anderer Weise oder auch nur einseitig ausgebildet findet.

Endlich wurde ein von den gleichen Bedingungen abhängiger Niederschlag

c) zwischen den Nervenfibrillen selbst aufgeführt.

Dieser Niederschlag, der nicht mit den unten zu besprechenden Frommann'schen Linien zu verwechseln ist, kann mit wenigen Worten erledigt werden. Die Nervenfibrillen sind (von der kurzen Strecke innerhalb der Enge des Achsenraums vor der Hand abgesehen) durch zu weite Zwischenräume von einander getrennt, als dass ein Contaktniederschlag zwischen ihnen sich bilden könnte. Werden sie aber durch die Einwirkung der Silberlösung einander genähert, so kann unter günstigen Umständen gerade diejenige gegenseitige Aneinanderlagerung erreicht werden, die für die Entstehung des Niederschlags notwendig ist. Es zeigen sich dann feine Längslinien, seltener in Längsreihen angeordnete Silberkörnchen,

welche die Zusammensetzung des Achsencylinders aus parallel verlaufenden Fibrillen sehr deutlich hervortreten lassen. Der Niederschlag ist nicht an bestimmte Oertlichkeiten gebunden; doch findet er sich in der Regel in Combination mit den oben beschriebenen periaxialen Niederschlägen, indem ja für diese gleichfalls ein verhältnismässig solides Fibrillenbündel Bedingung ist. Am häufigsten trifft man demgemäss den interfibrillären Niederschlag in der Enge des Achsenraums, wo ja schon bei normaler Anordnung die günstigsten Bedingungen für seine Entstehung vorausgesetzt werden müssen; nur wird er hier meistens durch den Längsballen des Ranvier'schen Kreuzes je nach dessen stärkerer oder schwächerer Ausbildung mehr oder weniger verdeckt.

Auf die bisher besprochenen Arten des Silberniederschlags nun glaube ich die Bilder zurückführen zu müssen, die Engelmann[1]) beschrieben und abgebildet hat, und auf die er seine Lehre von der Zusammensetzung des Achsencylinders aus einzelnen discreten Segmenten in erster Linie stützt. Es kann nach den Thatsachen, die wir über die Entwicklung der Nervenfasern kennen, keinem Zweifel unterliegen, dass die Anschauung Engelmann's, als gehöre das zwischen je 2 benachbarten Einschnürungen gelegene Segment des Achsencylinders mit den gleichen Segmenten der Scheide zu einer Zelle zusammen, unrichtig ist. Eine Unterbrechung, resp. Verlötung der Fibrillen in der Einschnürung wäre deshalb etwas völlig Unverständliches und könnte nur sekundär entstanden sein. So unwahrscheinlich eine solche Annahme von vornherein erscheinen muss, so wäre sie doch nicht von der Hand zu weisen, wenn sie auf präcise Methoden gestützt werden könnte. Nachdem jedoch an den oben beschriebenen Längsschnitten einzelner Fasern, an denen die Nervenfibrillen deutlich gefärbt und ohne Störung durch darüber oder darunter gelegene Elemente zur Beobachtung kommen, von einer solchen Unterbrechung keine Spur wahrzunehmen ist, vielmehr die einzelnen Fibrillen sich continuierlich durch die Schnürstelle hindurch verfolgen lassen, scheint mir eine solche Annahme unstatthaft zu sein, und ich halte die erwähnten Präparate für hinlänglich beweisend, um damit die Frage als erledigt betrachten zu können. Wenn ich trotzdem auf die Darlegungen Engelmann's näher eingehe, so geschieht es deshalb, weil ich die Silberbilder,

1) Engelmann, Ueber die Discontinuität des Axencylinders etc. Pflüger's Archiv. Bd. XXII. 1880.

die dieser Forscher für die Discontinuität des Achsencylinders ins Feld führt und die in der That für seine Auffassung eine wesentliche Stütze zu bilden scheinen, in anderer Weise erklären zu können glaube.

Nur eine einzige der von Engelmann abgebildeten Fasern zeigt das Verhalten, das er demonstrieren will, nämlich eine Trennung zweier Achsencylinder-Segmente in der Ebene des Schnürrings. Es ist die in Fig. 14. wiedergegebene Faser, die 24 Stunden mit gesättigter Borsäurelösung und dann mit Goldchloridkalium ($^1/_2$ %) behandelt worden war. Dass Zerreissungen des Achsencylinders vorkommen, ist eine bekannte Thatsache; auch davon, dass in den meisten Fällen, in denen ein relativ solider Achsencylinder vorliegt, die Riss-Enden sehr scharf, wie abgeschnitten, sich darstellen, kann man sich leicht überzeugen. Es ist nun nicht unwahrscheinlich, dass gerade in der Schnürstelle für künstliche Continuitätsunterbrechungen die günstigsten Bedingungen vorliegen, indem nach der ganzen Anordnung der Faser der in der Einschnürung gelegene Teil des Fibrillenbündels gewiss eine exceptionelle Stellung einnimmt.

Mir selbst allerdings ist, obgleich ich vielfach innerhalb ihrer Scheiden zerrissene Achsencylinder beobachtet habe, niemals ein solcher Fall vorgekommen; dagegen habe ich einige Male beobachtet, dass die nach Behandlung mit chronsaurem Kali oder Goldchlorid stabförmig geronnenen Achsencylinder sich durch Zerrung im Achsenraum verschoben hatten, ohne dass, abgesehen von einer leichten Verschmälerung, auch nur andeutungsweise die Stelle zu erkennen war, die vorher den Schnürring einnahm.

Wenn wir uns fragen, ob das Verhalten des Silbernitrats für die Entscheidung der vorliegenden Frage von Bedeutung sein könne, so ist hierauf entschieden bejahend zu antworten. Ist das Nervenfibrillenbündel im Schnürring ebenso unterbrochen, wie die Scheide, so muss durch Behandlung der frischen Nervenfaser mit Höllensteinlösung eine vollständige Silberscheibe hervorgerufen werden können, welche in der Ebene des Schnürrings die ganze Dicke der Faser durchsetzt. Allein ein solcher Niederschlag tritt, obgleich er, wenn Engelmann's Anschauung richtig wäre, zu den regelmässigsten Befunden gehören müsste, niemals auf; stets findet sich, wie alle Beobachter übereinstimmend angeben, an der erwähnten Stelle nur ein Silber-Ring, (Niederschlag zwischen den Scheidenzellen) durch den das Fibrillenbündel frei hindurchzieht. Man kann sich hievon an Schnür-

stellen, deren Querschnitt zur optischen Achse des Mikroskops schief steht, mit Bestimmtheit überzeugen; auch habe ich, um vollständig sicher zu gehen, Längsschnitte durch Nervenstämmchen, die mit Höllensteinlösung behandelt worden waren, angefertigt, und auch hier niemals eine Spur einer dem Achsencylinder angehörigen Kittlinie beobachten können.

Wenn Engelmann gleichwohl das Vorkommen eines solchen Niederschlags behauptet (vergl. seine Fig. 12 c.), so glaube ich hiegegen einwenden zu können, dass dieser Niederschlag nicht notwendig durch die Berührung zweier discreter Achsencylinder-Segmente bedingt sein muss, sondern dass er ebenso gut durch die an dieser Stelle besonders enge seitliche Aneinanderlagerung der einzelnen Nervenfibrillen verursacht sein kann, dass er also unter die von mir oben sub c) aufgeführte Kategorie des interfibrillären Niederschlags zu stellen ist. Die Engelmannsche Figur selbst liefert für diese Deutung Anhaltspunkte. Ein interfibrillärer Niederschlag in Gestalt von in Längsreihen angeordneten Silberkörnchen ist hier auf längere Strecke deutlich ausgebildet; dass er gerade in der Ebene des Schnürrings am dichtesten ist und infolge dessen an dieser Stelle bei seitlicher Ansicht den Eindruck eines verhältnismässig compakten Querbalkens macht, ist aus der Anordnung des Fibrillenbündels, das hier in aussergewöhnlicher Weise gerade nur an dieser Stelle sehr dicht zusammengepresst ist, einfach zu erklären. Auch die Entstehung des Niederschlags, die von Engelmann in diesem Falle Schritt für Schritt verfolgt worden ist, spricht entschieden für meine Annahme. Silberniederschläge zwischen zwei im Leben sich enge berührenden Gewebselementen treten, wenn das Licht in voller Stärke einwirken kann, schon wenige Minuten nach Zusatz der Silberlösung auf. Im vorliegenden Fall aber war nach Engelmann's Angaben die Lösung schon längst weit in das Innere der Faser vorgedrungen, ehe der besprochene Niederschlag zur Ausbildung kam. Dieses Verhalten lässt sich nicht verstehen, wenn, wie es nach Engelmann's Anschauung der Fall sein müsste, die Bedingungen für seine Entstehung schon an der frischen Faser vorhanden waren, wohl aber, wenn dieselben erst durch die Einwirkung des Reagens hervorgerufen wurden, was sich mit meiner Annahme vollkommen vereinigen lässt. Die Fibrillen waren eben zunächst zu weit von einander entfernt, um zur Entstehung eines Contaktniederschlags Veranlassung zu geben; erst nach-

dem sie durch die Einwirkung der Höllensteinlösung einander beträchtlich genähert waren, (Engelmann zeichnet den Achsenraum nach einstündiger Einwirkung auf mindestens $^2/_3$ seines ursprünglichen Durchmessers reduziert), konnte sich der Niederschlag ausbilden.

Beweisender könnten auf den ersten Blick die von Engelmann in den Figuren 1.—6., 9. und 10. abgebildeten Fasern erscheinen, in denen sich die im Leben mit einander verlöteten Achsencylinder-Segmente in sehr regelmässiger Weise von einander gelöst und nach beiden Seiten zurückgezogen haben sollen. Hiergegen muss ich behaupten, dass in keinem einzigen dieser Fälle das Nervenfibrillenbündel selbst unterbrochen ist, sondern dass nur die Silberschwärzung oder andere Momente eine solche Discontinuität vortäuschen. Engelmann erzielte diese Bilder dadurch, dass er ein ganzes Nervenstämmchen vom Frosch auf 24 Stunden in eine schwache Silberlösung legte und dann erst die einzelnen Fasern isolierte. Da nun zur Entstehung des Niederschlags die Einwirkung des Sonnenlichts nötig ist, das in die Tiefe des Nerven nur sehr geschwächt eindringen kann, so ist es einleuchtend, dass die Fasern schon tiefgreifende Umwandlungen erfahren haben können, ehe ein Niederschlag an ihnen zur Ausbildung kommt. Die Silberbilder, die dadurch entstehen, zeigen deshalb vielfach jene eigentümliche Unterbrechung des Längsbalkens des Ranvier'schen Kreuzes, wie ich sie in Fig. IX. und X. dargestellt und in ihren Bedingungen oben hinlänglich erklärt zu haben glaube. Ich habe diese Bilder nach der erwähnten Methode Engelmann's erhalten, und ein Vergleich meiner Fig. X. mit seinen Fig. 1. und 2. lässt keinen Zweifel darüber, dass es sich hier in der That um ganz die gleiche Art des Niederschlags handelt. Wenn nun Engelmann an diesen Fasern eine Unterbrechung des „Achsencylinders" behauptet, während ich (vergl. Fig. IX. und X.) in allen Fällen, die ich beobachtete, die Fibrillen continuierlich durch die Schnürstelle hindurch verfolgen konnte, so rührt diese Differenz ohne Zweifel daher, dass Engelmann nur die durch den Niederschlag scharf hervortretenden Teile des Fibrillenbündels als „Achsencylinder" in Anspruch nahm, die Niederschlags-freien Partieen desselben aber gänzlich übersah, — ein Irrtum, der dadurch begreiflich wird, dass Engelmann seine Präparate in Canadabalsam studierte, in welchem Medium die Nervenfibrillen, wenn sie nicht gefärbt sind, fast völlig unsichtbar werden. So

erklären sich seine Figuren 1. 2. 4. und 5., auch in Fig. 3. ist gewiss nicht, wie Engelmann will, der Achsencylinder des einen Segments entfernt, sondern hier ist eben der Niederschlag nur auf der einen Seite des Schnürrings ausgebildet und der im anderen Segment gelegene Teil des Fibrillenbündels unsichtbar.

In Engelmann's Fig. 6. wird die scheinbare Unterbrechung durch die Lichtbrechung des Schnürrings hervorgerufen, der je nach der Einstellung als helle oder dunkle Querlinie imponiert und so die Fibrillen, so weit sie in seinem Bereich liegen, verdeckt. Das Gleiche gilt für die Fig. 10., die ein mit dem inneren Neurilemm und demgemäss mit Resten des Schnürrings isoliertes Fibrillenbündel darstellt. Im Uebrigen aber dürfte dieses Bild, ebenso wie das in Fig. 9. wiedergegebene, direkt gegen Engelmann's Anschauungen sprechen. Denn wenn hier wirklich eine vollständige Unterbrechung gegeben wäre, wie dieser Forscher will, so wäre es gänzlich unverständlich, dass die beiden Achsencylinder-Segmente sich isolieren lassen sollten, ohne aus einander zu fallen.

Im Vorstehenden glaube ich gezeigt zu haben, dass der grösste Teil der von Engelmann für die Discontinuität des Achsencylinders beigebrachten Bilder in anderer Weise erklärt werden muss, dass ein kleinerer Teil wenigstens in anderer Weise erklärt werden kann. Und ich glaube demnach auf Grund der bis jetzt für die Darstellung dieser Verhältnisse präcisesten Methode, nämlich der Längsschnitte, an der Anschauung festhalten zu müssen, dass die Nervenfibrillen des Achsenraumes sich continuierlich durch den ganzen Verlauf der Faser erstrecken.

Als zweite Art des Silberniederschlags habe ich die Frommann-schen Linien aufgeführt.

Während früher von verschiedenen Seiten die Ansicht vertreten wurde, dass die Frommann'schen Linien auf einen geschichteten Bau des Achsencylinders, eine Zusammensetzung aus „nervous elements" zu beziehen seien, macht sich in neuerer Zeit das Bestreben geltend, dieselben auf die Umgebung des Achsencylinders, auf dessen Scheide zurückzuführen. In diesem Sinne äussern sich Rumpf[1]) und Morochowetz[2]), von denen der letztere

1) Rumpf, l. c.

2) Morochowetz, Notiz über die Wirkung des Silbernitrats auf die Nervenfaser. Unters. d. phys. Inst. d. Un. Heidelbg. Bd. II. H. 2.

ringförmig den Achsencylinder umgebende Kreiskanäle als Bedingung für den Niederschlag postuliert, ohne jedoch darin ein Strukturverhältnis der lebenden Faser zu erblicken.

Die Behauptung der genannten Autoren, dass die Silberschichten den Achsencylinder stets umgreifen, ist jedoch nicht völlig richtig. Ist der Achsencylinder zu einem soliden Stab geschrumpft, so dass ein periaxialer Raum besteht, dann allerdings stellen sich die queren Silberbänder als Ringe dar, die an dem Stabe aufgereiht sind; ist jedoch die fibrilläre Struktur einigermassen erhalten, — was am ehesten dann der Fall ist, wenn man die 1%ige Silberlösung zu gleichen Teilen mit 10%iger Salpetersäure versetzt, wodurch die Silberreaktionen im Uebrigen gar nicht verändert werden, — so nimmt der Niederschlag den Raum zwischen den einzelnen Fibrillen ein, wie die in Fig. XI. (Taf. I.) dargestellte Faser zeigt. Er lagert sich also, mit anderen Worten, in der ganzen Dicke des Achsenraumes überall da ab, wo er Platz findet.

Damit erscheint die Anschauung, dass er von irgend einem präformierten Schichtenbau abhänge, sehr unwahrscheinlich, noch mehr spricht gegen einen solchen die Thatsache, dass die Silberschichten, je weiter sie vom Schnürring oder jener verletzten Stelle, an der die Lösung eingedrungen ist, entfernt sind, nicht nur an Intensität abnehmen, sondern dass sie auch durch immer grössere Zwischenräume von einander getrennt sind.

Dass nun in der That weder der Achsencylinder, noch auch die Scheiden, — sei es durch präformierte Strukturverhältnisse oder infolge postmortaler Veränderungen — die Bedingungen für Entstehung der Frommanns'chen Linien abgeben, das beweist mit Evidenz ein Experiment, welches Herr Assistent A. Boehm hier angestellt hat. Ausgehend von dem Gedanken, dass die im Achsenraum enthaltene gerinnbare Flüssigkeit genüge, um die Schichtung des Niederschlags zu erklären, suchte er die in den Nervenfasern gegebenen Verhältnisse an einem einfachen Objekt nachzuahmen. Enge Glasröhrchen wurden mit filtriertem Eier-Eiweiss gefüllt und dann mit dem einen Ende in eine $^1/_2$%ige Höllensteinlösung gebracht. Diese drang durch Diffusion in das Rohr hinein und verursachte hier einen zum grössten Teil jedenfalls aus Chlorsilber bestehenden weissen Niederschlag, der jedoch nicht diffus auftrat, sondern ebenso aus

Schichten bestand, die durch Niederschlags-freie Zonen getrennt waren, wie die Frommann'schen Linien. Es kann nach alledem keinem Zweifel unterliegen, dass auch diese von Strukturen der Faser vollständig unabhängig sind. Zu erklären aber dürften sie folgendermassen sein.

Der Achsenraum enthält eine lymphatische Flüssigkeit, in der die Nervenfibrillen suspendiert sind. Diese Flüssigkeit, die ohne Zweifel Kochsalz enthält, gibt mit der Silberlösung zunächst einen Niederschlag von Chlorsilber, ebenso wie Blutplasma oder Lymphe, weshalb man ja, um reine Silberpräparate zu erhalten, die Gewebe vorher immer erst mit destilliertem Wasser abspülen muss. Aus diesem Niederschlag wird durch die Einwirkung des Lichts das Silber in schwarzen Körnchen reduziert. Die Schichtung desselben aber rührt daher, dass die Silberlösung nicht von allen Seiten her mit der Flüssigkeit in Berührung kommen kann, indem die Markscheide dem Eindringen auf lange Zeit widersteht, sondern dass dieselbe von einem einzigen Punkt aus (Einschnürung, Rissstelle) allmählich in das Rohr hinein diffundiert. Die ganze Frage wird dadurch zu einer rein physikalischen. Wahrscheinlich erklärt sich die Schichtung so, dass die eingedrungene Lösung durch den erfolgenden Niederschlag ihren Silbergehalt verliert, so dass eine Zeit lang reines Wasser vordringt, bis der Verlust wieder ersetzt ist, worauf abermals ein Niederschlag entsteht, dann wieder Wasser allein diffundiert u. s. w. Auf diese Weise erklärt sich auch einfach die Thatsache, dass die Silberzonen, je weiter sie von der Eintrittsstelle der Lösung entfernt sind, durch desto breitere Zwischenräume von einander geschieden werden, indem ein immer grösserer Zeitraum vergeht, bis das verbrauchte Silbernitrat wieder ersetzt ist.

Die Frommann'schen Linien bilden, wenn sie an der Einschnürung auftreten, die Verlängerung des Längsbalkens des Ranvier'schen Kreuzes. Dabei ist zu bemerken, dass sie sich nicht in den Bereich des oben beschriebenen Cylindermantels, der den centralen Teil des Längsbalkens darstellt, hinein erstrecken, indem hier für ihre Entstehung kein Platz ist. Die erste quere Linie liegt stets da, wo die Fibrillen beginnen auseinanderzuweichen.

Als dritte Art des Silberniederschlags endlich habe ich denjenigen aufgeführt, der an der Oberfläche der Markscheide auftritt.

Ich beobachtete denselben zuerst an den schmalen Fasern des Sympathicus, als ich dieselben nach folgender Methode behandelte:

Ein kurzes Stück des Nerven wird unter dem Präparier-Mikroskop rasch von seinen Hüllen befreit und nun ohne Zusatz einer Flüssigkeit im Stadium der sog. halben Eintrocknung (Ranvier) mit zwei Nadeln auf dem Objektträger auseinandergezogen, bei welcher Manipulation fortwährend einzelne gut isolierte Fasern am Glase haften bleiben. Das so angefertigte Präparat wird Osmiumsäuredämpfen ausgesetzt, bis es eine leichte Bräunung zeigt. Fügt man nun einige Tropfen einer schwachen wässerigen oder alkoholischen Silberlösung zu, so treten fast momentan und auch unter Ausschluss des Lichtes die deutlichsten Silberbilder auf [1]).

In Fig. XII. u. XIII. (Taf. II.) sind Stellen aus zwei nach dieser Methode angefertigten Präparaten wiedergegeben, von denen das letztere mit Carmin gefärbt worden war. An den Stellen, an denen nach der Lage der Kerne die Einschnürungen zu erwarten wären, zeigen sich constant zwei kurze quere Silberlinien, die an den schwächsten Fasern sogar zu Punkten werden können. Da sich an diesen zarten Fasern, die uns unten eingehender beschäftigen werden, eine weitere Analyse nicht ausführen liess, behandelte ich den Ischiadicus des Frosches nach derselben Methode und mit dem gleichen Erfolg. An den starken Fasern ist es nun nicht schwierig, zu ermitteln, auf welchen Bestandteil die beiden Querlinien zu beziehen sind. Drei Momente besonders erleichtern die Analyse ganz wesentlich, nämlich einmal die vortreffliche Conservierung durch die Osmiumsäure, dann die Reinheit der Bilder, indem die gewöhnlichen Niederschläge nach der angegebenen Behandlung nicht auftreten, und endlich die deutliche Begrenzung des Markes, das man durch die Osmiumsäuredämpfe sich ziemlich dunkel färben lassen kann, ohne dass die Versilberungsfähigkeit beeinträchtigt wird.

Man erkennt zunächst (Fig. XIV. a. und b. Taf. II.), dass die beiden

1) Bei Gelegenheit dieser Versilberungsversuche wurde die Beobachtung gemacht, dass eine Mischung der Silberlösung mit Osmiumsäure (Silberlösung 1% und Osmiumsäure 1% zu gleichen Teilen) die gleichen Reaktionen auf frische Gewebe zeigt, wie Silberlösung allein, dass diese Mischung also zum Nachweis von Zellgrenzen ein sehr geeignetes Reagens darstellt, indem sie zugleich alle Elemente vorzüglich conserviert. — Ich finde nachträglich, dass bereits R. Hertwig (Ueber den Bau der Ctenophoren, Jena 1880) zum Nachweis von Zellgrenzen die Silberbehandlung mit Osmiumsäurebehandlung combinierte.

Querlinien zu beiden Seiten der Einschnürung liegen, und zwar in wechselnder Entfernung von derselben, stets aber an der Stelle, wo die Markscheide aufhört. Sodann lässt sich an einzelnen günstig liegenden Fasern leicht constatieren, dass der Silberniederschlag nicht eine Scheibe, sondern einen Ring darstellt, dass er also nicht dem Achsencylinder angehören kann, sondern diesen umgreifen muss. Besonders instruktiv sind jedoch die in Fig. XV. wiedergegebenen Bilder, an denen durch nachträgliche Behandlung mit Fuchsin eine sehr glückliche Färbung erzielt worden war. Hier kann man nicht nur den etwas geschrumpften Achsencylinder auf das Deutlichste nach beiden Seiten durch die Silberringe hindurchverfolgen, sondern es lässt sich auch in b. die Lage derselben dahin näher bestimmen, dass sie dem Raume zwischen den beiden Blättern des Neurilemms angehören müssen. Demnach können sie nur auf die Enden der Markscheidensegmente zu beziehen sein.

Dies sind die gewöhnlichen Bilder, die man durch die beschriebene Behandlung mit grösster Sicherheit erhält.

Seltener ist es, dass schwächer entwickelte Ringe in kurzen Abständen von einander im übrigen Verlauf des interannulären Segments auftreten, wie dies Fig. XVI. (Taf. II.) zeigt. Stets liegen diese zu zweien sehr nahe bei einander, so dass sie manchmal sich fast decken, und während der eine immer dicht unter dem äusseren Neurilemm hinzieht, lässt der andere eine gleiche Lagebeziehung zum inneren Neurilemm erraten. Es kann demnach keinem Zweifel unterliegen, dass, wie die oben besprochenen dicken Ringe die Enden der Markscheide an der Einschnürung bezeichnen, diese feineren jene Stellen einnehmen, wo die Lantermann'schen Segmente mit scharfer Kante endigen. Der äussere Ring bezeichet das Ende des trichterförmig erweiterten Segments, der innere das in diese Erweiterung eingepasste conisch verjüngte Ende des darauf folgenden.

Endlich als der seltenste Fall ist der zu nennen, wo ausser den erwähnten Ringen ein schwacher continuierlicher Silberbelag das ganze Lantermann'sche Segment rings umhüllt, indem er von einem Ring zum nächsten zugehörigen sowohl die Aussen- als auch die Innenfläche des Segments in dünner Schicht überzieht (Fig. XVI.).

Von hier aus nun ist es am ehesten möglich, eine Erklärung des Niederschlags zu versuchen. Wir sehen (schematisch in Fig. XVII.), dass

derselbe überall da entstehen kann, wo eine freie Oberfläche des Markes vorliegt, wir haben ferner erfahren, dass er jene Stellen bevorzugt, wo diese Oberfläche sich zu einer scharfen Kante auszieht, also dieselben Lokalitäten, die, wie wir wissen, alterierenden Einflüssen am meisten ausgesetzt sind.

Ich schliesse daraus, dass durch die beschriebene Behandlung, (vielleicht spielt die Eintrocknung dabei die Hauptrolle) die oberflächlichen Schichten des Markes in einer Weise verändert werden, dass sie mit Begierde Silber aus seinen Lösungen reducieren. Möglicherweise entstehen auch durch Schrumpfen der Markscheidensegmente zwischen diesen einerseits und dem äussern und innern Neurilemm und den Zwischenmarkscheiden andererseits enge Spalten, welche einen Silberniederschlag bedingen.

Es kommt mitunter vor, dass bei der direkten Versilberung frischer Fasern der besprochene Niederschlag ebenfalls auftritt. In der Regel finden sich dann nur die beiden Ringe an der Einschnürung, und zwar gewöhnlich so dicht am Schnürring, dass sie sich kaum von dem Querbalken des Ranvier'schen Kreuzes trennen lassen, so dass dieser sehr bedeutend verdickt erscheint.

Ferner ist auf den in Rede stehenden Niederschlag eine Angabe Grünhagen's[1]) zu beziehen, der im Umkreis des den Kern der Scheidenzelle umgebenden Protoplasmahofes eine Kittlinie an der Schwann'schen Scheide beschreibt. Ich habe gleichfalls Bilder gesehen, die leicht diesen Eindruck hervorrufen können; doch liessen sich dieselben meist mit Bestimmtheit auf einen Niederschlag zurückführen, der die Markscheide gegen das Protoplasma abgrenzt, also unter der Schwann'schen Scheide liegt; liegen die Ränder des Niederschlags jedoch der Schwann'schen Scheide dicht an, dann allerdings ist bei der Feinheit dieser Membran eine Entscheidung kaum möglich, und es bedarf des Gewichtes der entwicklungsgeschichtlichen Thatsachen, um die Anschauung Grünhagen's als unhaltbar zu erweisen.

Endlich ist hier noch die Abhandlung Koch's[2]) zu besprechen, der, wie schon oben erwähnt, zwischen den Lantermann'schen Segmenten eine

1) Grünhagen, Ueber ein Endothelial-Element der Nervenprimitivscheide. Arch. für mikr. An. Bd. 23.

2) Koch, l. c.

Kittsubstanz annimmt. Von den Thatsachen, die er zur Begründung dieser Anschauung herbeizieht, kann nur die behauptete Silberimprägnation als beweisend in Frage kommen, während die übrigen viel eher zu Gunsten einer membranösen Zwischenmarkscheide sprechen. So besonders der Umstand, dass die trichterförmige Zwischensubstanz nicht selten an einem isolierten Achsencylinder, resp. dem mit diesem isolierten inneren Neurilemm hängen bleibt, während sie in anderen Fällen mit der isolierten Schwann'schen Scheide in Verbindung getroffen wird. Ein der Markscheide angehöriger Kitt müsste doch wohl mit dieser entfernt werden. Dass er sich, überdies unter so ungünstigen Umständen, isolieren sollte, erscheint kaum glaubhaft. Weiterhin sind die von Koch auf eine Quellung der Zwischensubstanz zurückgeführten breiten Einkerbungen zwischen den einzelnen Segmenten, wie sie bei Behandlung mit sehr verdünnter Osmiumsäurelösung auftreten, nicht in diesem Sinne zu erklären, sondern sie entstehen vielmehr durch eine Retraktion des Markes, wie meine Fig. I. c. zeigt, die gleichfalls, wie bereits oben betont wurde, sich kaum mit der Annahme eines Kitts vereinigen lässt.

Was nun die Silberbilder Koch's betrifft, so ist in erster Linie gegen ihre Deutung als Reaktion auf Kittsubstanz der Umstand geltend zu machen, dass sie nicht durch direkte Behandlung frischer Fasern mit der Silberlösung gewonnen werden können, sondern erst, nachdem die Fasern zwei Tage in Chloroform gelegen haben, während Kittlinien nur in frischem Gewebe auftreten. Ferner ist zu bemerken, dass als Bedingung für Kittniederschläge nirgends eine färbbare oder gar isolierbare Substanz vorhanden ist, wie wir eine solche zwischen den Lantermann'schen Segmenten kennen gelernt haben. Da im Uebrigen die Bilder Koch's, abgesehen von der durch die Quellung der Markscheide etwas modificierten Form, sehr gut mit den oben (Fig. XVI.) von mir beschriebenen übereinstimmen, so stehe ich nicht an, ihre volle Identität mit diesen zu behaupten. Ich beziehe sie also auf die schrägen Endflächen der Marksegmente und finde hiefür bei Koch selbst weitere Anhaltspunkte, indem seine Figuren, besonders deutlich Fig. 7. b., sowohl an der äusseren Oberfläche der Segmente als auch von der Schnürstelle aus ein Stück weit an der inneren einen deutlichen Silberniederschlag erkennen lassen. Die einzige Einwendung, die man gegen diese Identificierung erheben könnte, wäre die,

dass die Silbertrichter doppelt sein müssten. Allein einmal kann der nur durch die dünne Zwichenmarksscheide bedingte Raum zwischen den beiden Silberschichten so minimal sein, dass er sich der Beobachtung entzieht, dann aber scheint in den von Koch abgebildeten Fällen der Niederschlag vorzugsweise nur an den erweiterten Enden der Segmente entwickelt zu sein, was ich daraus entnehme, dass meistens nur der äussere Silberring deutlich ausgeprägt ist.

Dass die schrägen Endflächen der Segmente den gleichen Niederschlag zeigen, wie er unter denselben Umständen an der äusseren und inneren Oberfläche, die von Membranen begrenzt sind, auftritt, scheint mir sehr dafür zu sprechen, dass auch jene durch membranöse Scheidewände von einander abgegrenzt sind.

Im Vorstehenden sind, wie ich glaube, alle wesentlicheren Silberbilder der Nervenfasern sowohl nach ihrer Oertlichkeit, als, soweit dies möglich war, nach ihren Bedingungen dargestellt. Und wenn sich daraus auch keine weiteren Aufschlüsse über die Struktur der Fasern ergeben haben, so stehen die Resultate der Versilberung doch nirgends im Widerspruch mit den oben durch präcisere Methoden gewonnenen, ja vielfach dienen sie diesen gerade zur Stütze. Der Hauptzweck aber, den ich bei der gegebenen Darstellung im Auge hatte, ist erreicht, wenn es mir gelungen ist zu zeigen, welche Vorsicht bei der Deutung aller Silberbilder geboten erscheint.

B. Die periphere markhaltige Nervenfaser der Fische.

Ueber diese Fasern, die ich von Esox lucius und Torpedo marmorata untersuchte, habe ich nur weniges mitzuteilen. Zunächst ist zu erwähnen, dass dieselben die Fibrillen des Achsenraumes, wie sie Maley für die Amphibien und Säugetiere beschrieben hat, ganz in der gleichen Weise erkennen lassen; so besonders Torpedo, während beim Hecht die Fibrillen noch feinere sind. Auch konnte ich bei diesem die Achsenfibrillen an den Fasern der weissen Substanz des Rückenmarks darstellen.

Die wichtigste Frage, welche hinsichtlich der Fischnervenfasern vorliegt, ist die, ob das interannuläre Segment einkernig ist, wie bei den höheren Wirbeltieren, oder ob es mehrere Kerne enthält.

Es stehen sich hierin zwei Anschauungen gegenüber. Ranvier[1]), der zuerst die Nervenfasern der Rochen daraufhin untersuchte, beobachtete zwar, dass dieselben mehrere Kerne zwischen zwei Einschnürungen zeigen; allein er behauptete, dass nur einer von diesen Kernen der Schwann'schen Scheide angehöre, die anderen dagegen einer eng anliegenden zweiten Scheide (gaîne externe), die diesen Fasern eigentümlich sei. Später beobachtete Toel[2]), ohne die Ranvier'schen Angaben zu kennen, an den Fasern des Hechts mehrere Kerne zwischen je zwei Einschnürungen. Er bezog sie alle auf die Schwann'sche Scheide und kam so zu dem Resultat, dass es sich hier um mehrkernige Zellen handle. Nichtsdestoweniger blieb Ranvier später noch[3]) bei seiner Anschauung stehen und dehnte dieselbe auch auf die Fasern der Knochenfische aus.

Das einzige Moment, welches zu Gunsten derselben zu sprechen scheint, ist die von ihm mitgeteilte Thatsache, dass die Endverzweigungen der Nerven im elektrischen Organ von Torpedo wirklich nur einen einzigen interannulären Kern zeigen. Ranvier erklärt dies so, dass hier die äussere Scheide, deren Kerne im übrigen Verlauf die Mehrkernigkeit der Schwann'schen Scheide vortäuschen, sich abgehoben habe, und so das interannuläre Segment in seiner Reinheit vorliege. Allein nach den Massen, die Ranvier angibt, handelt es sich hier um äusserst schmale Fasern mit sehr kurzen Segmenten, so dass die ohne Zweifel richtige Beobachtung auch so erklärt werden kann, dass das interannuläre Segment bis zu einer gewissen Grösse einkernig bleibt. Und so verhält es sich in der That.

Ich bespreche zuerst die Fasern von Torpedo, die ich, ausschliesslich nach der oben für die höheren Wirbeltiere angegebenen Methode in Osmiumsäure conserviert, untersucht habe. Eine eigentümliche Form zeigen hier die Einschnürungen. Die Faser verschmälert sich nämlich nicht plötzlich, sondern ganz allmählich von beiden Seiten gegen den Schnürring zu, ähnlich wie eine Glasröhre, die man langsam über einer Flamme auseinanderzieht. Dabei zeigt sich der Achsenraum in der engsten Stelle auf mehr als den dritten Teil des gewöhnlichen Durchmessers

1) Ranvier, Des étranglements annulaires et des segments interannulaires chez les Raies et les Torpilles. Comptes rendus de l'Ac. d. Sciences 1872. p. 1129.

2) Toel, Die Ranvier'schen Schnürringe u. ihr Verhältnis zu den Neurilemmkernen. Zürich 1875.

3) Ranvier, Leçons etc.

reduziert. Das Mark reicht bis dicht an den Schnürring heran, das Ende des letzten Lantermann'schen Segments schmiegt sich jedoch nicht, wie beim Frosch, an das äussere, sondern an das innere Neurilemm an. Als weitere Eigentümlichkeit habe ich hervorzuheben, dass an den mir vorliegenden Fasern zwischen den einzelnen Lantermann'schen Segmenten ringförmig geschlossene fibrilläre Züge verlaufen, die sich in Fuchsin intensiv rot färben, und von denen ich nicht angeben kann, ob sie im Leben vorhanden oder Kunstprodukte sind.

Was nun die von Ranvier beschriebene äussere Scheide betrifft, so konnte ich sie an den meisten Fasern constatieren; manchmal jedoch fehlte sie ganz, in anderen Fällen war sie nur auf der einen Seite zu erkennen, auch ergab sie sich auf Querschnitten selten als ein vollkommener Ring. Ich glaube deshalb, dass wir es hier nicht mit einer specifischen Scheide zu thun haben, sondern mit einem dichten Bindegewebe-Belag, wie er auch an den Fasern der übrigen Wirbeltiere zuweilen vorkommt und hier in manchen Fällen zu einer Verwechslung mit der Schwann'schen Scheide geführt hat.

Die interannulären Kerne aber gehören ganz sicher nicht zu dieser Scheide.

Man kann besonders an Längsschnitten constatieren, dass sie, umgeben von Protoplasma, sämmtlich zwischen der Schwann'schen Scheide und dem Marke liegen, dass sie alle genau den gleichen Charakter besitzen und in gleicher Weise das Mark tief in den Achsenraum hineinwölben.

An den schwächsten Fasern, die mir vorlagen, beobachtete ich drei solche Kerne zwischen je zwei Einschnürungen, von denen der eine ungefähr die Mitte des Segments einnahm, während die beiden anderen constante Abstände von den Schnürringen einhielten.

Mit der Grösse des Segments wächst auch die Zahl der Kerne. Die höchste Zahl, die mir vorkam, waren sieben Kerne zwischen je zwei Einschnürungen, die ziemlich gleichmässig über das Segment verteilt waren. Die beiden äussersten Kerne waren von den Einschnürungen etwa halb so weit entfernt, als die übrigen von einander. Ausserdem konnte ich Beobachtungen machen, die ohne Zweifel auf eine Kernvermehrung zurückzuführen sind: ich fand zwei Kerne dicht neben einander liegend in einen

gemeinsamen Mantel von Protoplasma eingebettet, dann Stellen, wo zwei Kerne nur durch eine schmale Markerhebung getrennt waren, und von hier alle Uebergänge bis zur typischen Entfernung, die die Kerne von einander zeigen.

Stellt man diese Thatsachen mit den von Ranvier beobachteten einkernigen Segmenten zusammen, so wird sich für die Scheiden der Torpedofasern die Behauptung aufstellen lassen, dass sie, wie die der höheren Wirbeltiere, aus einkernigen Zellen hervorgehen, dass diese aber beim weiteren Wachstum nicht einkernig bleiben, sondern ihre Kerne vermehren. Dies scheint der einzige wesentliche Unterschied zu sein, der zwischen den Nervenfasern dieser Fische und denen der höheren Wirbeltiere besteht.

Die Fasern des Hechts scheinen von den beschriebenen in mehrfacher Hinsicht abzuweichen. Die Kerne, die ebenfalls in der Mehrzahl zwischen benachbarten Einschnürungen vorhanden sind (auch hier nimmt die Zahl der Kerne mit der Länge des Segmentes zu), besitzen einen ganz anderen Habitus als die der übrigen Wirbeltiere. Sie sind sehr klein und so platt, dass sie das Mark kaum in geringem Grade einbuchten, so dass sie an Fasern, die in Osmiumsäure gehärtet sind, auch im Profil nur mit Mühe erkannt werden können. Die Schwann'sche Scheide ist ausserordentlich dick, und, wie schon oben erwähnt wurde, in Trypsin vollständig unverdaulich. Es ist mir nun bis jetzt auf keine Weise gelungen, an diesen Fasern ein inneres Neurilemm zur Anschauung zu bringen, obgleich man bei der Dicke der Schwann'schen Scheide gerade hier eine deutliche Ausbildung desselben voraussetzen sollte. Stets scheinen an den Längsschnitten zwei an einander stossende Segmente der Schwann'schen Scheide, nachdem sie sich plötzlich stark verengt haben, zu einem Diaphragma-artig in das Lumen vorspringenden Ring zu verschmelzen, der mit ganz scharfem Rande aufhört. Auch scheint der durch Behandlung mit Höllensteinlösung in der Einschnürung auftretende Silberring nicht der Schwann'schen Scheide selbst anzugehören, sondern unterhalb derselben zu liegen.

Ich möchte jedoch auf diese Beobachtungen keinen besonderen Wert legen, bevor ich, wie ich beabsichtige, auch die Fasern anderer Teleostier, sowie solche der Ganoiden untersucht haben werde. Sollte sich jedoch das beschriebene Verhalten als allgemeiner geltend herausstellen,

so dürfte darin wohl ein älterer Zustand zu erkennen sein, der, wie ich glaube, für die Phylogenie der „markhaltigen" Nervenfasern von Bedeutung sein könnte.

II. Die Nervenfasern des Sympathikus.

Nachdem Maley in der Osmiumsäure-Härtung und darauf folgender Färbung mit Säure-Fuchsin eine Methode gefunden hatte, die Fibrillen der markhaltigen Nervenfasern so präcise darzustellen, dass dieselben auf Quer- und Längsschnitten ihrer Zahl und Stärke nach bestimmt werden können, erschien es wahrscheinlich, dass diese Behandlungsweise auch über die fibrilläre Struktur der marklosen Fasern neue Aufschlüsse zu geben im Stande sei. Ich beschäftigte mich infolge dessen zunächst mit den Fasern des Sympathikus verschiedener Wirbeltiere.

Während wir über die Nervenfasern der Spinalnerven dank einer Reihe eingehender Untersuchungen, unter denen in erster Linie diejenigen Ranvier's zu nennen sind, eine ziemlich detaillierte Kenntnis besitzen, herrscht über die sympathischen Fasern vielfach noch ein gewisses Dunkel. Es rührt dies besonders daher, dass das äusserst lebhafte Interesse, welches in früherer Zeit hauptsächlich aus physiologischen Gründen dieser Art der Nervenfasern zugewendet wurde, sich in neuerer Zeit mehr und mehr verlor, so dass die Fortschritte der Technik, die ja von einem gewissen Punkt an fast allein noch ein Fortschreiten in der Erkenntnis möglich machen, auf die sympathischen Fasern noch wenig Anwendung gefunden haben. Seit den denkwürdigen Untersuchungen Max Schultze's, deren Ergebnisse noch heute mehr oder weniger alle Lehr- und Handbücher der Histiologie beherrschen, sind, soviel ich weiss, nur zwei eingehendere Darstellungen über die Fasern des Sympathicus gegeben worden: von Key und Retzius[1]) und von Ranvier[2]). Die frühere Literatur ist in dem Werke der beiden ersteren Forscher so vollständig angeführt, dass ich bezüglich derselben hierauf verweisen kann; nur an einzelnen Punkten werde ich, wo es für das Verständnis der Darstellung notwendig erscheint, auf Angaben früherer Autoren näher eingehen.

1) Key und Retzius, Studien in der Anat. d. Nerven-Systems.
2) Ranvier, Leçons.

Das sympathische Nervensystem enthält zweierlei Arten von Fasern:

1) solche, die mit denen der Rückenmarksnerven übereinstimmen,

2) Fasern, die, wenn auch nicht dem Sympathicus ausschliesslich eigentümlich, so doch vorzugsweise hier vorkommen, und die nach ihrem Entdecker als Remak'sche Fasern bezeichnet werden können.

Obgleich demnach über die erste Art bezüglich ihres Baues nichts Besonderes zu erwähnen ist, erfordert dieselbe doch eine eingehendere Besprechung, da Fasern, die ihr zugerechnet werden müssen, mit den Remak'schen Fasern zusammengeworfen, ja gerade als Typus für dieselben hingestellt worden sind.

Die in Rede stehende Faserart ist im Sympathicus der verschiedenen Wirbeltierklassen in sehr wechselnder Menge vertreten. Allgemein lässt sich das Gesetz erkennen, dass sie, je höher wir in der Wirbeltierreihe aufsteigen, umso mehr gegen die Remak'schen Fasern in den Hintergrund tritt.

Stets finden sich nur wenige Fasern, die in ihrem Kaliber den peripheren Nervenfasern annähernd gleichkommen, weitaus die Mehrzahl wird durch ganz schmale Fasern repräsentiert.

Diese wurden zuerst von Ehrenberg[1]) beobachtet und dann von Rosenthal[2]) und besonders Bidder und Volkmann[3]) als specifische Elemente des Sympathicus beschrieben. Von den gewöhnlichen Nervenfasern sollten sich dieselben hauptsächlich durch ihre viel geringere Stärke, durch den Mangel des Markes und durch die häufig zu beobachtende perlschnurartige Gliederung (Varikositäten) unterscheiden. Allein schon Koelliker[4]) verwirft 1845 diese Unterscheidungsmerkmale als nicht stichhaltig und gelangt zu dem bestimmten Resultat, „dass zwar Unterschiede zwischen den gröberen und feineren Fasern des Sympathicus und der übrigen Nerven existieren, dass jedoch dieselben nicht genügen, um zwei besondere Arten von Nervenfasern, sympathische und cerebrospinale, aufzustellen." Die Remak'schen Fasern hielt Koelliker damals für Bindegewebe.

---

1) Ehrenberg, Beobachtung einer auffallenden, bisher unbekannten Struktur d. Seelenorgans. Berlin 1836.

2) Rosenthal, De formatione granulosa etc. Wratislav. 1839.

3) Bidder und Volkmann, Die Selbständigkeit des sympath. Nervensystems. Leipzig 1842.

4) Koelliker, Die Selbständigkeit und Abhängigkeit des sympathischen Nervensystems. Zürich 1845.

Nachdem als wesentlichstes Charakteristicum der peripheren Nervenfasern die Einschnürung mit ihren Consequenzen gefunden worden war, musste der Nachweis der Identität beider Faserarten davon abhängen, ob es möglich sei, auch an den schmalen sympathischen Fasern Einschnürungen zu demonstrieren. Es ist das Verdienst von Key und Retzius, mit Hilfe der Osmiumsäure für einen Teil der sympathischen Fasern diesen Nachweis geführt zu haben. Allein auch nach Behandlung mit diesem feinen Reagens bleibt noch ein Rest von Fasern übrig, die weder Spuren von Mark, noch eine Andeutung von Einschnürungen erkennen lassen: anscheinend marklose Fasern, die sich jedoch von den Remakschen bestimmt unterscheiden. Was ihre Charakteristik betrifft, so kann ich sie nicht besser als mit den Worten von Key und Retzius selbst beschreiben [1]). „Sie sind in der Regel die schmalsten unter den Nervenfasern, sowie ganz blass und farblos; durch Ueberosmiumsäure werden sie schwach graugelblich, zuweilen etwas glänzend. Ihre Ränder sind einander parallel, so dass die Breite während des Verlaufs ungefähr dieselbe bleibt. Die Breite der verschiedenen Fasern ist aber etwas wechselnd. Nur selten erscheint es so, als ob eine dünne Membran von der Oberfläche sich etwas abgehoben hätte. Der Inhalt der Faser ist homogen, hell, ohne wahrnehmbare Struktur. In gewissen Entfernungen finden sich nun an diesen Fasern länglich-ovale spindelförmige Kerne, welche den Fasern dicht ansitzen, in der Regel breiter als dieselben sind und längliche, knötchenartige Verdickungen an ihnen darstellen. Zuweilen erscheint es sogar, als ob die Kerne in den Fasern selbst liegen; bei genauerer Betrachtung findet man aber, dass sie nur seitlich anhaften. Obwohl man sonst sehr wenige Spuren einer die Fasern bekleidenden (Schwann'schen) Scheide wahrzunehmen vermag, spricht doch das Vorhandensein dieser Kerne stark für die Existenz einer solchen. An den Enden der Kerne sieht man zuweilen einige glänzende Körnchen, als ob auch hier ein schwacher Rest eines Zellenprotoplasma vorkommt. In der nächsten Umgebung der Kerne, an beiden Enden derselben, erweitert sich ausserdem die Faser oft ein wenig. Die Kerne, deren Grösse etwas wechselt (zwischen 0,0128 und 0,0192 mm) liegen nun an jeder Nervenfaser in fast regel-

1) Key und Retzius, l. c. p. 86.

mässigen Entfernungen von einander. Bei verschiedenen Fasern wechselt die Grösse und Entfernung ein wenig. . . . . Zwischen den Kernen fanden wir an den Fasern keine Andeutung von Einschnürungen, keine Querstriche oder sonstige Abteilungen. Durch Versilberung gelang es uns ebenso wenig, Spuren derartiger Bildungen hervorzurufen." Diese Darstellung, die ich vollkommen bestätigen kann, ist so treffend, dass ich ihr kaum etwas hinzuzusetzen wüsste.

Solche Fasern nun sind es, die vielfach mit den Remak'schen verwechselt worden sind. So können den Abbildungen, die Max Schultze [1]) von den Remak'schen Fasern gibt, nur die eben beschriebenen zu Grunde liegen, ferner glaube ich die Abbildung, die sich bei Krause [2]) in Fig. 224. von einem Querschnitt durch ein Stämmchen blasser oder Remak'scher Fasern findet, auf jene beziehen zu müssen, und auch Key und Retzius stellen dieselben direkt mit den Remak'schen zusammen.

Was zu dieser Identifizierung geführt hat, ist wohl wesentlich der Umstand, dass den in Rede stehenden Fasern mit den Remak'schen der Mangel des Markes gemeinsam ist, eine Uebereinstimmung, die bei dem Gewicht, das man dem Vorhandensein oder Fehlen des Markes bei der Einteilung der Nervenfasern allgemein beilegt, sehr bedeutsam erscheinen musste.

Abgesehen von dieser gemeinsamen Eigentümlichkeit unterscheiden sich jedoch die beschriebenen Fasern von den Remak'schen so bestimmt und lehnen sich dagegen so eng an die schwächsten markhaltigen an, dass sie in ihrem Bau viel eher mit diesen übereinzustimmen scheinen. Besonders die Kerne weisen mit Entschiedenheit auf eine solche Uebereinstimmung hin, indem sie nicht nur, ebenso wie die der markhaltigen Fasern, in regelmässigen Abständen von einander angetroffen werden, sondern auch in Form und Färbbarkeit, sowie in der Art und Weise, wie sie einwärts gegen die Faser vordrängen, auffallend jenen gleichen. Als ein weiterer wichtiger Punkt ist der zu erwähnen, dass sich die beschriebenen Fasern von den markhaltigen nicht scharf abgrenzen, sondern dass vielmehr zwischen beiden ein ganz continuierlicher Uebergang

1) M. Schultze, Untersuchungen über den Bau der Nasenschleimhaut. Abhandl. d. Nat. Ges. zu Halle. Bd. 7.

2) W. Krause, Allgemeine und mikroskop. Anatomie.

besteht. Ich habe, um dies anschaulich zu machen, in Fig. XVIII. (Taf. I.) eine Serie von in Osmiumsäure gehärteten Nervenfasern aus dem Grenzstrang des Sympathicus der Katze gezeichnet. In a. sehen wir eine Faser, die sowohl eine deutliche, wenn auch schwache, Markscheide, als auch eine gut ausgeprägte Einschnürung erkennen lässt. Steigen wir von hier aus abwärts zu allmählich schwächeren, kürzer segmentierten Fasern, so nimmt zunächst die Einschnürung an Deutlichkeit mehr und mehr ab; schliesslich verschwindet sie als solche gänzlich und nun kann die Grenze zweier an einander stossender Scheidenzellen durchaus nicht mehr wahrgenommen werden. Dagegen lässt sich die Segmentierung noch leicht daran erkennen, dass die Osmiumfärbung in der Mitte zwischen je zwei Kernen auf kurze Strecke eine leicht erkennbare Unterbrechung zeigt. Von da nimmt nun auch die durch Reduktion der Osmiumsäure bewirkte Färbung allmählich ab und schliesslich gelangen wir zu den beschriebenen Fasern (Fig. XVIII. e.), die vollkommen marklos erscheinen. Eine Segmentierung lässt sich an diesen, wie erwähnt, durchaus nicht mehr erkennen; allein nach dem eben Gesagten, darf daraus nicht geschlossen werden, dass dieselbe überhaupt nicht mehr existiert; denn wenn sie an den schwächsten markhaltigen Fasern nur dadurch wahrgenommen werden kann, dass das Mark unterbrochen ist, so muss selbstverständlich da, wo das Mark nicht mehr sichtbar gemacht werden kann, das Bild der Segmentierung verschwinden.

Dass dieselbe aber nichtsdestoweniger vorhanden ist, das lässt sich durch jene oben beschriebene Methode der Versilberung darthun, die darin besteht, dass man die Fasern vor Zusatz der Silberlösung Osmiumsäuredämpfen aussetzt. Nach der genannten Behandlung zeigen sich auch an diesen Fasern in der Mitte zwischen je zwei Kernen jene beiden charakteristischen Querlinien (Fig. XII. und XIII), die einen Zweifel über die Uebereinstimmung derselben mit den peripheren markhaltigen Fasern nicht mehr aufkommen lassen. Denn sie beweisen nicht nur die Existenz einer segmentierten Scheide, sondern auch, dass diese Scheide eine Substanz enthält, welche der Markscheide der stärkeren Fasern entspricht; ja, es ist nicht unmöglich, dass Spuren von Nervenmark auch den besprochenen Fasern zukommen.

Jedenfalls aber lassen sie das Mark nicht deutlicher erkennen als die Remak'schen Fasern, und wenn man nun, nach dem gewöhnlichen Einteilungsprinzip, die Nervenfasern in markhaltige und marklose sondiert, so muss man Fasern, die nach dem gleichen Typus gebaut sind, von einander trennen, verschieden gebaute in einer Gruppe vereinigen. Da überdies jene Einteilung auch vom physiologischen Standpunkte aus jeder Begründung entbehrt, so dürfte es eher gerechtfertigt sein, die beschriebenen Fasern mit den peripheren markhaltigen als „segmentierte Fasern" zusammenzufassen und diesen die Remak'schen Fasern als „unsegmentierte" gegenüberzustellen, zu welch letzterer Gruppe auch die Fasern der nervösen Centralorgane mit denen des Opticus, sowie die des Olfactorius zu rechnen wären.

Die zweite Art der im Sympathicus vorkommenden Nervenfasern wird von ihrem Entdecker Remak [1]) folgendermassen charakterisiert:

„Sie sind nicht von einer Scheide umgeben, sondern nackt, sehr durchsichtig, gelatinös, viel dünner als die meisten markhaltigen Fasern und auf ihrer Oberfläche fast immer längsgestreift. Sie zerfallen leicht in zarteste Fäden und sind in ihrem Verlauf vielfach sowohl mit ovalen Knötchen als auch mit ovalen oder runden, selten unregelmässig gestalteten Körperchen besetzt, die, einfach oder mehrfach gekernt, in ihrer Grösse mit gewöhnlichen Zellkernen nahezu übereinstimmen. Vom Bindegewebe unterscheiden sich diese organischen Fasern leicht, abgesehen von ihrem ganzen Aussehen und ihrer Consistenz hauptsächlich durch die Knötchen und gekernten Körperchen, sowie durch ihre grosse Neigung zur Verzweigung."

Die nervöse Natur der Remak'schen Fasern wurde bekanntlich lange Zeit bestritten. Namentlich erklärten Valentin [2]), Rosenthal [3]), Bidder und Volkmann [4]) und Koelliker [5]) dieselben für Bindegewebe. Erst in den fünfziger Jahren wurden sie allgemeiner angenommen. Max Schultze [6]) beschreibt

---

1) Remak, Observationes anat. et microscop. de syst. nerv. struct. Berlin 1838.

2) Valentin, Ueber die Scheiden der Ganglienkugeln und deren Fortsetzungen. Müller's Arch. 1839.

3) Rosenthal, l. c. — 4) Bidder und Volkmann, l. c. — 5) Koelliker, l. c.

6) M. Schultze, l. c. und: Allgemeines über die Strukturelemente des Nervensystems in Stricker's Handbuch.

sie als Nervenprimitivfibrillen-Bündel (Achsencylinder) mit Schwann'scher Scheide, eine Auffassung, die zu allgemeiner Geltung gelangt ist. Nur Ranvier, der in seinen Leçons einen ausführlichen Abschnitt den Remak-schen Fasern widmet, gibt eine wesentlich abweichende, unten näher zu besprechende Darstellung.

Bevor ich daran gehe, eine Analyse der Remak'schen Fasern zu versuchen, habe ich mich mit der Frage zu beschäftigen, was denn das Element sei, aus dem sich ein Stamm Remak'scher Fasern zusammensetzt. So wenig Klarheit herrscht in diesen Verhältnissen, dass der Begriff „Remak-sche Faser" einer präcisen Feststellung noch bedarf.

Schon bei oberflächlicher Untersuchung eines aus Remak'schen Fasern bestehenden Nerven, z. B. eines Milznerven der Wiederkäuer, überzeugt man sich leicht, dass derselbe aus parallel verlaufenden feinen Fäden besteht. Es fragt sich nun: gehören Bündel dieser Fibrillen irgendwie zu einem höheren Ganzen, d. h. zu einer Nervenfaser, zusammen?

Diese Frage wird allgemein bejaht. Remak zwar spricht sich in dieser Beziehung nicht mit Bestimmtheit aus. Max Schultze dagegen lässt ein Fibrillenbündel von einer Schwann'schen Scheide umschlossen sein und gibt damit eine ganz scharfe Definition. Allein eine solche Scheide existiert thatsächlich nicht. Darauf hat, soviel ich weiss, zuerst Ranvier hingewiesen; ich kann seine Angaben in dieser Hinsicht vollkommen bestätigen.

Gleichwohl gehören auch nach Ranvier gröbere oder feinere Bündel solcher „Elementarfasern" zu einer Remak'schen Faser zusammen. Charakterisiert soll dieselbe dadurch sein, dass sich oberflächlich an ihr Kerne finden, im Innern dagegen nicht.

Nach meinen Untersuchungen ist auch diese Auffassung nicht haltbar, vielmehr ist jede „Elementarfaser" als solche selbständig und repräsentiert an sich eine Nervenfaser.

Ich benützte zum Studium der Remak'schen Fasern vorzugsweise die Milznerven des Ochsen und Kalbes, die, wie bekannt, nur ganz wenige Fasern der anderen Art enthalten. Zupfpräparate und Querschnitte von in Osmiumsäure gehärteten und mit Säure-Fuchsin gefärbten Nerven ergaben folgende Resultate. Fasst man zunächst einen Querschnitt (Fig. XX. Taf. II.) ins Auge, so erkennt man, dass die eng an einander gelagerten Fibrillen, die in ihrer Gesammtheit bei mittlerer Vergrösserung den Eindruck einer

fast homogenen grau-roten Masse machen, durch intensiv rot gefärbte feine Züge in grössere und kleinere unregelmässig gestaltete Gruppen geschieden werden. Dass es sich hier nicht um geschlossene, die einzelnen Bündel umhüllende Membranen handelt, ersieht man, abgesehen von der ganzen Anordnung besonders daraus,, dass die Scheidewände häufig sich allmählich verlieren, so dass eine scharfe Abgrenzung der einzelnen Bündel von einander nicht gegeben ist. An Zupfpräparaten überzeugt man sich, dass die Scheidewände aus fibrillärem Bindegewebe bestehen, wie solches in ähnlicher Anordnung in allen Nerven vorkommt. Bei der Isolation mit Nadeln zerlegt sich der Nervenstamm naturgemäss zunächst in diese sehr verschieden breiten Bündel, die sich meist auf längere Strecken von einander trennen lassen. Sie repräsentieren vielleicht zum Teil die Remak'schen Fasern Max Schultze's, der die bei geeigneter Behandlung erscheinenden Kerne in der richtigen Voraussetzung, dass Nervenfibrillen kernlos sind, auf eine dieselben umhüllende Scheide bezog, die er mit der Schwann'schen Scheide der markhaltigen Fasern homologisierte.

Setzt man die Isolation weiter fort, so kann man einzelne Fibrillen (Fig. XIX.) (Taf. II.) nur selten auf längere Strecken frei legen, da dieselben sehr fest an einander haften. Gewöhnlich gelingt es nur, die gröberen Bündel streckenweise in feinere zu spalten, diese vielleicht abermals, auf welche Weise ein aus Fibrillenbündeln zusammengesetztes unregelmässiges Maschenwerk entsteht, das als Kunstprodukt kaum einer Erwähnung bedürfte, wenn nicht Ranvier darauf seine höchst eigentümliche Darstellung der Remakschen Fasern gegründet hätte. Er beschreibt dieselben als blasse, längsgestreifte, vielfach mit einander anastomosierende Fasern von sehr wechselndem Kaliber. Zwischen ganz feinen und solchen, welche den Durchmesser einer mittelstarken markhaltigen Faser erreichen, finden sich alle Uebergangsstufen. Eine Scheide existiert nicht. Die einzelnen Fasern verzweigen sich und vereinigen sich mit einander ohne irgend welche Regelmässigkeit. so dass ein Netzwerk mit kleineren oder grösseren Maschenräumen entsteht, die nur dadurch charakterisiert sind, dass ihr längster Durchmesser mit der Achse des Nerven parallel läuft. Die Längsstreifung beruht auf einer Zusammensetzung aus Fibrillen oder Elementarfasern, deren Anzahl je nach der Stärke der Faser grösser oder kleiner ist. Alle Zweige des Netzwerks besitzen Kerne, aber in sehr unregelmässiger Verteilung; an

einer Stelle der Faser liegen dieselben dicht gedrängt, während sie dann wieder auf lange Strecken fehlen können. Die Kerne liegen stets oberflächlich, bilden aber einen integrierenden Bestandteil der Faser.

Mit Ausnahme dieses letzten Punktes kann ich die Ranvier'sche Darstellung in sofern vollkommen bestätigen, als sie die Bilder, die man durch vorsichtiges Auseinanderziehen mit Nadeln erhält, sehr getreu wiedergibt. Allein diese ohne weiteres als den wirklichen Verhältnissen entsprechend aufzufassen, dafür scheint mir durchaus kein Grund vorzuliegen.

Ein Netzwerk, wie das beschriebene lässt sich ebenso gut aus einem Sehnen- oder Muskelbündel darstellen, ohne dass dabei an Anastomosen gedacht werden kann. Ausserdem muss man fragen, was denn bei einem Nerven, der nur aus Remak'schen Fasern besteht, in den vielfachen Maschenräumen des Netzwerkes liegt. Das einzige Moment, das Ranvier's Remak'sche Fasern als bestimmt begrenzte Elementargebilde zu charakterisieren scheint, liegt in der von ihm beschriebenen ausschliesslich oberflächlichen Lagerung der Kerne. Allein durch die Beifügung, dass es oft den Anschein habe, als befänden sich die Kerne im Innern der Faser, dass aber dann eben zwei Fasern einander dicht anlägen oder der Maschenraum so eng sei, dass er vom Kern vollständig ausgefüllt werde, verliert die obige Angabe sehr an Gewicht. Ich habe häufig Bündel isoliert, an denen die Kerne nicht oberflächlich lagen, und auch am Querschnitt finden sich dieselben meist mitten unter den Fibrillen, ohne dass ihre Lage irgendwie mit einer Grenze von Fibrillenbündeln im Zusammenhang stünde (Fig. XX.).

Ich glaube auf Grund dieser Thatsachen die Anschauungen, nach denen eine grössere Zahl von Fibrillen zu einer Nervenfaser vereint sei, als irrig bezeichnen zu müssen, woraus sich ergibt, dass jede Fibrille für sich eine Nervenfaser repräsentiert. Ich werde sie deshalb fortan als „Remak'sche Faser" bezeichnen. Diese nun muss weiter analysiert werden. Vergleicht man dieselbe mit einer Nervenfibrille, wie diese sich an Quer- und Längsschnitten durch markhaltige Nervenfasern darstellt, so ergeben sich zwischen beiden sehr wesentliche Unterschiede:

1) Der Durchmesser der Nervenfibrille beträgt nur etwa den vierten Teil von dem der Remak'schen Faser.

2) Die Nervenfibrille bleibt nach Behandlung mit Osmiumsäure nahezu farblos; die Remak'sche Fibrille erhält durch die Wirkung dieser Flüssigkeit einen deutlichen graugelben Ton. Auf Querschnitten aber durch in diesem Reagens erhärtete Nerven erscheint die erstere als ein homogener Punkt, der erst durch Färbung deutlich sichtbar gemacht werden kann, der Querschnitt der Remak'schen Faser dagegen (Fig. XX.) stellt einen graugelb gefärbten Ring dar mit farblosem Centrum, das sich nach Behandlung mit Säure-Fuchsin wie eine Nervenfibrille rosa färbt.

3) Der Inhalt des Achsenraumes der markhaltigen Faser gerinnt sowohl kurze Zeit nach dem Tode, als auch unter Einwirkung aller conservierenden Flüssigkeiten mit Ausnahme der Osmiumsäure zu einem centralen soliden Stab, an dem sich eine fibrilläre Struktur meist kaum mehr erkennen lässt; die Remak'schen Fasern ziehen sich nach dem Tode unter Collabierung an die bindegewebigen Scheidewände zurück [1]), behalten aber nach Behandlung mit allen Conservierungsflüssigkeiten ihre Selbständigkeit, so dass sie leicht als solche erkannt und isoliert werden können. Ueberhaupt zeigt die Remak'sche Faser der Nervenfibrille gegenüber eine sehr bedeutende Resistenz.

4) Die Nervenfibrille ist kernlos; die Remak'schen Fasern enthalten Kerne zwischen sich, die nur zu ihnen gehören können und die sich von den Kernen des Bindegewebes leicht unterscheiden lassen. Darüber allerdings, ob die Kerne den einzelnen Fasern zugerechnet werden müssen oder ob sie nur zwischen denselben liegen, kann man nur schwer zu einem unzweifelhaften Resultat gelangen. Ich kann nur soviel mitteilen, dass die Kerne auch bei weit fortgesetzter Isolation nie frei werden, d. h. herausfallen, sondern dass sie stets den Fasern anhaften. Auch trifft man sie häufig mit einem Rest Protoplasma, in dem ich übrigens niemals die von Key und Retzius beschriebenen und gezeichneten Körnchen wahrnahm, vollständig isolierten Fasern anhaftend (Fig. XIX.), und hier macht

1) Hierauf beziehe ich eine Notiz von Fr. Huth (Beitrag zur Kenntnis der symp. Nerven. Nachr. v. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1885. Nr. 4.), wonach die sympathischen Fasern in Form von Röhren angeordnet sein sollen, welche Lymphräume umschliessen. Von Milznerven, die erst einige Zeit nach dem Tode des Tieres in Osmiumsäure eingelegt worden waren, erhielt auch ich Querschnitte, welche eine solche Auffassung nahe legen. Die Querschnitte durch den ganz frisch mit Osmiumsäure behandelten Nerven lehren jedoch, dass die Remak'schen Fasern normaler Weise die von den bindegewebigen Scheidewänden abgegrenzten Räume vollständig und in gleichmässiger Verteilung ausfüllen.

es nun in der That nicht selten den Eindruck, als gehörten sie diesen allein an, ohne jedoch in deren Verlauf eingeschaltet zu sein, indem sich die Faser bei günstiger Lagerung neben dem Kern vorbei verfolgen lässt.

Aus den angeführten Unterschieden ist zunächst der Schluss zu ziehen, dass die beiden verglichenen Gebilde einander nicht gleichwertig sind; vielmehr ergibt sich die Remak'sche Faser der Nervenfibrille gegenüber als etwes Zusammengesetztes; sie ist also jedenfalls nicht Nervenfibrille allein. Dass sie eine solche aber enthält, lässt zich nach allen unseren Erfahrungen mit ziemlicher Sicherheit vermuten. In der That steht nichts im Wege, den die Achse der Remak'schen Faser einnehmenden Faden, der sich wenigstens gegen Osmiumsäure und Fuchsin wie eine Nervenfibrille verhält und mit dieser auch in den Dimensionen ungefähr übereinstimmt, als solche anzusprechen. Damit muss sich aber von selbst der Gedanke aufdrängen, dass der periphere, an Masse überwiegende Bestandteil der Remak'schen Faser nichts anderes ist als eine diese Nervenfibrille dicht umschliessende Scheide. Ich richtete deshalb mein Angenmerk darauf, ob sich nicht die in der Scheide der anderen Nervenfaserart enthaltenen specifischen Substanzen auch hier nachweisen liessen.

Was die Prüfung auf Nervenmark betrifft, so muss die Osmiumsäure in allen Fällen, in denen es sich um dünne Schichten oder um eine feine Verteilung dieser Substanz handelt, als ein völlig unzulängliches Reagens bezeichnet werden. Die charakteristische blauschwarze Färbung tritt nur bei grösseren Mengen von Mark auf; unter den genannten Umständen dagegen verursacht die Osmiumsäure nur einen leichten grauen Ton. So ist man im Stande, von starken markhaltigen Nervenfasern, die in Osmiumsäure gehärtet worden sind und intakt tief schwarz erscheinen, so feine Schnitte herzustellen, dass die dadurch gewonnenen dünnen Lamellen der Markscheide nur einen schwachen grauen Ton zeigen, den man, ohne es zu wissen, schwerlich für eine Reaktion auf Nervenmark halten würde. Man kann deshalb nicht erwarten, dass, wenn die Remak'schen Fasern Mark enthalten, dieses sich durch Osmiumsäure nachweisen lasse.

Viel feiner ist für die genannten Fälle eine Methode, die von Weigert [1]) für das Rückenmark angegeben worden ist und die darin besteht. dass man

1) Weigert, Ausführliche Beschreibung d. in Nr. 4 erwähnten neuen Färbungsmethode für das Centralnervensystem. Fortschritte der Medizin. 1884. Nr. 6.

das in Müller'scher Flüssigkeit erhärtete Objekt mit Haematoxylin überfärbt und die Schnitte eine kurze, für den einzelnen Fall empirisch festzustellende Zeit lang in einer Lösung von 2 Teilen Borax und 2,5 Teilen rotes Blutlaugensalz auf 100 Teile Wasser auszieht. Das Nervenmark hält das Haematoxylin am längsten und erscheint, während die Kerne und das Bindegewebe schon gelb geworden sind, noch intensiv blau. Dieser Contrast der Färbung ist auch bei feiner Verteilung des Markes noch leicht wahrzunehmen.

Schnitte von Milznerven, die ich nach dieser Methode behandelt habe, zeigen nun bei völliger Gelbfärbung der bindegewebigen Scheiden und der Kerne im Bereich der Remak'schen Fasern einen so deutlichen blauen Ton, dass ich nicht zweifle, dass diese Fasern, wenn auch in geringer Menge und feinster Verteilung, Nervenmark enthalten.

Von noch besserem Erfolg war die Prüfung auf Neurokeratin. Ich unterwarf ein Stück vom Milznerven des Kalbes und zur Controle ein etwa gleich grosses vom Ischiadicus des Frosches einer vierundzwanzigstündigen künstlichen Verdauung in Trypsin bei einer Temperatur von ungefähr 40°. Während sich nach Alkoholextraktion an den markhaltigen Fasern die bekannten Spongiosanetze zeigten, erschienen die Remakschen Fasern in ihrer Form fast gänzlich unverändert. Sie liessen sich ohne besondere Schwierigkeit isolieren, ihr Durchmesser war etwas kleiner geworden und an Stelle des homogenen Aussehens war eine leichte Granulierung sichtbar. In Färbung und Lichtbrechungsvermögen aber zeigten sie eine derart vollkommene Uebereinstimmung mit den Spongiosabälkchen, dass wir es unzweifelhaft auch hier mit Neurokeratin zu thun haben.

Nach diesen Thatsachen betrachte ich die Remak'sche Faser als eine Nervenfibrille mit dicht anliegender Scheide: abgesehen von der nackten Fibrille die einfachste Form der Nervenfaser.

Ob Nervenfibrille und Scheide genetisch zusammengehören oder ob auch hier, wie ich glauben möchte, die Scheide durch sekundäre Umwachsung der Fibrille von Seite embryonaler „Scheidenbildungszellen" entsteht, als deren Reste die beschriebenen Kerne anzusehen wären, kann erst durch Untersuchung der Entwickelung festgestellt werden. Zellgrenzen, überhaupt regelmässige Silbermarken konnte ich an den Remakschen Fasern auf keine Weise zur Anschauung bringen.

III. Die Nervenfasern des Olfactorius.

Die Fasern des Olfactorius werden allgemein als mit den Remak'schen Fasern identisch oder denselben wenigstens nahe verwandt beschrieben, wobei die Marklosigkeit als das hauptsächlichste gemeinsame Charakteristicum in Anschlag gebracht wird. Unsere Kenntnisse über den Bau des Olfactorius beruhen fast ausschliesslich auf den Untersuchungen Max Schultze's [1]) und haben seitdem kaum eine nennenswerte Bereicherung erfahren. In der That muss es nach der erschöpfenden Analyse, die dieser Forscher gegeben hat, fast unmöglich erscheinen, ohne wesentlich andere Methoden und neue Gesichtspunkte seine Darstellung irgendwie zu modificieren oder zu erweitern.

Nur die Vergleichung mit den inzwischen besser bekannt gewordenen nervösen Bestandteilen der markhaltigen Fasern setzt uns in den Stand, nicht die Darstellung Max Schultze's, sondern nur die Auffassung, die er über den Bau des Olfactorius begründet hat, als irrtümlich zu erkennen.

Ich beginne meine Darstellung mit dem Olfactorius des Hechts. Derselbe besteht aus scharf abgegrenzten, von einer relativ dicken, strukturlosen Scheide umschlossenen Fasern, deren Durchmesser innerhalb sehr weiter Genzen (10—40 μ) schwankt. Der Querschnitt (Fig. XXI. Taf. II.) ist teils rundlich, meist aber durch gegenseitige Abplattung der einzelnen Fasern unregelmässig gestaltet.

Die Scheide ist vollständig ausgefüllt mit einer Substanz, die an der frischen Faser eine leicht erkennbare, aber verschwommene Längsstreifung zeigt. Nach Behandlung mit Osmiumsäure erscheint dieser Inhalt dunkelgrau gefärbt und lässt gleichfalls nur eine schwache Längszeichnung wahrnehmen. Bei geeigneter Behandlung zeigt sich die Scheide an ihrer Innenfläche in unregelmässiger Verteilung mit Kernen besetzt; Zellgrenzen lassen sich nicht in ihr nachweisen.

Nach längerer Maceration in 0,04%iger Chromsäurelösung oder 0,4—0,6%iger Lösung von chromsaurem Kali konnte nun Max Schultze aus dem Inhalt der Nervenfaser zweierlei Bestandteile isolieren: zahllose äusserst feine Fibrillen und eine feinkörnige Masse, „von der es schwer

1) M. Schultze, Untersuch. über den Bau der Nasenschleimhaut etc.

zu sagen ist, ob sie den Fäserchen selbst angehört oder zwischen denselben liegt.“ Damit war der Bau der Olfactoriusfaser im Wesentlichen gekennzeichnet; zugleich aber hatte Max Schultze hier zum ersten Mal die Zusammensetzung einer Nervenfaser aus Nervenfibrillen nachgewiesen und damit den Ausgangspunkt gewonnen für seine bekannten weiteren Untersuchungen [1]), in denen er die Lehre von der fibrillären Struktur für alle Nervenfasern durchführte und begründete. Indem er auch den Achsencylinder der markhaltigen Nervenfaser als ein Bündel von Nervenfibrillen mit körniger interfibrillärer Substanz betrachtete, setzte er denselben dem Inhalt der Olfactoriusfaser gleich und definierte diese demnach als „Achsencylinder mit Schwann'scher Scheide.“

Wenn wir jetzt diese Definition verwerfen müssen, so ist der Irrtum Max Schultze's nicht etwa darin zu suchen, dass er die Fasern des Olfactorius nicht richtig erkannte, sondern in seiner unrichtigen Vorstellung über den „Achsencylinder“ der markhaltigen Faser. Nachdem dieser sich als ein Bündel reiner Nervenfibrillen erwiesen hat, die nur von einer lymphatischen Flüssigkeit umspült sind, muss der Inhalt der Olfactoriusfaser auf den ersten Blick als etwas Zusammengesetzteres erscheinen, das sich dem „Achsencylinder“ nicht ohne weiteres gleichsetzen lässt.

Um dies näher zu erläutern, verweise ich auf den Querschnitt, der in Fig. XXI. wiedergegeben ist [2]). Ich bemerke dabei, dass sich eine Analyse nur an ganz dünnen Schnitten ausführen lässt. Hier ist zunächst zu erkennen, dass, wie ich Max Schultze gegenüber bemerken muss, wenigstens in den gröberen Fasern von der äusseren Scheide sekundäre Membranen ausgehen, welche die Faser in zwei oder mehrere Abteilungen zerlegen. Die dadurch abgegrenzten Räume sieht man nun am Querschnitt von einem grau gefärbten Reticulum, (der interfibrillären Substanz Max Schulze's) erfüllt, durch welches annähernd gleich grosse, vollständig von einander abgeschlossene Maschenräume entstehen, deren Durchmesser ungefähr $^1/_2\ \mu$ beträgt. Längsschnitte und Zupfpräparate ergänzen dieses Bild dahin, dass die durch die Osmiumsäure grau gefärbte Substanz in

1) M. Schultze, Observationes de structura cellularum fibrarumque nervearum. Bonnae 1868, und: Allgemeines über die Strukturelemente d. Nervensystems in Stricker's Handbuch.

2) Die Schnitte wurden nach derselben Methode angefertigt, die oben (pag. 2.) für die markhaltigen Fasern ausführlich beschrieben worden ist.

Form zarter mit einander verschmolzener Röhrchen angeordnet ist, welche das ganze Lumen erfüllen.

In jedem solchen Röhrchen liegt eines der von Max Schultze entdeckten „Fäserchen", am Querschnitt meist bloss durch den roten Ton erkennbar. Nur an einzelnen besonders dünnen Schnitten gelang es mir den Querschnitt der Fibrille als einen roten Punkt zu erkennen, der das Lumen des Röhrchens nicht völlig ausfüllt.

Wir haben hier also ebenso wie bei den Remak'schen Fasern jede einzelne Nervenfibrille von einer Scheide umhüllt; diese aber gehört nicht einer Fibrille ausschliesslich an, sondern nimmt zugleich an der Einscheidung der benachbarten Teil. Die Längsstreifung aber, die sich an der intakten Faser beobachten lässt, ist nicht, wie Hans Schultze [1]) anzunehmen scheint, als der Ausdruck der Nervenfibrillen zu betrachten, sondern sie ist durch die Röhrenform der Fibrillenscheiden bedingt. Die Fibrillen selbst können nur nach der von Max Schultze vorgeschriebenen Maceration durch Isolation zur Anschauung gebracht werden.

Woraus bestehen nun die beschriebenen Fibrillenscheiden? Beim Hecht muss sich schon nach Behandlung mit Osmiumsäure sofort der Gedanke an Mark aufdrängen. Die Substanz erhält in diesem Reagens eine dunkelgraue Färbung; auch färbt sich der Olfactorius als Ganzes in Osmiumsäure fast ebenso rasch schwarz wie ein peripherer Nerv. Die Prüfung mit der oben beschriebenen Methode von Weigert ergab demgemäss eine intensive Blaufärbung. Man kann übrigens auch einen direkteren Nachweis liefern. Lässt man den Nerven noch längere Zeit nach dem Tode des Tieres im Körper, so fliesst die Substanz der Fibrillenscheiden zu grösseren Tropfen zusammen, die sich nun in Osmiumsäure tief schwarz färben und die charakteristischen Myelinformen zeigen.

Ausserdem enthalten die Fibrillenscheiden aber auch Neurokeratin. Behandelt man einen Olfactorius 24 St. mit Trypsin, so bleibt innerhalb der unverdauten äusseren Scheiden ein ziemlich beträchtlicher krümeliger Rest zurück, der jedoch von der ursprünglichen Anordnung nichts mehr erkennen lässt.

---

1) Hans Schultze, Axencylinder und Ganglienzelle. Archiv für Anatomie und Entw. 1878. pag. 277, Fig. 17.

Die Olfactoriusfasern der höheren Wirbeltiere, von denen ich die des Frosches, der Schildkröte (Testudo graeca) und des Meerschweinchens untersucht habe, schliessen sich an das für den Hecht beschriebene Verhalten eng an. Fibrillen und Fibrillenscheiden stellen sich ganz in der beschriebenen Weise dar, nur enthalten die letzteren, je höher wir steigen, umso weniger Mark, wie sowohl die Reaktion gegen Osmiumsäure als gegen die Weigert'sche Färbung beweist.

Die Frage nach der Abgrenzung der einzelnen Fasern ist jedoch hier schwieriger zu beantworten. Max Schultze lässt dieselben ebenso wie die des Hechts von einer kernhaltigen Membran umhüllt sein. Ich konnte eine solche weder durch Isolation noch an Querschnitten mit Sicherheit nachweisen. Während sich die Fasern des Hechts sehr leicht isolieren lassen, ist bei denen der übrigen untersuchten Wirbeltiere ziemliche Vorsicht geboten; sonst erhält man nur Bruchstücke. Auch bei möglichster Sorgfalt zeigen die isolierten Bündel nie so scharfe Contouren, dass man daraus auf das Vorhandensein einer Membran schliessen könnte.

Am Querschnitt lässt sich zwar eine Zerlegung in grössere und kleinere unregelmässig gestaltete Gruppen leicht erkennen; diese aber sind nicht durch scharfe Doppellinien von einander geschieden, wie dies bei Membranen, welche den einzelnen Abteilungen angehörten, der Fall sein müsste, sondern nur durch einfache oft undeutliche und punktiert erscheinende Züge, die nicht einmal den Sekundärscheiden der Hechtfasern gleichgestellt werden können.

Ich halte die vorliegenden Scheidewände deshalb für flächenhaft ausgebreitetes Bindegewebe, wie es sich in gleicher Anordnung zwischen den Fasern der weissen Substanz des Rückenmarks findet, und glaube Max Schultze in diesem Punkt umso eher widersprechen zu dürfen, als derselbe an Bündeln Remak'scher Fasern, wo auch Ranvier das Vorhandensein von Membranen entschieden in Abrede stellt, gleichfalls solche beschreibt.

Will man nun eine so begrenzte Gruppe als Nervenfaser bezeichnen, so wird sich diese zu der des Hecht-Olfactorius etwa ebenso verhalten, wie eine markhaltige Faser der weissen Substanz des Rückenmarks zu einer peripheren markhaltigen Nervenfaser.

Vergleichen wir nun auf Grund der gewonnenen Resultate die Olfactoriusfaser mit dem Fibrillenbündel der markhaltigen Nervenfaser, so kann von einer Gleichstellung beider nicht mehr die Rede sein. Will man den Vergleich zwischen beiden Faserarten durchführen, so muss man die Olfactoriusfaser mit der ganzen markhaltigen centralen oder peripheren Nervenfaser vergleichen. Dann entspricht der „Achsencylinder" der letzteren der Gesammtheit der in einer Olfactoriusfaser enthaltenen Nervenfibrillen, die „interfibrilläre" Substanz dieser Fasern aber ist der Markscheide jener als gleichwertig zu erachten. Der Unterschied zwischen beiden Faserarten ist nur der, dass im einen Fall die die Scheiden formierenden Substanzen jede Fibrille des Bündels einzeln umgeben, während sie im andern Fall das Fibrillenbündel in seiner Gesammtheit umschliessen.

Für die Berechtigung einer solchen Vergleichung kann, wie ich glaube, auch das an den Olfactoriusfasern zu beobachtende Verhalten der Kerne angeführt werden, deren Besprechung ich aus diesem Grunde bis hierher verschoben habe. An den Fasern der über den Fischen stehenden Wirbeltiere erkennt man sehr leicht, dass nicht nur zwischen ihnen Kerne liegen, sondern auch in ihrem Innern. Diese zeigen ein eigentümliches Verhalten, wie der in Fig. XXII. (Taf. II.) wiedergegebene, nicht sehr dünne Schnitt durch den Olfactorius des Frosches erkennen lässt. Es strahlen nämlich von denselben nach allen Richtungen rot gefärbte Züge aus, die, teilweise mit denen benachbarter Kerne anastomosierend, sich in ein feineres ebenfalls noch durch rote Färbung ausgezeichnetes Reticulum aufzulösen scheinen, an das sich dann erst die eigentlichen Fibrillenscheiden anschliessen. Auch beim Hecht finden sich mitten in der Faser und ohne Beziehung zu den Sekundärscheiden solche Kerne, die das beschriebene Verhalten gleichfalls erkennen lassen (Fig. XXI.). Ich glaube daraus und besonders aus dem Umstand, dass die im Innern der Faser gelegenen Kerne kaum zu anderen Elementen in Beziehung gebracht werden können, auf einen genetischen Zusammenhang zwischen ihnen und den Fibrillenscheiden schliessen zu dürfen. wonach diese ebenso wie die Scheiden der „markhaltigen" Fasern als accessorische Bildungen zu betrachten wären, die mit den Nervenfibrillen ursprünglich nichts zu thun haben. Der Beweis hiefür ist natürlich erst von der Entwicklungsgeschichte zu erwarten.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Kupffer, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung ich die vorstehenden Untersuchungen ausgeführt habe, spreche ich für die Förderung, die er mir in jeder Hinsicht im reichsten Masse dabei zu Teil werden liess, meinen besten Dank aus. In gleicher Weise bin ich dem Assistenten des Instituts, Herrn A. Boehm, für seine vielfache Unterstützung mit Rat und That zu herzlichstem Danke verpflichtet.

Erklärung der Abbildungen.

Alle Figuren, für die nicht ein anderes System besonders angegeben ist, sind bei Anwendung von Zeiss homog. Immersion 1/18 gezeichnet.

Fig. I. a. b. c. Längsschnitte durch drei Fasern aus dem Ischiadicus des Frosches. Behandlung: Osmiumsäure 1/2%, Säure-Fuchsin. (Siehe den Text pag. 2.)

Fig. II. Längsschnitt durch eine Ranvier'sche Einschnürung. Frosch, Ischiadicus. Behandlung wie in Fig. I.

Fig. III. Desgleichen.

Fig. IV. Faser aus dem Ischiadicus des Frosches. Der Nerv wurde 24 Std. mit Kochsalzlösung 0,75%, dann mit Osmiumsäure behandelt. Glycerinpräparat. — Vom Schnürring aus lässt sich nach beiden Seiten das innere Neurilemm eine Strecke weit verfolgen.

Fig. V. a. b. c. Drei Einschnürungen von Fasern aus dem Ischiadicus des Frosches, während des durch Einwirkung von destilliertem Wasser hervorgerufenen „Markstromes" gezeichnet. Das Mark des nach unten gerichteten Segments beginnt sich durch den Schnürring hindurchzuschieben. (Seibert und Krafft. Imm. VIII. Oc. I.)

Fig. VI. Schematischer Längsschnitt zu Fig. V., um das Verhalten des (mit roter Farbe gezeichneten) Neurilemms zu demonstrieren.

Fig. VII. und **VIII.** Fasern aus dem Ischiadicus des Frosches, ohne Zusatz einer Flüssigkeit isoliert und dann mit 1/2%iger Silberlösung behandelt. Glycerinpräparat.

Fig. IX. und **X.** Fasern aus einem 24 Std. in 1/2%iger Silberlösung gelegenen Frosch-Ischiadicus isoliert. Glycerinpräparat.

Fig. XI. Faser aus dem Ischiadicus des Frosches frisch isoliert und dann mit einer Mischung von Silberlösung (1%) und Salpetersäure (10%) z. gl. T. behandelt. Glycerinpräparat.

Fig. XII. Segmentierte Fasern aus dem Grenzstrang des Sympathicus des Kaninchens, frisch auf dem Objektträger isoliert, dann Osmiumsäuredämpfen ausgesetzt und nun mit Silberlösung (1/2%) behandelt. (Hartnack, Obj. VII. Oc. 2.)

Fig. XIII. Desgleichen. Die einzelnen Fasern besser isoliert. Färbung mit Pikrocarmin. (Hartnack, Obj. VII. Oc. 2.)

Fig. XIV. a. b. Zwei Fasern aus dem Ischiadicus des Frosches. Behandlung wie bei dem Präparat der Fig. XII. (Hartnack, Obj. VII. Oc. 2.)

Fig. XV. a. b. Desgleichen. Färbung mit Säure-Fuchsin. (Hartnack, Obj. VII. Oc. 2.)

Fig. XVI. Faser aus dem Ischiadicus des Frosches. Behandlung wie bei dem Präparat der Fig. XII.

Fig XVII. Schematischer Längsschnitt zu den Figuren XIV—XVI. Das Neurilemm ist mit roter, die Markscheide mit grauer, der Silberniederschlag mit schwarzer Farbe gezeichnet.

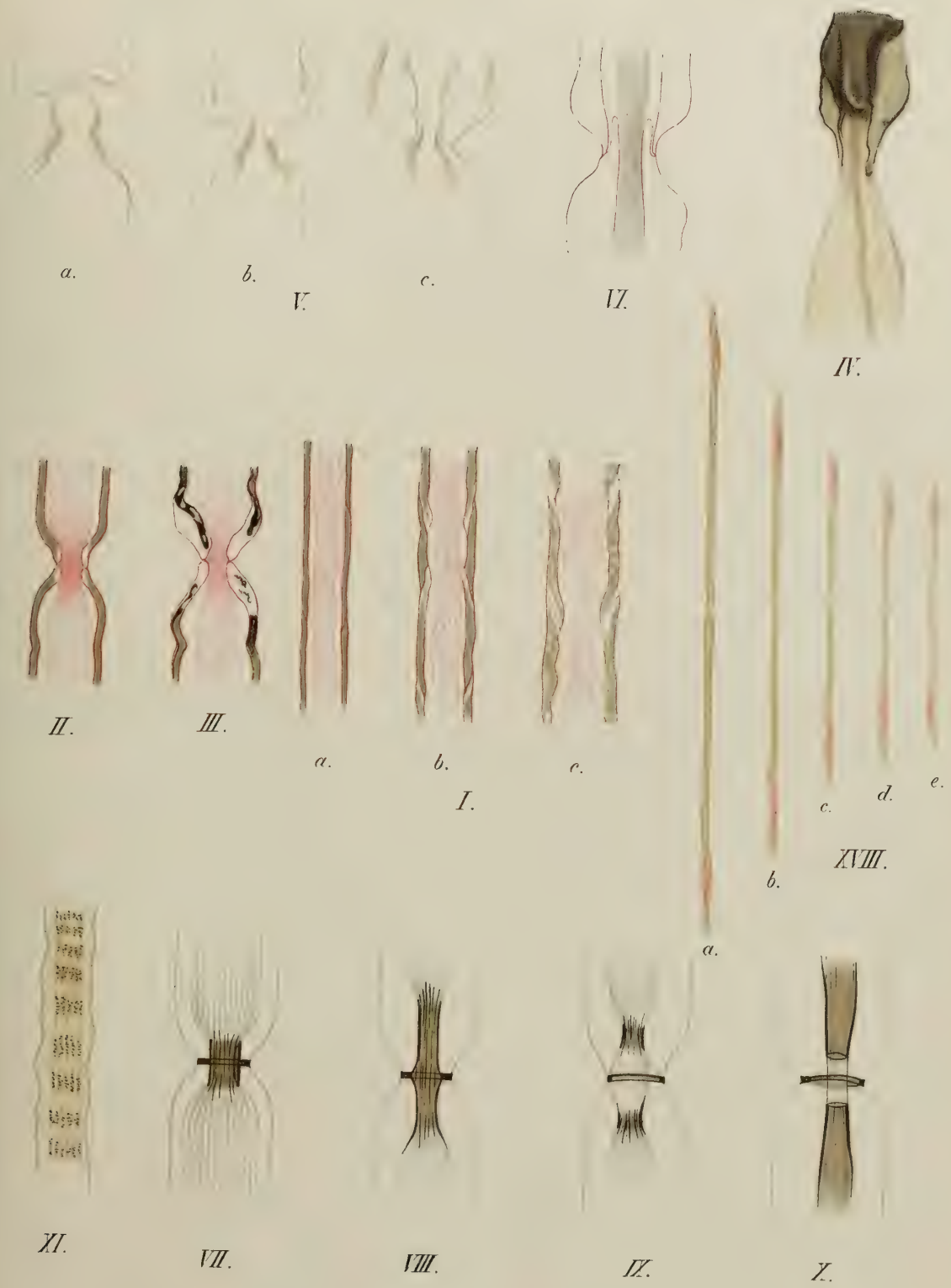
Fig. XVIII. Fünf Fasern aus dem Grenzstrang des Sympathicus der Katze. Behandlung: Osmiumsäure 1/2%, Pikrocarmin. Vergrösserung 300. (Hartnack, Obj. VII. Oc. 2.)

Fig. XIX. Remak'sche Fasern und eine markhaltige Faser aus dem Milznerven des Kalbes. Behandlung: Osmiumsäure 1/2 %, Pikrocarmin. Vergrösserung 660.

Fig. XX. Ein Stück eines Querschnittes durch den Milznerven des Kalbes. Behandlung: Osmiumsäure, Säure-Fuchsin. Im grösseren Teil sind nur die bindegewebigen Scheidewände und die Kerne eingezeichnet. Rechts unten Querschnitt durch eine markhaltige Faser. Vergrösserung 800.

Fig. XXI. Ein Stück eines Querschnittes durch den Olfactorius des Hechts. Behandlung: Osmiumsäure 1/2%, Säure-Fuchsin. Die Fibrillenscheiden sind nur in einer Faser eingezeichnet, die Nervenfibrillen nur in einem Teil dieser Faser. In der Mitte ein Capillargefäss mit zwei Blutkörperchen. a) Kerne der äusseren Scheide, b) Kern einer Sekundärscheide, c) Kern mit davon ausstrahlenden Zügen, ohne Beziehung zu den genannten Scheiden. Vergrösserung 1150.

Fig. XXII. Stück eines Querschnitts durch den Olfactorius des Frosches. Behandlung wie bei dem Präparat der Fig. XXI. Unten ein Capillargefäss.


a.
b.
c.
V.
VI.
IV.
II.
III.
a.
b.
c.
I.
a.
b.
c.
d.
e.
XVIII.
XI.
VII.
VIII.
IX.
X.

XIII.

XII.

XVII.

a

XIV.

b.

a. b.

XV.

XXI.

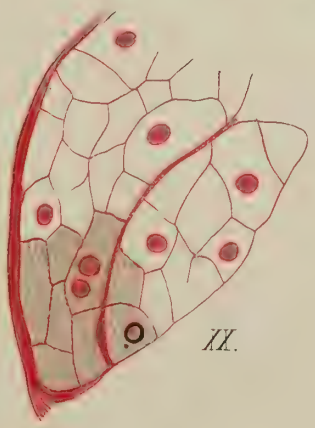
a.

b.

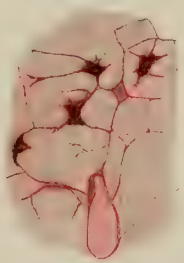
c.

XVI.

XIX.



XX.



XXII.

Ueber

Homoeosaurus Maximiliani

von

Dr. Ludwig von Ammon.

(Mit 2 Tafeln.)

Ueber Homoeosaurus Maximiliani.

Die im Titel dieser Arbeit genannte fossile Reptilienart kann als der Hauptvertreter des Lacertiliertypus in der jurassischen Fauna gelten. Neben *Homoeosaurus* kommen in den gleichen Schichten (Solenhofer Schiefer oder äquivalente Bildungen) als verwandte Formen die Gattungen *Sapheosaurus*, *Leptosaurus* und *Ardeosaurus* vor, welchen sich vielleicht noch *Atoposaurus* und *Acrosaurus* anschliessen dürften. Am ausführlichsten sind die erwähnten Geschlechter in dem grossen Werk von H. von Meyer über die Reptilien des lithographischen Schiefers behandelt[1]). Es bilden dieselben mit dem in der Organisation, wie es scheint, etwas weiter abstehenden älteren fossilen Genus (aus englischer Trias) *Telerpeton* Mantell die ausgestorbene Gruppe der *Homoeosauria* Huxley[2]).

Die Angehörigen dieser Gruppe unterscheiden sich von der Mehrzahl der jüngeren Eidechsen hauptsächlich durch den Besitz von biconcaven (amphicoelen) Wirbeln. Unter den lebenden Lacertiliern oder Sauriern überhaupt weisen nur die Ascalaboten und die Rhynchocephalen das gleiche Merkmal auf. Mit ersteren, den Geckonen, bestehen, das Auftreten von, wenn gleich etwas anders beschaffenen, Bauchrippen vielleicht ausgenommen, keine näheren verwandtschaftlichen Verhältnisse, dagegen ergeben sich in systematischer Beziehung weitere Anknüpfungspunkte an die *Rhynchocephalia* Günther. Letztere Gruppe begreift bekanntlich als einzige recente Gattung die in Neu-Seeland lebende *Hatteria* in sich,

1) Hermann v. Meyer. Zur Fauna der Vorwelt. Reptilien aus dem lithographischen Schiefer des Jura in Deutschland und Frankreich. Mit 21 Tafeln. Frankfurt a. M. 1860. S. 101—117.

2) H. Huxley. Handbuch der Anatomie der Wirbelthiere. Deutsche Ausgabe von Ratzel. Breslau 1873. S. 192.

ausserdem werden zu ihr von fossilen Formen die mit *Telerpeton* zusammen vorkommende Gattung *Hyperodapedon* Huxley [3]) und ferner *Rhynchosaurus* Owen [4]), gleichfalls aus englischen Triasbildungen stammend, gezogen. Die Vergleichungspunkte, welche die Homoeosaurier mit den Rhynchocephalen erkennen lassen, geben sich ausser in der amphicoelen Form der Wirbel namentlich in der Kieferbildung mit Bezahnung, der paarigen Entwicklung des Praemaxillare, der Ausbildung des Brustapparates und in dem Vorhandensein eines Abdominal-Sternums kund. Besonders charakteristisch erweist sich, wie bekannt, der Schädel von Hatteria. Leider ist aber trotz eines verhältnissmässig gut conservirten Kopfstückes von *Sapheosaurus laticeps* H. v. Meyer der Schädel der Homoeosaurier in seinem feineren Bau nicht so genau gekannt, um einen engeren Anschluss an das obengenannte merkwürdige, gewissermassen aus alten Zeiten her uns überkommene Reptil von Neuseeland zu bestätigen.

Die bis jetzt bekannten Arten und Exemplare von Homoeosaurus.

Zu dem Geschlechte *Homoeosaurus* sind ausser *H. Maximiliani* noch zwei andere Arten gerechnet worden. Eine kleine Art, der älteste Fund einer versteinerten Eidechse aus Solenhofener Plattenkalk, erhielt zuerst (1831) von Goldfuss [5]) den Namen *Lacerta neptunia*. Dieses Fossil wurde späterhin (1837) von Fitzinger [6]) mit der generischen Bezeichnung *Leptosaurus* belegt. H. v. Meyer zog es in seinem Reptilienwerk zu Homoeosaurus und behielt den Goldfuss'schen Speciesnamen bei. Das wenige cm lange Skelettchen dürfte vielleicht nur als ein junges Exemplar von Hom. Maxi-

3) T. H. Huxley. On *Hyperodapedon*. Quarterly journal of the geological society London 1869 (p. 138—152). p. 147. Der „Reptiliferous sandstone" von Elgin, der *Stagonolepis, Telerpeton* und *Hyperodapedon* einschliesst, wurde früher für paläozoisch gehalten. Neuerdings wird er von den englischen Geologen zur Trias gestellt, vergl. John W. Judd: The secondary rocks of Scotland, p. 136—144 (Quarterly journal of geol. society Vol. XXIX, May 1873).

4) R. Owen. Description of an extinct Lacertian Reptile, *Rhynchosaurus articeps*. With 2 plat. Transact. of the Cambridge phil. Soc. 1842. t. VII. p. 335.

5) Dr. Goldfuss. Beiträge zur Kenntniss verschiedener Reptilien der Vorwelt. Nova acta Acad. Caesar. Leopoldino-Carolinae naturae curios. Tome XV, par. 1. S. 115—117 tab. XIV fig. 2.

6) L. J. Fitzinger. Ueber *Palaeosaurus Sternbergii*, eine neue Gattung vorweltl. Reptilien und die Stellung dieser Thiere im Systeme überhaupt. Annalen des Wiener Museums der Naturgeschichte 1837 (II. Band 1840) S. 171—187.

miliani aufzufassen sein. Es deuten auf diese Annahme verschiedene Anzeigen hin: so die grössere Zahl von deutlichen Zähnen, die in einem so frühen Altersstadium noch nicht abgenützt waren, das Fehlen der noch nicht oder kaum verknöcherten Hand- und Fusswurzelknöchelchen und die eckige Beschaffenheit der Epiphysen der Extremitätenknochen. Wenn wirklich *Lac. neptunia* mit *H. Maximiliani* (was ich noch nicht ganz sicher behaupten will, da mir zur Zeit das in Bonn befindliche Original nicht zur Verfügung steht) zusammenfällt, dann sollte, streng genommen, der Fitzinger'sche Genusname für die in Rede stehenden jurassischen Eidechsenformen in Anwendung kommen. Dennoch dürfte, selbst wenn nach stattgehabter genauer Untersuchung die geäusserte Ansicht als die richtige sich herausstellen würde, die Gattungsbenennung von H. v. Meyer beibehalten werden. Es scheinen mir hiefür hauptsächlich zwei Punkte maassgebend zu sein: einmal hat H. v. Meyer ein ausgewachsenes Individuum, das die charakteristischen Merkmale deutlich zeigt, zur Errichtung der Sippe benützt, zweitens hat die Bezeichnung *Homoeosaurus* in der wissenschaftlichen Welt bereits das Bürgerrecht erlangt. Ich möchte daher vorläufig den Gattungsnamen *Leptosaurus* nur für die kleine von Goldfuss beschriebene Form beibehalten.

Andr. Wagner hat in den Abhandlungen der Münchener Akademie eine zweite Art von *Homoeosaurus* unter dem Namen *H. macrodactylus* beschrieben[7]). Auch H. v. Meyer sieht darin eine von *H. Maximiliani* verschiedene Art[8]). Diese Form erweist sich jedoch der Hauptspecies so nahe stehend, dass man sie sogar mit dieser vereinigen kann.

Von *Homoeosaurus Maximiliani* waren bis zu Anfang der siebenziger Jahre nur vier Exemplare bekannt. Das erste derselben wurde schon im Jahre 1845 bei Gelegenheit der Naturforscherversammlung in Nürnberg vorgezeigt und besprochen. Es stammt aus den Brüchen von Solenhofen oder von Eichstädt, gehörte zur Leuchtenberg'schen Sammlung in letztgenannter Stadt und kam später mit deren Einverleibung in die bayerische Staatssammlung nach München. Auf diese Versteinerung hin

---

7) Dr. Andr. Wagner. Neu aufgefundene Saurier-Ueberreste aus den lithograph. Schiefern und dem obern Jurakalke. Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der kgl. bayer. Akad. der Wissenschaften. VI. Bd. München 1852, S. 669—683. Taf. XVIII.

8) Hauptwerk loc. cit. (Note 1) S. 105 und Palaeontographica Bd. XV, S. 55.

gründete H. v. Meyer im Jahre 1847 den Art- und Gattungsnamen[9]); er benannte sie zu Ehren des Herzog Maximilian von Leuchtenberg, welcher in seiner Residenz zu Eichstädt eine prachtvolle Naturaliensammlung besass.

Ein zweites, besser erhaltenes und von der Unterseite entblösstes Exemplar befand sich in der früheren Oberndorfer'schen Sammlung in Kelheim. Es wurde in der Nähe dieses Ortes aufgefunden. Beide Stücke sind in dem grossen Werke von H. v. Meyer abgebildet und eingehend beschrieben (loc. cit. S. 101—103, Taf. XI Fig. 1, 2, 3, 4).

Ein drittes, ziemlich vollständiges Exemplar entstammt gleichfalls der Kelheimer Gegend, es lag in der vormalig Oberndorfer'schen Sammlung und bildet jetzt ein Schmuckstück des paläontologischen Museums in München. Eine ausführliche Beschreibung davon lieferte H. v. Meyer in der Palaeontographica 1866[10]). Ich werde im Laufe dieser Abhandlung Gelegenheit haben, auf dieses Stück einigemale zurückzukommen, es soll die Bezeichnung tragen: Exemplar von Kelheim, II.

Ueber ein viertes Exemplar, ein jugendliches Individuum, das bei Eichstädt gefunden wurde, berichtete Frischmann im Jahrbuche für Mineralogie 1868[11]). Es wird dasselbe Stück sein, welches später nach Dresden (k. mineralogisch-geologisches Museum) kam[12]).

Zu den aufgeführten Stücken kommt dann noch der *Homoeosaurus macrodactylus* A. Wagner von Kelheim. Das ziemlich gut conservirte Skelett ist auf zwei Platten vertheilt. Von der Hauptplatte hat bereits Wagner in seiner oben citirten Abhandlung eine bildliche Darstellung gegeben; das Gegenstück, jetzt im paläontologischen Museum des bayerischen Staates aufbewahrt, wurde von H. v. Meyer abgezeichnet und die Figur nebst Beschreibung der ganzen Form in sein Hauptwerk aufgenommen[13]).

In neuerer Zeit hat C. Struckmann das Vorkommen von *Homoeosaurus*

---

9) H. v. Meyer. *Homoeosaurus Maximiliani* und *Rhamphorhynchus (Pterodactylus) longicaudus*, zwei fossile Reptilien aus dem Kalkschiefer von Solenhofen, im Naturalienkabinet des Herzogs Maximilian von Leuchtenberg zu Eichstädt. Mit 2 Tafeln. Frankfurt 1847.

10) H. v. Meyer. *Homoeosaurus Maximiliani* aus dem lithographischen Schiefer von Kelheim. Palaeontographica. Beiträge zur Naturgesch. der Vorwelt, herausgegeben von H. v. Meyer. Bd. XV. S. 49—55. Tafel X.

11) L. Frischmann. Ueber neue Entdeckungen im lithographischen Schiefer von Eichstädt. Neues Jahrb. für Min., Geol. u. Pal. 1868. S. 26—30.

12) Neues Jahrbuch für Min., Geol. u. Pal. Jahrgang 1874. S. 329.

13) Reptil. aus dem lithogr. Schiefer. S 103—105. Taf. XI f. 5.

Maximiliani in Norddeutschland und zwar in den mittleren Kimmeridge-Bildungen von Ahlem bei Hannover entdeckt. Die Reste gehören drei Individuen an, wovon eines ein schönes, grosses Exemplar vorstellt, das mit dem bezahnten Unterkiefer eines der beiden anderen Stücke in der Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft (Bd. 25) abgebildet und beschrieben wird[14]).

Ausser diesen in der Litteratur bereits erwähnten Vorkommnissen kenne ich noch ein weiteres, jedoch schlecht erhaltenes Exemplar, das bei Eichstädt unlängst gefunden wurde und zur Zeit Eigenthum eines dortigen Steinbruchsbesitzers ist.

Als das achte[15]) der mir bekannten grösseren Stücke von *Homoeosaurus Maximiliani* reiht sich dem zuletzt aufgeführten noch dasjenige Exemplar an, dessen speciellere Darlegung den Gegenstand der folgenden Zeilen bilden soll und von welchem eine naturgetreue Abbildung (Lichtdruck in Originalgrösse mit erläuternder schematischer Zeichnung) der vorliegenden Mittheilung beigegeben ist. Ich verdanke das instructive Stück der Güte des Herrn Landesgerichtsarzt Dr. Rehm in Regensburg, welcher in naturwissenschaftlichen Kreisen als hervorragender Forscher auf dem Gebiete der Kryptogamenkunde bekannt ist.

Beschreibung eines neuen Exemplares von Homoeos. Maximiliani.

Allgemeines, Fundort, Lager.

Die Versteinerung ist kein sogenanntes Habitus-Exemplar. Das Skelett zeigt die einzelnen Theile in erheblicher Unordnung durcheinander liegend. Die Knochen sind von heller Farbe und treten auf der ebenen, streckenweise mit gelbem Eisenoxyd bedeckten und durch feine Mangan-Dendriten punktirten Gesteinsplatte gut heraus. Manche Abschnitte des Gerippes fehlen ganz. Wie sehr die einzelnen Theile durcheinander gerathen sind, kann man beispielsweise an einer Parthie über dem Kopf entnehmen.

---

14) C. Struckmann. Notiz über das Vorkommen von *Homoeosaurus Maximiliani* H. v. M. in den Kimmeridge-Bildungen von Ahlem unweit Hannover. Zeitschrift der Deutschen geolog. Gesellschaft. XXV. 1873. S. 249—255. Taf. VII.

15) Die *Lacerta (Leptosaurus) neptunia* Goldfuss ist hier nicht mit eingerechnet.

An dieser Stelle befinden sich zwei der hinteren Schwanzwirbel, das eine Schulterblatt, ein Kopfknochen und einige Phalangenglieder dicht nebeneinander. Dennoch hat sich die genauere Untersuchung des Objektes als lohnend erwiesen. Der Erhaltungszustand der einzelnen freiliegenden Knochen ist ein trefflicher. Durch ihre isolirte Lage sind die Enden und ihre feineren Structurverhältnisse gut erkennbar. Ausserdem fanden sich am vorliegenden Stück einige Skelett-Theile vor, welche an den früheren Exemplaren entweder ganz fehlten oder nicht in dieser Vollständigkeit beobachtet worden sind, so dass für das Verständniss der Organisation dieser alten Eidechse neue Anhaltspunkte gewonnen werden konnten.

Im Allgemeinen ist die Anordnung so, dass auf der linken (vom Beschauer aus genommen) Seite der Platte die vorderen Parthieen des Knochengerüstes sich befinden, auf der rechten die hinteren Theile desselben. Der Kopf ist in seiner Hauptmasse gut erkennbar, von der Wirbelsäule sind Abtheilungen aus der Rumpfgegend und aus dem Schwanze in Zusammenhange, grössere Strecken derselben sind ganz ausgefallen. Theile des Schultergürtels, Reste vom Bauchrippenapparat, die Mehrzahl der Rippen und viele Knöchelchen der unteren Gliedmaassen liegen zerstreut umher. Die nur isolirt vorhandenen grösseren Extremitätenknochen sind nach vorne gerückt oder seitwärts hinausgeschoben. Einige derselben weisen eine verkehrte Stellung auf d. h. ihr hinteres Ende ist dem Kopfe zugekehrt.

Der Fundplatz der neuen Versteinerung ist ein Steinbruch im Pointner Forst zwischen Jachenhausen und Hemau in der südlichen Oberpfalz. Das Lager gehört zum Solenhofener Plattenkalk, der sich in dieses Gebiet herauf von der Kelheimer Gegend aus erstreckt. Derselbe bildet im Pointner und Kelheimer Wald, über dem Dolomit oder dem den letzteren vertretenden plumpen Felsenkalk ruhend, neben Ablagerungen, die zur Kreide gehören, und meist von den lehmig-sandigen Gebilden der Juraüberdeckung verhüllt, das Plateaugestein dieses Theiles des Jurazuges. Gegen das untere Altmühlthal und das die Juraplatte etwas nördlicher durchschneidende Laberthal, sowie zur Donau hin, breitet sich neben Dolomit der weisse plumpe Felsenkalk aus und setzt zumeist in pittoresken Formen die Thalgehänge zusammen. Scheint auch die Hauptmasse

des Kalkes auf dem Dolomit gelagert zu sein, so können sie sich doch offenbar gegenseitig vertreten. Aber andererseits gehen die massigen Kalke, insbesondere solche, die *Diceras* (nicht *D. arietina*), *Nerineen* oder auch *Korallen* umschliessen, in das Niveau der Plattenkalke herauf [16]). Bei Kelheim liegt der Plattenkalk unmittelbar neben dem in steilen Felsen sich erhebenden weissen Marmor- und Diceraskalk, und ein einziger Blick von der Kelheimer Donaubrücke aus, auf das nördlich der Stadt ansteigende Gehänge gewendet, lehrt zur Genüge, dass Diceraskalk und Plattenkalk äquivalente Bildungen sein müssen. In den Brüchen von Kelheimwinzer hat bekanntlich von Gümbel [17]) bereits das Auftreten von linsenförmigen Parthien von Diceraskalk mitten im Plattenkalk nachgewiesen.

Schädel.

Man sieht einen ziemlichen Theil vom Schädeldach mit den Augenhöhlen (wenigstens in theilweiser Begränzung) und dem rechten Oberkiefer entblösst. Daneben gewahrt man den Unterkiefer, der nach links hinausgeschoben und zugleich um einen beträchtlich grossen Winkel gegen die Richtung der Knochen der Oberseite gedreht ist. Rings um die Hauptparthie des Schädels liegen noch einige, meist kleinere Kopfknochen zerstreut auf der Platte. Diese aus mehreren zusammenhängenden Knochen gebildete grössere Parthie des Kopfes besteht in ihrem mittleren Theile hauptsächlich aus dem Frontale, seitlich davon findet sich die in ihrem gesammten vorderen, zumeist vom Praefrontale gebildeten Rand erhaltene rechte Augenhöhlung vor; nach aussen und vorn reiht sich daran der Oberkiefer. Am linksseitigen Augenloch fehlt dieser Knochen, dagegen weist ein breites Bein unterhalb der Orbita, das an den hinteren Theil des Unterkiefers zu liegen gekommen ist, mit Bestimmtheit auf das Jugale hin. Ein dreieckiger, hinten spitz verlängerter Knochen, der an das letztere gränzt (beide Knochen sind auf

16) Vergleiche Fraas: Württemberg. Jahreshefte XIII, 1857, S. 106 und Gümbel: Die geognost. Verhältnisse des Ulmer Cementmergels, S. 50 (Sitzungsber. d. k. Akad. der Wissenschaften zu München, math. phys. Cl. I, 1871).

17) Gümbel. Geognost. Beschreibung des ostbayer. Grenzgebirges, 1868, S. 694 mit Holzschnitt im Text.

dem photographischen Bild in den beschatteten Theil hinter der linken Orbita gefallen) und die Augenhöhle hinten abschliesst, mit den Knochen der Oberseite aber nicht mehr in directer Nahtverbindung sich befindet, ist zweifelsohne das Postfrontale.

Die Augenhöhle *(O)* hat eine Höhe von ungefähr 6 mm.

Frontale (vgl. Taf. II, [1]): Der zwischen den beiden Orbiten befindliche, hinten sich verbreiternde und hier fast geradlinig begränzte Knochen ist jedenfalls das Haupt-Stirnbein. Eine in seiner Mitte laufende, fast leicht gewellte Linie beweist, dass es paarig ist. In der Mitte, zwischen den beiden Augenhöhlen, verschmälert sich das Frontale bis zu 2 mm, wie auch H. v. Meyer am *H. macrodactylus* gefunden hat. Die Breite hinten an der Naht gegen das Parietale beträgt 5 mm; eine Messung am Kelheimer Exemplar II, an derselben Stelle ausgeführt, ergab das gleiche Resultat. Die Begränzung gegen das Parietale bildet keine ganz gerade Linie, in der Mitte, wo die beiden Hälften des Frontale zusammenstossen, besteht eine kleine Einbuchtung, vielleicht ist an dieser Stelle ein Loch vorhanden, wie es H. v. Meyer beim Kelheimer Exemplar II gezeichnet hat. Seitwärts davon glaubt man an der hinteren Begränzungsnaht der beiden Frontalia noch eine zweite leichte Einbuchtung nach vorne zu bemerken.

In einer Entfernung von 7 mm vom Hinterrand ist das Frontale eingebrochen und der vordere, sich wieder erweiternde Theil scheint etwas auf die mittlere Parthie hinaufgeschoben zu sein. Die Knochensubstanz ist hier eine Strecke weit abgesprungen und erst die vordersten Spitzen sind wieder, wie der Haupttheil des Frontale, als versteinerte Knochenmasse erhalten. Eine andere Auffassung als die hier vertretene wäre die: an der Stelle des Bruches eine Naht anzunehmen, alsdann fiele die ganze vordere Parthie, welche eine Breite von über 5 mm aufweist, zum Nasale. Es scheint mir diess aber weniger wahrscheinlich zu sein. Der äussere Rand dieser vorderen Parthie zeigt eine charakteristische Gestalt. Es läuft der Knochen seitlich in zwei Spitzen aus, die seitwärts nach unten von einer elliptischen Oeffnung begränzt werden, in der Mitte bildet der Knochen ebenfalls einen spitzen Vorsprung, der nahezu die Länge der beiden seitlichen erreicht und welcher durch die Mittelnaht des Frontale halbirt wird. Zwischen dem mittleren Zacken und je einem der seitlichen Spitzen liegt ein gleichfalls elliptischer Raum. Nimmt man die ganze vordere Parthie

für das (paarige) Nasenbein, so könnte man sich in diesen Raum die oberen Enden der Praemaxillaria eingreifend denken. Gehört aber alles zum Frontale, so ist derselbe durch die beiden Nasalia, die jetzt weggebrochen sind, ausgefüllt gewesen. Eine Untersuchung des Kelheimer Exemplars II bestätigte die letztere Vermuthung. Die Ausdehnung des Frontale an diesem Stück ist eine annähernd gleich grosse wie am vorliegenden Individuum; sie beträgt hier von der mittleren Spitze bis zum Hinterrand 13 mm. Die nach unten zu gelegene elliptische Höhlung ist das Nasenloch *(N)*. An unserem Stück ist dasselbe nur auf der rechten Seite in seiner hinteren Umrahmung erhalten. Die untere Begränzung der Nasenhöhle wird zum grossen Theile vom Oberkiefer gebildet. Die Länge des Nasenloches fand H. v. Meyer an dem schon öfters besprochenen Kelheimer Skelett zu 4,5 mm.

Das Praemaxillare fehlt unserem Exemplar vollständig. Es ist nach den zweifellos richtigen Beobachtungen H. v. Meyer's und A. Wagner's paarig.

Das Maxillare (4), der Oberkiefer, ist ungefähr 13 mm lang; seine grösste Höhe, am Vorderrande des Praefrontale, an das sich das Bein nach unten breit anlegt, beträgt 3 mm. Es ist nach vorn und mehr noch nach hinten zugespitzt. Nahe seinem unteren Rande, diesem parallel laufend, stehen mehrere Löcher: die Foramina maxillaria superiora. Die etwas grösseren derselben sind etwa 3 mm von einander entfernt. Aehnliche Perforationen kommen bekanntlich bei vielen Eidechsen-Gattungen vor *(Psammosaurus, Teju, Monitor)*. Bei *Hatteria* sind sie ein wenig weiter am Oberkiefer hinaufgerückt.

Stark hebt sich beiderseits das Praefrontale (2) heraus, den vorderen Rand der Orbiten zusammensetzend. Am hinteren Aste schliesst sich unten ein, wie es scheint, schmales und kurzes Lacrymale an, von welchem man das rechte im Abdruck zu sehen glaubt.

Postfrontale (6) und Jugale (7) sind in der nahezu ursprünglichen Lage an der linken Augenhöhle zu erkennen.

Das Postfrontale, in der Form dem von vielen Lacerten gleichend, bildet einen platt-dolchförmigen, nach hinten zugespitzten Knochen. Seine Länge lässt sich auf 5 mm angeben, die Breite des vorderen, etwas gerundeten, die Augenhöhle hinten abschliessenden Randes misst gleichfalls

5 mm. Das rechte Postfrontale ist im Abdruck sichtbar, es befindet sich seitlich vom Oberkiefer.

Das linke Jugale ist noch mit dem Postfrontale in Verbindung, die vordere Spitze ist durch ein darauf geschobenes, wahrscheinlich dem linken Oberkiefer angehöriges breites Knochenstück verdeckt. Das rechte Jugale liegt ausserhalb der Hauptparthie des Schädels in verkehrter Stellung, so dass das breite hintere Ende nach vorn, das spitze vordere nach hinten gerichtet ist. Die Länge des ganzen Beines beträgt 10 mm; das hintere breit schaufelförmige Ende ist gegen 4 mm hoch, das vordere spitzt sich, wie erwähnt, zu einem dünnen Knochenstab zu. In der Mitte, wo der Knochen $1^1/_2$ mm breit ist, befindet sich ein deutliches Foramen. Das Jugale umsäumt den hinteren unteren Theil des Augenloches und zeigt nach dieser Seite hin eine scharfe Kante. Der vordere untere Rand der Augenhöhle wird vom Maxillare eingenommen.

Hinter dem Frontale zeigt sich eine weiter nach aussen jedoch nicht mehr deutlich abgegränzte Knochenmasse, die zweifellos Reste des Parietale darstellt. Nach den Zeichnungen H. v. Meyer's und A. Wagner's vom *Hom. macrodactylus* muss es ein ziemlich breiter Knochen gewesen sein. Im Gegensatz hiezu wird beim verwandten *Sapheosaurus laticeps* Wagner *sp.* das Parietale von den beiden genannten Autoren [18]) verhältnissmässig schmal dargestellt. Es erinnert das Scheitelbein von *Sapheosaurus* in seiner Gestalt an das von *Hatteria;* dasselbe dürfte, wie bei dieser Gattung, eine paarige Ausbildung gehabt haben. Dagegen zeigt der kleine *Ardeosaurus brevipes* H. v. Meyer, der im Uebrigen *Homoeosaurus* ziemlich nahe zu stehen scheint, eine breite, ungetheilte Parietal-Platte [19]).

Die ausser dem Verband mit dem Haupttheile befindlichen, noch zum Kopfe gehörigen Knochen sind einer sicheren Deutung schwer zugänglich. Auffallend ist vor Allem ein breites Knochenstück, das nach der einen Seite verschmälert ist und zugleich hier kantig zuläuft, nach der anderen ist es, wie das Jugale hinten, an welches es anzugränzen scheint, grobzackig ausgerandet. Zwischen dem Hinterrande und dem

18) A. Wagner loc. citat. (Note 7) S. 665. Taf. XVII. (*Piocormus laticeps* A. Wagn.) und Herm. v. Meyer Rept. aus d. lithogr. Schief. S. 111. Taf. XIII, fig. 2, 3.

19) H. v. Meyer. Reptil. des lithogr. Schief. S. 106—108. Taf. XII fig. 4, 5.

spitzzulaufenden Theil zeigt das Bein am Rande eine bogige Einbuchtung, die vielleicht die Seite darstellt, welche das obere Schläfenloch einfasste. Es kann der Knochen nur mit dem gleichfalls breiten Knochen verglichen werden, der beim *Sapheosaurus* die hinteren Ecken des Schädels bildet. Darnach wäre es als das Squamosum (7) aufzufassen, das auch bei *Hatteria* eine breite Platte bildet.

Die übrigen zerstreut umherliegenden Kopfknochen wage ich nicht näher zu bezeichnen. Es können deren noch drei, beziehungsweise vier Paare unterschieden werden. Das erste Paar (8) besteht aus einem 7 mm langen, ungefähr 3 mm breiten Knochen, der leicht gebogen und nahe dem einen Rande mit einer scharfen Kante versehen ist, unterhalb welcher er sich concav einsenkt. Die zum zweiten Paar (10) gehörigen Stücke, von welchen das eine ganz oben auf der Platte sich befindet, sind als zwei gebogene dünne Knochenstäbe (6 mm lang) entwickelt, denen auf der einen Seite eine flügelartige Verbreiterung (3 mm breit) angesetzt ist. Man könnte an Theile der Pterygoidea denken. Das dritte Paar (9) zeichnet sich durch besonders charakteristische Form aus. Die Knochen besitzen die Gestalt eines auf 2 Seiten leicht eingebogenen Dreieckes; jede Seite ist ungefähr 5 mm lang. Die eine Seite ist derb, mit kräftigen Gelenkflächen beiderseits versehen; die zweite, aus weniger starker Knochensubstanz bestehend, steht auf der ersten ungefähr senkrecht; nach der dritten, schräg laufenden Seite verschmälert sich der Rand zu einem dünnen Knochenblatt. Vielleicht liegt hier das Quadratum vor. Das letzte der erwähnten Paare (11) zeigt einen stark gebogenen dreispitzigen Knochen (fast 5 mm lang), möglicherweise ist es dem Transversum zugehörig.

Ein aus der linken Orbita herausschauendes, offenbar paariges breites Knochenstück möchte man für die vordere Parthie des Pterygoids halten. Es wäre dann dieselbe Einrichtung wie bei *Hatteria* gegeben, wo die beiden Pterygoidea vorn eine breite Platte bilden, welche die Palatina auseinanderhält.

Es ist ein misslicher Umstand, dass zur Zeit über die Beschaffenheit der hinteren Schädelhälfte keine klare Vorstellung gewonnen werden kann. Hoffentlich werden spätere Funde über diesen Punkt neue Aufschlüsse gewähren und so die systematische Stellung von *Homoeosaurus Maximi-*

liani im Allgemeinen und die verwandtschaftlichen Verhältnisse zu *Hatteria* im Besonderen näher beleuchten.

Vom Unterkiefer sieht man den linken Ast *(l. U.)* von aussen, den rechten von innen. Die Symphysennaht ist gelöst, wahrscheinlich bestand zwischen den beiden Unterkieferhälften eine knorpelige Verbindung wie bei *Hatteria*. An der Naht ist auf der Innenseite der Knochen eine leichte Rinne, nach hinten sich ziehend, angebracht, unterhalb derselben hebt sich die Gelenkstelle am Verbindungsrand stärker hervor. Die Länge des Unterkiefers beträgt 23 mm, seine grösste Höhe beim Kronenfortsatz 4 mm. Der allgemeinen Form nach gleicht derselbe jenem bei *Hatteria*. Auch scheint die Zusammensetzung aus den einzelnen Knochen eine ähnliche zu sein. Das Dentale, das die Zähne trägt, ist lang und scheint sich unten weit nach hinten, bis fast zur Gelenkrolle des Articulare auszudehnen. Der Kronenfortsatz ist breit, er dürfte auch auf der Aussenseite ganz vom Coronoideum gebildet sein, doch ist hier die Gränznaht gegen das Dentale verwischt. Hinter dem Coronoid und dem Dentale schaltet sich gegen das Articulare das Complementare ein. Den entsprechenden Theil am Kiefer von *Hatteria* zieht Günther[20]) bereits zum Articulare. An unserem Stück glaubt man das Complementare durch deutliche Nähte von den Nachbarknochen geschieden zu sehen. An der Gränze von Dentale und Complementare, an der vorderen Spitze des letzteren, befindet sich ein Loch, wie es Günther an der entsprechenden Stelle bei *Hatteria* beschreibt[21]). Der hinterste Theil des Unterkiefers wird vom Articulare gebildet. Die Gelenkgrube ist tiefer als bei *Hatteria*, vor derselben findet sich eine etwas abgeflachte Parthie, hinter der Grube läuft das Articulare in ein kurzes knopfförmiges Ende aus. Unterhalb des Articulare sieht man von aussen noch das Operculare (Splenial Owen, Günther) ein wenig hervorschauen. Einen feinen Knochenstreifen gewahrt man am Unterkiefer weiter nach vorne hin, am unteren Rande desselben: wahrscheinlich das Angulare. Von aussen erscheint

20) Albert günther. Contribution to the anatomy of *Hatteria* (*Rhynchocephalus* Owen). Philosophical Transactions of the Royal Society of London for 1867. Vol. 157. pag. 595—629. Taf. 26—28.

21) loc. cit. p. 600. „There is a very distinct foramen between the dentary and articular, penetrating to the inner surface of the mandible; it is identical with the large vacuity of the lower jaw of the Crocodile, and very indistinct or entirely closed on the outer surface in the Lizards.

der ganze Mandibularknochen solid, Gefässlöcher kann ich, das eine erwähnte Foramen ausgenommen, nicht bemerken.

Der rechte, von der Innenseite entblösste Kieferast *(r. U.)* ist in seinem hinteren Theil von daraufliegenden Knochen bedeckt, im mittleren Abschnitte desselben sind die Knochen auf eine kurze Strecke hin aufgebrochen. Die Zähne sind auch hier zum grössten Theil erhalten. Man erkennt das Dentale, Angulare, Operculare und Coronoideum. Die Naht zwischen den letzten beiden Stücken ist gut sichtbar. Das Operculare zeigt vereinzelte kleine Löcher. Auf Taf. II (oben rechts) ist nur der linke Unterkiefer ausführlicher gezeichnet.

Bezahnung.

Die Bezahnung im Unterkiefer ähnelt sehr derjenigen von *Hatteria*. Durch die Lage der beiden Oberkiefer (der linke Oberkiefer ist zum Theil neben dem linken Jugale, über dem Hauptast des Unterkiefers liegend, erhalten) ist die Beobachtung von Zähnen an denselben ausgeschlossen. Es wäre interessant den Zwischenkiefer nach dieser Richtung untersuchen zu können. Bei *Hatteria* verlängert sich dieser jederseits in einen nach unten ziemlich weit vorspringenden, im Alter breiten Zahn.

Die Bezahnung des Unterkiefers wurde zuerst von Struckmann an einem der hannover'schen Exemplare richtig erkannt. Schon früher (1852) hatte A. Wagner am *Hom. macrodactylus* in beiden Kinnladen Zähne angegeben und abgebildet. Es scheint mir jedoch seine Darstellung nicht ganz richtig zu sein, da die Form der Zähne von der bei *Hom. Maximiliani* beobachteten ziemlich abweicht, und man doch bei den sonst übereinstimmenden Verhältnissen auch hier eine analoge Ausbildung erwarten darf. An der Gegenplatte vom *H. macrodactylus*, welche H. v. Meyer abbildete, konnte ich von Zähnen nichts bemerken, obwohl auf dem Bild solche eingetragen sind. Die Zähne bei *Homoeosaurus* sind unten breit und nicht, wie sie Wagner und v. Meyer darstellen, spitz konisch, fast von der Gestalt jener der bei uns einheimischen lebenden Lacerten. Wahrscheinlich ist an dem von Wagner abgebildeten Stück die Kieferparthie schlecht erhalten und von jedem Zahn nur ein Theil vom Gestein befreit.

Bei näherer Betrachtung des Kelheimer Exemplares II konnte ich

auch hier das Vorhandensein von Zähnen constatiren. Zwei bis drei dem Unterkiefer angehörige Zähne sind durch eine aufgebrochene Parthie der oberen Schädelseite entblösst. Sie sind stumpf-konisch, ihre Gestalt passt genau zu jenen am vorliegenden Stück.

Die Zähne an unserem Exemplar sind von brauner Farbe, mit Schmelz bedeckt und heben sich dadurch gut vom Knochen ab, sie sind demselben unmittelbar aufgewachsen (acrodont). Die hinten stehenden sind die stärkeren, nach vorn nehmen sie an Grösse ab und die vordere Parthie des Kiefers lässt keine eigentlichen Zähne mehr, sondern nur feine Höckerchen und dazwischen befindliche schwache Vertiefungen erkennen, so dass dadurch der Kieferrand leicht gewellt erscheint. In der Nähe der Symphyse fehlen sie ganz, ein grösserer Zahn am vorderen Ende des Kiefers, wie ein solcher bei *Hatteria* auftritt, konnte nicht nachgewiesen werden. Acht bis zehn Zähnchen kann man im Allgemeinen unterscheiden, von diesen sind etwa fünf stärker als die übrigen ausgebildet; die Höhe und Breite der am weitesten nach hinten gelegenen Zähne beträgt ungefähr 1 mm. Die Zähnchen selbst erscheinen fast glatt; mit der Lupe besehen, zeigen sie sich mit feinen etwas unregelmässigen, fast senkrecht stehenden Runzeln bedeckt. Auf der Innenseite der Kiefer sind letztere etwas kräftiger entwickelt und sind auch auf den zwischen den Zähnen befindlichen Theilen erhalten. Diese zwischen den eigentlichen Zähnen gelegenen Theile des Alveolarrandes sind, wie die Zähnchen, braun gefärbt und mit Schmelz bedeckt. Dasselbe Verhalten zeigt *Hatteria* [22]). Es greift jedoch die so beschaffene Parthie des Kieferrandes nicht weit nach abwärts und dem vorderen Abschnitt der Mandibeln fehlt sie mit den Zähnen ganz.

Zu bemerken ist noch, dass die Einkerbungen zwischen den Zähnen sich noch eine Strecke auf dem Knochen an der Aussenseite des Kiefers nach abwärts ziehen.

Wirbelsäule.

Von der Wirbelsäule sind nur abgerissene Theile erhalten. Einzelne Abschnitte derselben kamen ganz in Wegfall. Ungefähr zwanzig Wirbel liegen zerstreut und in sehr verschiedener Stellung unter den übrigen

22) Günther loc. cit. p. 601: „The alveolar edges themselves are highly polished like the teeth, and perform the function of teeth".

Skeletttheilen. Im Zusammenhang befindet sich nur eine Anzahl von Rumpfwirbeln aus der vorderen Abtheilung der Dorsolumbarregion, sowie eine Reihe von sieben der mittleren Region des Schwanzes angehörigen Wirbeln.

Die Wirbel sind amphicoel. Die vordere Gelenkgrube mag vielleicht etwas tiefer als die hintere sein, deren Rand an einigen der seitlich gelegenen Wirbel fast etwas convex vorzuspringen scheint.

Die Gesammtzahl der Wirbel bei *Hom. Maximiliani* mag sich auf ungefähr 66 belaufen. Bis zum Becken kann man nach H. v. Meyer 23 zählen. Zum Halse werden von den Autoren 4 Wirbel gerechnet, doch dürften es deren vielleicht mehr sein. Eine sichere Zahl für den Hals lässt sich zur Zeit nicht angeben, da man noch nicht genau weiss, welcher Wirbel zuerst mit dem Sternum in costaler Verbindung steht. Es sind zwei Sacralwirbel vorhanden. Zum Schwanze gehören über 40 Wirbel. Struckmann zählte von diesen 42 auf. Vielleicht mögen es noch ein paar mehr sein.

Von den Halswirbeln (*HW*) sind nur zwei erkennbar. Einer ist von oben aufgedeckt, ein anderer von vorn sichtbar. Man gewahrt am letzteren deutlich die tiefe Gelenkfläche und den weiten Rückenmarkskanal.

Die Rumpfwirbel (*RW*) bieten im Allgemeinen nichts Auffälliges dar, sie sind von derselben Gestalt wie die der übrigen Lacertilier, nur in der Beschaffenheit der Processus transversi scheinen sie von jenen der Mehrzahl der lebenden Eidechsen etwas abzuweichen. Die Länge der Rumpfwirbel beträgt 3—4 mm, ihre Breite 3 mm, mit den Gelenkfortsätzen bis zu 5 mm. Die Dornfortsätze sind mindestens 1 mm hoch. Einige der zum Rumpf gehörigen Wirbel liegen ganz aussen, manche zeigen ihre seitliche Ansicht. Die Anordnung und Ausbildung der Dorn- (Proc. spinosi) und Gelenkfortsätze (Proc. articulares, Prae- und Postzygapophysen) kommt ganz mit derjenigen bei lebenden Lacerten überein. Dagegen zeichnen sich die Rumpfwirbel von *Homoeosaurus* durch den Besitz von gut entwickelten Querfortsätzen (Proc. transversi) aus. Während dieselben bei den lebenden Formen nur schwache Höcker im vorderen Theil der Wirbel bilden, sind sie hier mehr in die Mitte der Wirbel gerückt und springen seitlich als deutlich abgesetzte (1 mm

lange und breite), vorn mit einer ziemlich breiten Gelenkfacette versehene Knochenzapfen vor.

Die zwei Sacralwirbel sind von unten aufgedeckt. Beide liegen so, dass sie ihre vorderen Gelenkhöhlen und die Enden der vorderen Gelenkfortsätze erkennen lassen. Sie besitzen eine Länge von 3 mm. Ihre breiten seitlichen Anhänge (4 mm lang) sind durch Nähte vom Wirbelkörper getrennt, in der Mitte sind dieselben etwas eingezogen, nach den Rändern hin verbreitert. Durch die Nahtverbindung mit den Wirbeln geben sich diese Seitenfortsätze als umgestaltete Rippen zu erkennen[23]). Die Länge des Seitenfortsatzes vom vorderen Sacralwirbel (1. *SaW*) beträgt 4 mm, seine Breite aussen, an dem an das Darmbein stossenden Rande 3 mm. Der Fortsatz des zweiten Sacralwirbels (2. *SW*) scheint etwas breiter zu sein, er ist weniger gut erhalten als beim ersten, doch erkennt man, wenigstens auf einer Seite (der rechten), dass er sich nach aussen hin gabelt. Eine solche Gabelung hat schon H. v. Meyer am rechtsseitigen Querfortsatz des hinteren Sacralwirbels der beiden Kelheimer Stücke constatirt[24]). Mit diesen beiden Beckenwirbeln hat noch ein anderes auf der Gesteinsplatte vorhandenes Wirbelstück Aehnlichkeit; da aber nach den übereinstimmenden Beobachtungen an vollständigen Exemplaren nur zwei Sacralwirbel bei *Homoeosaurus* angegeben werden, muss dasselbe in anderer Weise gedeutet werden.

Von den vordersten Schwanzwirbeln (*v.SW*) sind einige von oben und unten entblösst. Man sieht daran den 1 mm breiten Rückenmarkskanal, die mit ihren äussersten Enden 3 mm von einander abstehenden Gelenkfortsätze und die 2 mm hohen Dornfortsätze. Andeutungen von unteren Bogen kommen auch vor, doch dürften dieselben noch den ersten 3 Wirbeln gefehlt haben. Die sogen. Querfortsätze sind am Anfang des Schwanzes 3 mm lang, an einem der ersten Caudalwirbel scheinen sie sich ein wenig nach unten zu neigen, an den übrigen weiter zurückliegenden Wirbeln stehen sie gerade vom Wirbelkörper ab. Zwei Wirbel (ganz am Rande der Gesteinsplatte befindlich) sind der Beobachtung von

---

23) Auch bei *Hatteria* sind die Seitenfortsätze der Sacralwirbel durch Naht von den letzteren getrennt. Bei den übrigen lebenden Lacertiliern sind dagegen diese sog. Querfortsätze mit dem Wirbelkörper verschmolzen.

24) Vergleiche seine Bemerkungen darüber. Palaeontographica XV S. 52.

der rechten Seite zugänglich, sie zeigen sehr schön ihre Dornfortsätze, die eine Länge von 2 mm und nahezu die gleiche Breite besitzen. Das obere abgestumpfte Ende der Processus spinosi weist eine rauhe Beschaffenheit auf. Die Stellen, von denen die abgebrochenen Querfortsätze abgehen, lassen sich an den beiden Wirbeln ebenfalls gut wahrnehmen. Eine zusammenhängende Parthie von Schwanzwirbeln, aus der mittleren Region dieses Körpertheiles stammend, ist mit sieben Stück erhalten (*mSW*). Der ganze Abschnitt nimmt zur Richtung des Kopfes eine verkehrte Lage ein; die hinteren Theile der Wirbel sind dem letzteren zugewendet. Sehr hübsch sieht man das Uebergreifen der hinteren Gelenkfortsätze eines Wirbels auf die vorderen Gelenkfortsätze des unmittelbar nach hinten folgenden. Die Länge der Wirbel dieser Parthie beträgt 4 mm, ihre Breite 2 mm. Durch die Mittellinie der Wirbel ziehen sich als schwach erhabene Leisten die Dornfortsätze. Die sog. Querfortsätze sind noch im Gesteine verborgen; an einem daneben liegenden Wirbel, der sich der eben erwähnten Parthie nach hinten unmittelbar angeschlossen haben wird, bemerkt man den Querfortsatz mit einer Länge von 2 mm noch erhalten. Unten an den Wirbeln sind die unteren Bogen (Hämapophysen) vorhanden. Von diesen gewahrt man einzelne in isolirter Stellung; sie erscheinen als nach unten spitze Dreiecke von feinen Kochenstreifen. Einige, die zu den Wirbeln der eben besprochenen Reihe gehören mögen, zeigen eine Länge von 3 mm, zahlreiche andere, weit kleinere, rühren von den winzigen Wirbelchen vom hinteren Drittel des Schwanzes her. Den alleräussersten dürften sie ganz fehlen.

Eine Quertheilung der Schwanzwirbel, wie sie bei vielen lebenden Eidechsen (auch *Hatteria*) besteht, lässt sich auch hier beobachten und ist bereits von H. v. Meyer gefunden worden. Die vorderen Caudalwirbel zeigen diese Erscheinung noch nicht, dagegen ist sie bereits an den Wirbeln jener zusammenhängenden Reihe angedeutet. Ganz deutlich tritt die Quertheilung an den seitlich entblössten schmalen Wirbelchen auf, die der hinteren Region des Schwanzes angehören (*h. SW*). Von solchen finden sich auf der Fossilplatte einige in der Nähe der übrigen Schwanzwirbel und mehrere in der Gegend über dem Kopf vor. Die Trennungslinie, an deren Rande der Knochen etwas hervortritt, ist im unteren Theil

der Wirbel markirter ausgebildet. In der oberen Hälfte der letzteren sind die Spitzen der Gelenkfortsätze noch gut erkennbar. Die Leiste der Dornfortsätze verschwindet an den äusseren kleinen Wirbelchen ganz.

Rippen und Sternalapparat.

Bezüglich der Rippen unterscheidet H. v. Meyer Brustrippen, Rückenrippen, Bauchrippen und seitliche Rippen.

An den hinteren Halswirbeln mögen bei *Hom. Maximiliani* rippenartige Anhängsel sich befunden haben; doch sind solche mit Sicherheit bis jetzt noch nicht nachgewiesen worden.

Von den Rumpfrippen (*Ri*), die theils als wahre d. h. mit dem Brustbein in Verbindung stehende, theils (und zwar der Mehrzahl nach) als sog. falsche Rippen aufzufassen sind, liegt eine Anzahl in der Mitte des Gesteinsstückes zerstreut. Die meisten haben eine Länge von 12—14mm. Sie sind mehr oder weniger bogenförmig gekrümmt und ziemlich kräftig gebaut. Das untere Ende, an das sich Knorpelspangen angeschlossen haben, ist nicht scharf abgesetzt, oder es zeigt sich einfach abgeschnitten, ohne Verdickung. Das obere (proximale) Ende dagegen ist kopfartig verbreitert, dabei meist etwas zusammengedrückt und mit einer deutlichen Gelenkfläche versehen. Sämmtliche Rippen sind einköpfig, die Gelenkstelle ist jedoch in zwei Facetten geschieden. Knöcherne Apophysen (Processus uncinati), welche bei *Hatteria* auftreten, fehlen hier den Rippen.

Von den mit dem Brustbein in Verbindung stehenden (knorpeligen) Rippentheilen (Sternocostalia, Brustrippen) und von den sog. Sternalleisten glaubt man auf der Steinplatte noch Andeutungen wahrnehmen zu können.

Das Brustbein (Sternum) dürfte nach den Angaben H. v. Meyer's eine breite Knorpelplatte gebildet haben. Es ist mit seinem ungefähren Umriss am Kelheimer Exemplar II erkennbar. An unserem Stück sind von dem eigentlichen Sternum keine Reste überliefert. Dagegen findet sich der schmale Knochenstab des Episternum (*Ep.*) im Abdruck erhalten vor. Die Länge desselben beträgt 9 mm, die Breite 1 mm. Das obere Ende ist T-förmig. Es lässt sich hier nicht vollständig beobachten, da zum Theil der linke Unterkiefer darüber liegt. Unterhalb der T-förmigen

Verbreiterung ist es seitlich etwas eingebogen, dann wird es wieder etwas breiter und spitzt sich nach unten langsam zu. Aus einer durch die Mitte laufenden schwachen Furche geht der paarige Charakter des Beines hervor. Sehr hübsch ist das Episternum auf der Hauptplatte vom *Hom. macrodactylus* („unpaares Stück des Brustbeines" A. Wagner, l. c. S. 674) zu sehen.

In grösserer Zahl sind die zum Abdominal-Sternum gehörigen sog. Bauch- oder Abdominalrippen (*ARi.*) vorhanden. Sie liegen zerstreut neben den übrigen Rippen umher. Seitwärts unten, von den Haupttheilen des Skelettes getrennt, hat sich sogar eine zusammenhängende Parthie des Bauchrippenapparates mit 6 Rippen erhalten. Sämmtliche Theile desselben bestehen aus feinen Knochenstrahlen, die bei oberflächlicher Betrachtung leicht übersehen werden könnten.

Bauchrippen finden sich unter den Reptilien bei den Crocodilen, Chamäleonen, Geckonen vor. Eine noch grössere Aehnlichkeit besitzen die bei *Homoeosaurus* vorkommenden mit jenen der *Pterosaurier*[25]) und namentlich mit den Abdominalrippen von *Hatteria*. Es sind diese Gebilde als verknöcherte Inscriptiones tendineae der Bauchmuskeln zu betrachten.

Jener eben erwähnte, aus sechs Abdominalrippen bestehende Abschnitt des Bauch-Sternums beweist in aller Klarheit, dass jede der am Bauche

25) Vergleiche die Angaben H. v. Meyer's über die Bauchrippen bei *Rhamphorhynchus Gemmingi* (Rept. aus dem lithogr. Schief. p. 69) und v. Ammon's über dieselben bei *Rhamph. longicaudatus* (Correspbl. des naturw. Ver. zu Regensburg 1884, S. 161). Ich möchte jedoch die ganze Bauchrippe bei *Rhamphorhynchus* nicht mehr aus 2, beziehungsweise 4 Stücken, sondern analog den hier beobachteten Thatsachen aus drei Stücken bestehend annehmen: einem unpaaren, mit einem Knöpfchen in der Medianlinie versehenen (bei *Rh. Gemmingi* nach vorn winkelig gebogenen) Mittelstück und je einem seitlichen Theil. Die Abdominalrippen von *Rhamphorhynchus* unterscheiden sich von denen bei *Homoeosaurus* und *Hatteria* jedoch darin, dass keine knorpeligen Verbindungsstücke zwischen den vertebralen und abdominalen Rippen vorhanden sind. Es treten vollständige Knochenringe auf; die vertebralen Theile sind mit den unteren Halbringen durch Gelenke verbunden. Die seitlichen Stücke der Bauchrippen dürften dann vielleicht den sternalen, knorpeligen Rippentheilen der Homoeosaurier entsprechen. Bei *Rh. Gemmingi* finden sich an diesen Theilen eigenthümlich gestaltete, beiderseits ausgezackte längliche Anhänge vor, die mit den verbreiterten unteren Stücken der sternalen Rippen bei *Hatteria* („lower dilated pieces of haemapophyses" Günther, loc. cit. pl. 27 fig. 20, c) verglichen werden können.

Die *Pterosaurier* zeichnen sich sonach durch den Besitz eines Bauchrippen-Apparates aus, welcher demjenigen mehrerer Reptilien-Formen ähnlich ist. Es ist dies ein weiterer Punkt, der die nähere Verwandtschaft der Pterodactylen mit den Reptilien als mit der Klasse der Vögel ergibt.

befindlichen Rippen, ganz analog mit den von Günther[26]) bei *Hatteria* beobachteten Verhältnissen, in drei Theile zerfällt. Man kann unterscheiden: ein Mittelstück (circa 10 mm lang) und ein Paar seitlich davon gelegene Knochenstreifen. Die Mittelstücke zeigen sich in der Mitte stumpfwinkelig eingeschnitten und sind hier zugleich etwas verbreitert; sie bilden, in der Medianlinie gelegen, nach einer Seite hin einen stumpfen Vorsprung. An unserem Exemplar lässt sich nicht direct entscheiden wohin derselbe gerichtet ist; analog der Ausbildung bei *Hatteria* muss man annehmen, dass dieser, also auch der Winkel jeder Bauchrippe, nach vorne gekehrt ist. Nach beiden Seiten hin spitzen sich die Mittelstücke zu feinsten Knochenfäden zu. Die seitlichen Theile jeder Abdominalrippe sind dünnste, fast gerade Knochenstreifen. Sie sind nur nach oben hin leicht gebogen und erscheinen hier, wo sie von den Knorpeln der sternalen Rippentheile aufgenommen werden, kurz abgeschnitten, während sie nach dem anderen, den Mittelstücken sich eng anschmiegenden Ende zu in eine langgezogene feinste Spitze auslaufen und hier eine Strecke weit mit den gleichfalls zarten Enden der letzteren verbunden sind. Die Verbindung der seitlichen Stücke mit den mittleren ist bei *Hatteria* nach Günther eine sehr innige. An der besprochenen aus sechs Bauchrippen bestehenden Parthie sind auf der einen Seite, der linken (der rechten vom Beschauer aus), die seitlichen Abschnitte jeder Rippe mit Ausnahme eines einzigen abgestossen.

Bei *Hatteria* ist die Zahl der Abdominalrippen fast doppelt so gross als die der vertebralen. Das gleiche Verhältniss darf man wohl auch bei *Homoeosaurus* annehmen.

Ausser den eben geschilderten knöchernen Bauchrippen bemerkt man noch eigenthümliche krümliche schnurartige Gebilde, die nicht mehr aus solider Knochenmasse bestehen. Am vorliegenden Exemplare sind nur wenige derselben sichtbar, deutlicher sind sie an anderen Stücken von *H. Maximiliani*, am besten jedoch an den beiden *Sapheosaurus*-Arten ausgeprägt. Schon H. v. Meyer erkannte diese „geringelten Zwischenrippen“ richtig. Sie repräsentiren jedenfalls knorpelige Verbindungsstücke

26) loc. citat. S. 608. pl. 27. Die wichtigsten Resultate der Günther'schen Abhandlung finden sich auch in Bronn's Klassen und Ordnungen des Thierreiches, VI. Bd. 3. Abtheilung, Reptilien von C. K. Hoffmann angegeben. Ueber die Abdominalrippen s. S. 492 Taf. 54.

zwischen den Rücken- und Bauchrippen und entsprechen so den sternalen Rippentheilen (Hämapophysen Günther's) bei *Hatteria*. Sie waren wahrscheinlich wie hier in zwei Abschnitte gegliedert, wornach man einen kürzeren dorsalen (Verbindungsstück zwischen vertebraler und sternaler Rippe, das man sogar an der Abbildung von *Sapheosaurus Thiollieri* von Cirin, scheinbar in knöchernem Zustande, zu sehen wähnt) und einen längeren ventralen Theil zu unterscheiden hätte.

Wir haben sonach im Allgemeinen bei jeder Rippe abgesehen von den wenigen, die das Brustbein erreichen, den sog. wahren Rippen, die sonst das gleiche Verhalten zeigen und nur die Bauchrippen entbehren, zu unterscheiden:

1) einen knöchernen, vertebralen Theil: die Hauptrippen, wie sie in derMehrzahl auf der Gesteinsplatte liegen. Sie werden auch „falsche" Rippen genannt;
2) einen knorpeligen, sternalen Theil. Zerfällt wieder in ein kürzeres dorsales und ein längeres ventrales Stück. Hämapophysen. „Verbindungsrippen von geringeltem Aussehen" H. v. Meyer's. Daran schliesst sich nach unten
3) die knöcherne Abdominalrippe, bestehend aus je einem seitlichen und einem mittleren Stück.

Schulter- und Beckengürtel.

Vom Schultergürtel kann man das prächtig erhaltene Coracoid der einen Seite, ferner die beiden Schulterblätter erkennen. Das Episternum ist bereits besprochen worden.

Beide Schulterblätter (*rSc., l. Sc.*) sind von der Innenseite blossgelegt, man kann daher die Gelenkpfanne daran nicht wahrnehmen. Das im oberen Theil der Gesteinsplatte befindliche ist das rechte, das in der Mitte derselben gelegene das linke.

Der Knochen des Schulterblattes (Scapula) besteht aus einer fast viereckigen Platte von 5 mm Länge. Die Breite desselben steht der Länge nur wenig nach. Auf der Innenseite läuft von der hintern Ecke des an das Coracoid gränzenden Randes aus ein schwacher Kiel bis in die Mitte der Platte. Der dorsale Rand ist ein klein wenig breiter als der ventrale. Nach dem ersteren hin bemerkt man eine Rauhigkeit, von

Muskelansätzen herrührend, auf dem Knochen. Der vordere und der hintere Rand sind gegen die Mitte zu etwas eingebogen; am vorderen nimmt man noch ausser der concaven Begränzungslinie eine bereits im Bereiche des Knochens befindliche, tiefe, zungenförmig nach der Mitte der Platte gerichtete Bucht wahr.

Sapheosaurus besitzt, wie es scheint, eine Scapula von der gleichen Form. Jene von Hatteria ähnelt derjenigen von *Homoeosaurus*, ist aber schmäler.

Der verkalkte Theil des Coracoids (*l.Cor.*) bildet eine ziemlich kräftige, nahezu elliptische Knochenplatte. Es ist kein Fenster darin vorhanden, sondern nur ein in der Nähe der Scapula befindliches Foramen. Das Bein zeigt dem Beschauer seine Innenseite [27]). Der grössere Theil der Fläche desselben ist mit starken Rauhigkeiten wegen der Anheftung des Unterschulterblattmuskels *(M. subcoracoscapularis)* bedeckt. Am hinteren, kürzeren Ende befindet sich, wie bei *Chamaeleo*, ein mässig breiter und nicht besonders tiefer Einschnitt. Der laterale, an das Schulterblatt anstossende Rand bildet hinten eine gerade Linie; der Vorderrand und die mediale Seite des Coracoids sind gerundet, der Bogen des medialen Randes ist weiter und flacher als jener vom vorderen Theil. Die ganze Länge des Coracoids beträgt 6 mm, die Breite 5 mm. Der in Rede stehende Knochen besitzt im Allgemeinen grosse Aehnlichkeit mit dem von *Hatteria;* auch die Position des Foramen coracoideum ist dieselbe. Ein Unterschied ergibt sich nur in der Art, dass das knöcherne Coracoideum von *Homoeosaurus* nach vorn eine grössere Ausdehnung besitzt, während es zugleich nach hinten zu kürzer abgeschnitten ist; es zeigt ferner eine Einkerbung auf der hinteren Seite, die bei *Hatteria* fehlt. Letzteres Merkmal wie auch den Mangel der Fensterbildung theilt es mit dem entsprechenden Knochen von *Chamaeleo*, von dem es sich wieder dadurch unterscheidet, dass der vordere und mediale Rand gerundeter verläuft und dass das Foramen eine (wenn auch kurze) Strecke weit vom Scapularrande entfernt sich befindet. Bei *Chamaeleo* ist es nach Gegenbaur in der beide Knochen trennenden Naht enthalten [28]).

---

27) Auf Taf. II wurde auch die Aussenseite des linken Coracoids darzustellen versucht *(l. Cor.*)*.

28) Dr. Carl Gegenbaur. Untersuchungen zur vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere. 2. Heft, Schultergürtel der Wirbelthiere. Leipzig 1865. S. 45 tab. II fig. 22.

Theile des zweiten Coracoids mit Resten von den schmalen Knochenleisten der Clavicula glaubt man an einer Stelle des Gesteinsstückes, neben dem rechten Oberarm, zu entdecken. Es ist hier ferner eine Parthie einer nicht ganz verknöcherten Membran sichtbar. Die Reste lassen jedoch keine völlig sichere Deutung zu.

Vom Becken ist nur von einem der beiden Sitzbeine der Abdruck sichtbar (neben dem rechten Humerus, auf dem Abdruck liegt zur Hälfte eine der beiden Ulnae, s. Taf. I). Der Knochen zeigt eine beträchtliche Breite, die am Rande 8 mm beträgt. Das Becken von *Homoeosaurus* (am besten noch am Kelheimer Exemplar II erhalten) ist, wie auch das von Hatteria, nach dem Lacerten-Typus gebaut.

Gliedmaassen.

Von den Gliedmaassen sind die grösseren fast insgesammt, wenngleich auch jeder Knochen in isolirter Lage, überliefert.

Die beiden Knochen des Oberarmes (Humerus) sind ihrer ganzen Länge nach von vorne aufgedeckt. Der mit mehreren anderen Knochen zusammengelagerte ist der rechte, der freier liegende, seitlich hinausgeschobene der linke. Bei beiden ist das untere (distale) Ende gegen die Kopfseite der Versteinerung gerichtet.

Der Humerus (*r., l. Hum.*) stellt einen schlanken Knochen mit beiderseits verbreitertem Ende vor. Die Länge beträgt 17 mm; die Breite am proximalen Ende 5 mm, am distalen etwas über 4 mm, in der Mitte fast nur 1 mm. Das distale Ende besitzt, wie gewöhnlich, eine starke Drehung gegen das proximale. Am letzteren hebt sich der Processus medialis gut heraus, nach der anderen Ecke senkt sich der Knochen beträchtlich ein (wegen der Drehung, da die distale Verbreiterung im Niveau der Fläche der Gesteinsplatte liegt); der hier nach unten hin sich anschliessende, wahrscheinlich kräftige Processus lateralis liegt im Gestein verborgen. Am distalen Ende gewahrt man deutlich die Vorsprünge der beiden Condyli, des Condylus radialis an der lateralen und des C. ulnaris an der medialen Seite. Nahe beim Condylus radialis, in einer Entfernung von 2 mm vom distalen Rande, befindet sich ein kräftiges Loch zum Durchgang von Gefässen (wie bei *Sapheosaurus*).

Neben dem rechten Humerus liegen die zwei Knochen des rechten Vorderarmes in der Ansicht von vorn. Die proximalen Enden sind nach der Kopfparthie des Fossils gerichtet. Der schlankere Knochen mit mässig verbreiterten Enden ist der Radius, der stärkere die Ulna. In der Mitte ist letztere noch schmal und nimmt langsam nach beiden Enden an Breite zu. Das obere Ende des Ulna-Beines ist 2 mm breit, das untere Ende hält etwas weniger, die Länge bemisst sich auf 14 mm.

Die beiden Oberschenkel (Femora) bilden mit den beiden zu einander parallel gestellten Tibien, abgesehen von einigen kleineren Knöchelchen, die nahe am Unterrande der Gesteinsplatte befindliche Skelettparthie. Die proximalen Enden der vier Knochen sind nach dem Haupttheil des Skelettes gekehrt.

Das Femur (s. Taf. II) stellt einen schwach S-förmig gebogenen, derben Knochen von ziemlich gleichmässiger Stärke vor. Die Enden sind verhältnissmässig wenig angeschwollen. Die Länge beträgt 22 mm, die Breite an den Enden 3—4 mm. Der am weitesten nach unten hinausgeschobene Knochen scheint mir der linke zu sein. Es liegt dann die Entblössung beider Knochen von der medialen Seite vor, und der Condylus am distalen Ende (wegen der seitlichen Lage ist von den beiden Condylen nur einer deutlich zu sehen) ist als der Condylus internus anzusprechen. Ein deutliches Collum femoris ist nicht zu erkennen. Der Trochanter minor (ziemlich gut am linken Femur wahrzunehmen) bildet nur einen mässig starken, stumpfen Höcker, der Trochanter major scheint ganz zu fehlen.

Die Tibia ist ein geradgestreckter, ansehnlicher Knochen von 21 mm Länge. Sie zeigt sich dem grössten Theil ihrer Länge nach ziemlich cylindrisch, gegen das obere Ende, welches einen dreiseitigen Querschnitt gehabt haben mag, verbreitert sie sich langsam. Die Breite beträgt hier 3 mm. Das distale Ende, ein klein wenig breiter als das proximale, ist fast dreiseitig und am Rande durch eine leichte Einbuchtung in zwei Hübel geschieden. Die eine der beiden Tibien ist aufgebrochen und lässt eine geräumige Markhöhle erkennen.

Die Fibula, von welcher gleichfalls beide Knochen vorliegen, ist ein schmales, langgezogenes, an den Enden wenig verbreitertes Bein

von 20 mm Länge. Am proximalen Ende zeigt es eine mässig starke Krümmung.

Von den unteren Gliedmaassen finden sich zahlreiche Stücke in isolirtem Zustande auf der Fossilplatte vor. Eine eingehendere Aufzählung derselben dürfte jedoch überflüssig sein, da an den von H. v. Meyer beschriebenen Exemplaren gerade diese Theile des Skelettes durch gute Erhaltung sich auszeichnen und daher in ihren Einzelheiten bereits ziemlich genau gekannt sind. Bezüglich des Tarsus von *Homoeosaurus* kommt Gegenbaur [29]) zu dem Schlusse, dass ein „discretes Fibulare (Calcaneus) und ein durch Intermedium und Tibiale gebildeter Astragalus, in den auch das Centrale wie bei den heutigen Eidechsen eingegangen sein muss", entwickelt ist. „Von der zweiten Reihe ist nur ein einziges, grösseres, rundliches Knöchelchen vorhanden, welches der vierten und fünften Zehe zur Einlenkung dient und sich damit als Cuboideum bekundet. Das nicht mehr nachweisbare Tarsale 3 war wahrscheinlich knorpelig. Der fünfte Metatarsalknochen besitzt eine viel einfachere Gestalt als bei allen jetzt lebenden Reptilien" (Gegenbaur). Man vergleiche auch die an demselben Orte gegebenen Bemerkungen über den Tarsus von *Sapheosaurus*.

Die Phalangen-Zahl an der Hand bei Homoeosaurus ist nach H. v. Meyer 2. 3. 4. 5. 3; am Fusse 2. 3. 4. 5. 4. Es entsprechen diese Zahlenreihen den bei lebenden Lacerten incl. *Hatteria* zu beobachtenden Verhältnissen.

Bemerkungen über Homoeosaurus macrodactylus.

Eine schwierige Frage, die wir schon am Eingange unserer Arbeit berührt haben, ist die der Abgränzung der zu *Homoeosaurus* gehörigen Stücke in einzelne Arten. Man begegnet hier ähnlichen Schwierigkeiten, wie sie bei der Charakteristik der Species in anderen jurassischen Reptilgeschlechtern, beispielsweise den Pterodactylen, entgegentreten.

Bei der verhältnissmässig kleinen Anzahl von Exemplaren scheint mir die Sache noch nicht völlig spruchreif zu sein und erst bei Auswahl

29) Gegenbaur. loc. cit. 1. Heft Carpus und Tarsus S. 81.

eines zahlreicher vorliegenden Materiales dürfte sich entscheiden lassen, ob unter den zu *Homoeosaurus* gezogenen Skeletten zwei oder gar noch mehr Arten enthalten sind oder ob diese sämmtlich zu einer einzigen Art gehören.

Homoeosaurus macrodactylus soll sich in folgenden Punkten von *Maximiliani* unterscheiden (H. v. Meyer [30]):

1) Der Fuss ist bei ersterem länger, die Klauenglieder sind stärker.
2) Die Hand ist länger als der Vorderarm, bei H. Maximiliani gerade so lang; der Fuss ist auffallend länger als der Unter- oder Oberschenkel, bei letztgenannter Art ist diess in nur geringem Maasse der Fall.
3) *H. Maximiliani* soll nur 19, *macrodactylus* 21 Rückenwirbel besessen haben.
4) Bei *H. macrodactylus* ist der Schwanz stärker und
5) der Kopf schlanker und gleichförmiger breit als bei *Maximiliani.*

Die letzten 3 Punkte scheinen mir von keiner Bedeutung zu sein. Bei *H. macrodactylus* ist die Wirbelsäule nicht so vollständig erhalten, um die Zahl der Wirbel sicher angeben zu können. Die etwas grössere Stärke der Wirbel im hintern Abschnitte desselben dürfte überhaupt als kein ins Gewicht fallendes Vergleichsmoment erachtet werden, und was die Verschiedenheit in der Kopfbildung betrifft, so ist diese offenbar nur durch eine Verschiebung oder andere Lage der Kopfknochen bedingt. Wichtiger sind die ersten beiden Punkte. Allein es darf hier nicht ausser Acht gelassen werden, dass bei allen anderen Homoeosaurus-Skeletten Hand und Fuss mehr oder minder eingezogen sind und dadurch verkürzt erscheinen, während bei dem in Rede stehenden Fossil die Phalangen gerade ausgestreckt sind. Es ist trotzdem nicht zu leugnen, dass hier die vorderen Theile der Extremitäten ein wenig länger sind; vielleicht könnte dieser Umstand durch eine Verschiedenheit im Altersstadium erklärt werden.

Ich möchte, da zur Zeit nur ein einziges Exemplar von *H. macrodactylus* vorliegt, noch nicht mit Bestimmtheit die Behauptung aufstellen, dass dasselbe mit *H. Maximiliani* vereinigt werden müsse. Es sollte in diesen Zeilen nur darauf hingewiesen werden, dass die Möglichkeit, ja Wahrscheinlichkeit dieser Annahme besteht.

---

30) Palaeontogr. XV S. 55.

Wenn die als *H. macrodactylus* bezeichnete Versteinerung eine besondere Art bildet, so dürfte das Letztere auch für das hannoversche Exemplar von Homoeosaurus gelten. Dasselbe zeichnet sich durch beträchtlich grössere Dimensionen gegenüber dem Solenhofener *Maximiliani* aus. Hier kommt noch in Betracht, dass eine, wenn auch nur geringe, Verschiedenheit im Alter der Ablagerungen vorhanden ist. Doch will ich es gegenwärtig nicht wagen, eine Abgliederung von der Hauptart durchzuführen.

Ob ein oder mehrere Species von *Homoeosaurus* vorliegen, ist im Grunde von keiner besonderen allgemeinen Bedeutung. Vorstehende Arbeit hat hauptsächlich den Zweck verfolgt, Beiträge und Ergänzungen zur Kenntniss der anatomischen Verhältnisse der genannten Gattung zu liefern. Der Skelettbau von Homoeosaurus ist jetzt, hauptsächlich durch das hier beschriebene Stück, so ziemlich erschlossen. Wollen wir hoffen, dass durch weitere Funde auch über die Beschaffenheit des Hinterschädels die erwünschte Aufklärung erbracht werden kann.

Die Resultate, zu welchen ich durch die Untersuchung des neuen Exemplares gelangt bin, fasse ich zum Schlusse in einer verbesserten Aufzählung der Gattungsmerkmale für *Homoeosaurus* zusammen.

Charakteristik des Genus Homoeosaurus

H. v. Meyer 1847, emend. v. Ammon 1885.

Schädel kurz, gerundet, hinten breit. Augenhöhlen gross (6 mm). Nasenloch von mässiger Länge (4,5 mm). Frontale lang (13 mm), paarig, vorn in der Mitte und seitlich in Spitzen endigend. Praemaxillare paarig. Maxillare (13 mm lang) hinten und vorne zugespitzt, nahe dem Unterrand mit mehreren Löchern. Praefrontale gut entwickelt, fast den ganzen Vorderrand der Orbita bildend. Postfrontale (5 mm lang) hinten zugespitzt, nach Lacertilierart geformt. Jugale vorn spitz, hinten breit. Parietale wahrscheinlich breit. Ueber die übrigen Kopfknochen lassen sich noch keine sicheren Angaben machen.

Unterkiefer (23 mm lang) aus Dentale, Coronoideum, Complementare, Operculare, Angulare und Articulare bestehend. An der vorderen Gränze des Complementare ein Loch.

Bezahnung acrodont, im Unterkiefer derjenigen von Hatteria entsprechend. Zähne stumpf-konisch, bei erwachsenen Individuen nur auf den hinteren Theil des Dentale beschränkt. Die zwischen den Zähnen befindlichen Theile des Alveolarrandes gleichfalls mit Schmelz bedeckt.

Wirbel amphicoel. Gesammtzahl 66. Halswirbel 4 oder einige wenige mehr, vom Atlas bis zum Becken 23 Wirbel. Schwanzwirbel einige über 40. Form der Wirbel wie sonst bei den Lacertiliern, mit deutlichen in der Mitte stehenden Querfortsätzen. Die Mehrzahl der Schwanzwirbel zeigt eine Quergliederung. 2 Sacralwirbel, von ihren breiten Seitenfortsätzen durch Naht geschieden (wie bei Hatteria).

Rippen stark, einköpfig, die vorderen am Rumpf mit knorpeligen Sternocostalia, die übrigen gleichfalls mit knorpeligen sternalen Theilen (Hämapophysen). In den Bauchmuskeln befanden sich verknöcherte Sehnen, sog. Bauchrippen. Jede Abdominalrippe besteht aus drei Theilen (wie bei Hatteria).

Sternum knorpelig, breit. Episternum (claviculares Sternum) stabförmig, schmal, oben T-förmig.

Scapula vierseitig, ähnlich der von Hatteria, aber etwas gedrungener.

Coracoid eine elliptische Knochenplatte bildend, mit einer Kerbe am unteren Rande, ohne Fenster, nur mit einem Foramen (ähnlich dem von Hatteria und Chamaeleo).

Becken nach Lacertilierart beschaffen. Gliedmaassen im Ganzen auch.

Humerus in der Mitte schmal, an den Enden verbreitert, nahe am distalen Ende mit einem Loch. Femur schwach S-förmig gekrümmt, mit wenig verbreiterten Enden, Trochanter minor nur schwach, major gar nicht vorhanden. Tibia in der Mitte ziemlich schlank mit derben Enden. Fibula unweit des proximalen Endes leicht gekrümmt.

Tarsus: Fibulare discret, Astragalus aus Intermedium und Tibiale, sowie dem Centrale gebildet. Tarsale 3 wahrscheinlich knorpelig. Metatarsale V von einfacherer Gestalt als bei lebenden Reptilien.

Phalangenzahl (wie bei den übrigen Lacerten) an der Hand 2. 3. 4. 5. 3, am Fusse 2. 3. 4. 5. 4.

Lager: Solenhofen und mittlere Kimmeridge-Schichten von Hannover.

Inhalts-Uebersicht.

	Seite
Einleitung	499—500
Die bis jetzt bekannten Arten und Exemplare von *Homoeosaurus*	500—503
Beschreibung eines neuen Exemplares von *Homoeos. Maximiliani*	503—523
Allgemeines, Fundort, Lager	503—505
Schädel	505—511
Bezahnung	511—512
Wirbelsäule	512—516
Rippen und Sternalapparat	516—519
Schulter- und Beckengürtel	519—521
Gliedmaassen	521—523
Bemerkungen über *Homoeosaurus macrodactylus*	523—525
Charakteristik des Genus *Homoeosaurus*	525—526

Tafel-Erklärung.

Tafel I. *Homoeosaurus Maximiliani* H. v. Meyer. Lichtdruckbild in Originalgrösse. Aus Solenhofener Plattenkalk, Pointner Forst bei Kelheim. Paläontologisches Museum in München.

Tafel II. Erläuternde Skizze zu Taf. I. Die minder wichtigen Theile der Versteinerung wurden weggelassen. Sämmtliche Knochen befinden sich in der gleichen Stellung wie auf Taf. I. Neu eingesetzt ist nur Metacarpale V, der ausführlicher gezeichnete linke Unterkiefer (rechte obere Ecke des Bildes) und das linke Coracoid von der Aussenseite (linke Ecke oben).

Schädel.

1 Frontale.
2 Praefrontale.
3 Parietale.
4 Maxillare.
5 Jugale.
6 Postfrontale.
7 Squamosum.
8, 9, 10, 11 Nicht näher bestimmbare Kopfknochen.
N. Nasenloch.
O. Augenhöhlen.
r. U. rechter, *l. U.* linker } Unterkiefer.

d. Zähne; *dent.* Dentale; *cor.* Coronoideum; *compt.* Complementare; *art.* Articulare; *oper.* Operculare; *ang.* Angulare; *for.* Foramen.

Wirbelsäule.

HW. Halswirbel.
c. Rückenmarks-Canal; *g.* Gelenkfläche.

RW. Rumpfwirbel.
sp. Dornfortsätze (Proc. spinosi); *z.* Gelenkfortsätze (Zygapophysen); *za.* vordere Gelenkfortsätze; *zp.* hintere Gelenkfortsätze; *t.* Querfortsätze.

v.SW. vordere, *mSW.* mittlere, *hSW* und *SW.* hintere Schwanzwirbel.
sp. Dornfortsätze; *t.* sog. Querfortsätze; *h.* untere Bogen (Hämapophysen).

1.SaW. erster, *2.SW.* zweiter Sacralwirbel.
r. Seitenfortsätze derselben; *z.* Zygapophysen; *g.* Gelenkhöhle.

Schultergürtel, Sternalapparat und Rippen.

Ep. Episternum.

l.Cor. linkes Coracoid von innen; *l.Cor.** linkes Coracoid von aussen.
m. mediale; *l.* laterale Seite; *k.* Kerbe; *g.* Gelenkgrube; *f.* Foramen coracoideum.

r.Sc. rechtes, *l.Sc.* linkes Schulterblatt.

Ri. vertebrale Rippen.

ARi. Abdominal- oder Bauchrippen.
m. Mittelstücke; *s.* seitliche Theile der Bauchrippen.

Extremitäten.

r.Hum. rechter, *l.Hum.* linker Oberarmknochen.
pm. Processus medialis.

r.Rad. Radius des rechten Vorderarmes.

r.Uln. rechte Ulna.

Femora. Die beiden Oberschenkelknochen.
tm. Trochanter minor.

Tibiae } Die Knochen des Unterschenkels.
Fib. }

An sämmtlichen grösseren Extremitäten-Knochen bedeutet *pr* das proximale, *di* das distale Ende.

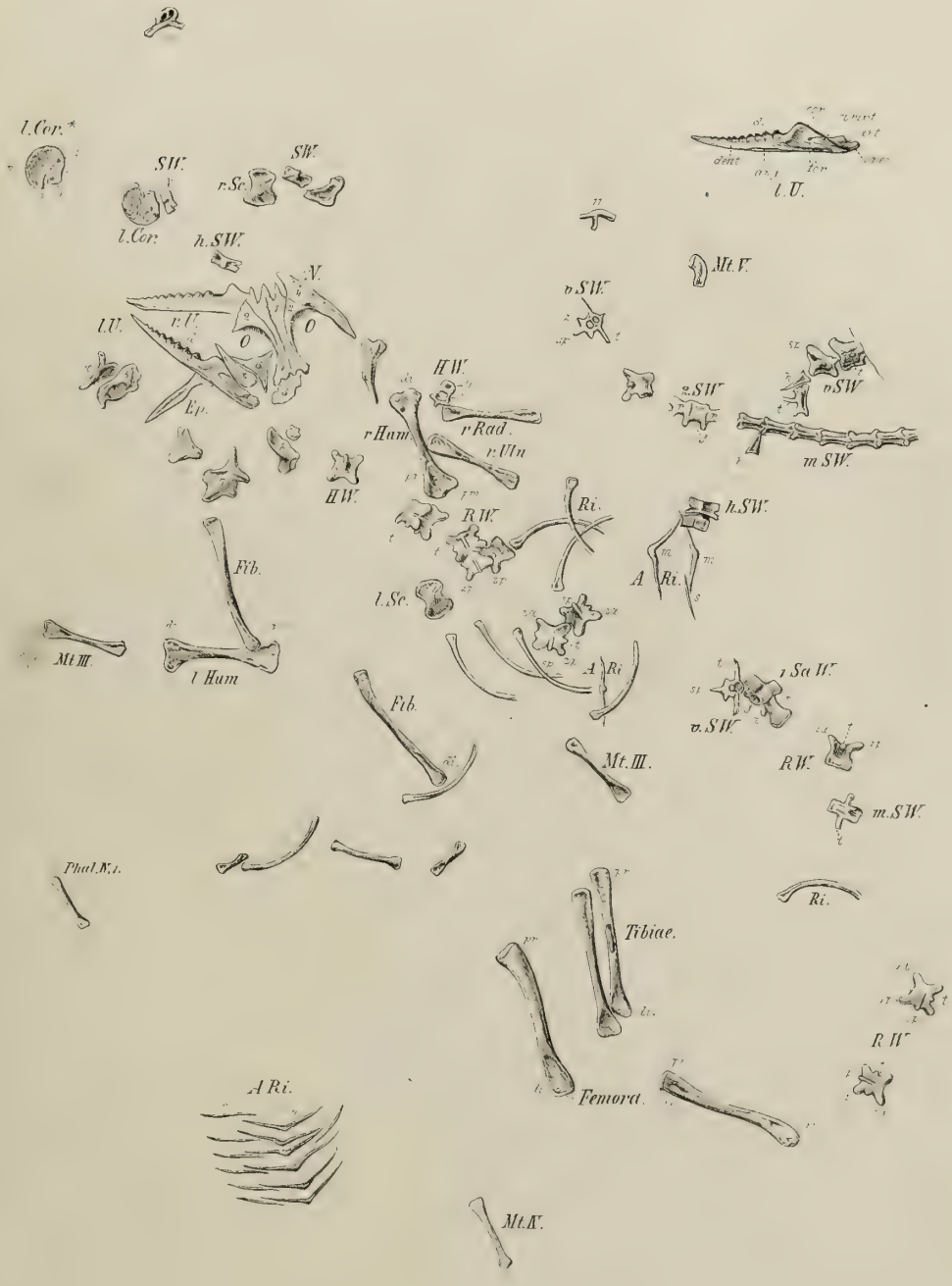
Mt. Metatarsalia.

Phal. Phalangen.

26 NOV 1885

Lichtdruck d. Verlagsanstalt Bruckmann in München.

NATURAL HISTORY


l.Cor.*
SW.
l.Cor.
SW.
r.Sc.
h.SW.
V.
l.U.
r.U.
O
O
Ep.
HW.
r.Hum.
r.Rad.
r.Uln.
HW.
RW.
Ri.
l.Sc.
Fib.
Mt.III.
l.Hum
Fib.
Mt.III.
A Ri.
A Ri.
l.Sc.W.
v.SW.
RW.
m.SW.
Ri.
Phal.N.1.
Tibiae.
Femora.
A Ri.
Mt.IV.
l.U.
Mt.V.
v.SW.
z.SW.
n.SW.
m.SW.
h.SW.
A Ri.

v. Ammon del

Inhalt.

Seite

Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung und eines kreisrunden Schirmchens theoretisch und experimentell bearbeitet von *E. Lommel.* Mit 9 lithographirten Tafeln 229

Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale. Von *J. Lüroth* in Freiburg in Baden 329

Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit. Von *Karl Strecker.* 367

Beiträge zur Kenntniss der Nervenfasern. Von *Theodor Boveri.* Mit 2 Tafeln. 421

Ueber Homoeosaurus Maximiliani. Von *Dr. Ludwig von Ammon.* Mit 2 Tafeln. 497

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

FÜNFZEHNTEN BANDES

DRITTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LIII. BAND.

MÜNCHEN 1886.

VERLAG DER K. AKADEMIE

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

Die

Beugungserscheinungen

geradlinig begrenzter Schirme.

Von

E. Lommel.

Mit lithographirten Tafeln.

Vorwort.

Seit Fresnel's grundlegender Abhandlung[1]) ist die analytische Behandlung der Beugung sphärischer Wellen an geradlinig begrenzten Schirmen vervollkommnet worden durch Cauchy[2]), Knochenhauer[3]), Quet[4]) und Gilbert[5]). Das Verfahren Fresnel's, obwohl vollkommen ausreichend zur numerischen Bestimmung der Lichtstärke und ihrer Maxima und Minima, war wenig geeignet, die Gesetze der Erscheinungen allgemein erkennen zu lassen. Nachdem es in der Folge Knochenhauer und Quet gelungen war, gewisse einfache Gesetze aus dem Intensitätsausdruck abzuleiten, war insbesondere Gilbert mit Erfolg bestrebt, nicht nur die Zahlenrechnungen zu vereinfachen, sondern auch die Gesetze der Erscheinungen durch algebraische Discussion unmittelbar aus den Formeln zu entwickeln. Aber auch die schöne Arbeit Gilbert's vermochte nicht, den Schleier völlig zu lüften, welcher die verwickelten Gesetze der Vertheilung der Maxima und Minima in dem direct beleuchteten Gebiete des Beugungsbildes eines engen Spaltes und eines schmalen

1) Fresnel, Mémoire sur la diffraction de la lumière, Mém. de l'Acad. des sc., V. p. 339. 1818. — Ann. de chim. et de phys., (2), XI, p. 246, 337. — Oeuvres complètes, t. I. p. 247.

2) Cauchy, Note sur la lumière, Compt. Rend., II, p. 455. 1836. — Note sur la diffraction de la lumière, C. R., XV. p. 534, 573. 1842.

3) Knochenhauer, Ueber die Oerter der Maxima und Minima des gebeugten Lichts nach den Fresnel'schen Beobachtungen, Pogg. Ann. XLI, p. 103. 1837. — Die Undulationstheorie des Lichts. Berlin, 1839.

4) Quet, Mémoire sur la diffraction de la lumière dans le cas d'une fente très-étroite et dans le cas d'un fil opaque, C. R., XLIII, p. 288. — Ann. de chim. et de phys., (3), XLIX, p. 385, 417. 1856.

5) Gilbert, Recherches analytiques sur la diffraction de la lumière, Mém. couronnés de l'Acad. de Brux., XXXI. p. 1. 1862.

undurchsichtigen Streifchens noch immer verhüllte. Eine ebenso übersichtliche Darstellung dieser Gesetze, wie ich sie für die Beugungserscheinungen der kreisförmigen Oeffnung und des kreisförmigen Schirmchens in einer früheren Abhandlung[1]) gegeben habe, blieb bis jetzt noch zu wünschen übrig. Einen solchen Ueberblick auch hier zu geben, bildet die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung.

Derselbe Weg, welcher in der eben citirten Arbeit betreten wurde, führt auch in diesen Fällen zum Ziel. Es ergibt sich sogar, dass die Erscheinungen bei geradliniger und bei kreisförmiger Begrenzung des beugenden Schirmes durch eine und dieselbe einfache Formel ausgedrückt werden, nämlich für die kreisrunde Oeffnung und den engen Spalt durch:

$$M^2 = \left(2^{3\nu-2} \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{y^\nu}\right)^2 \left(U_\nu^2 + U_{\nu+1}^2\right),$$

für das kreisrunde Scheibchen und den schmalen Streifen durch:

$$M_1^2 = \left(2^{3\nu-2} \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{y^\nu}\right)^2 \left(V_{-\nu+1}^2 + V_{-\nu+2}^2\right).$$

Hierin sind U_ν und V_ν gewisse transscendente Functionen zweier unabhängig Veränderlicher y, z und des Index ν, und hängen unter sich durch die Gleichung:

$$U_\nu - V_{-\nu+2} = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right)$$

zusammen; während y von der Lage der Bildebene in Bezug auf die Lichtquelle und den Beugungsschirm abhängt, gibt z den Ort eines Punktes in der Bildfläche an. Der Ausdruck M^2 wird zu einem Maximum oder Minimum, wenn entweder $I_\nu = 0$ oder $U_{\nu+1} = 0$ ist, der Ausdruck M_1^2 für $I_\nu = 0$ und $V_{-\nu+1} = 0$.

Je nachdem man nun in diesen Formeln $\nu = \frac{1}{2}$ oder $\nu = 1$ setzt, gelten sie für geradlinige oder für kreisförmige Begrenzung des Beugungsschirmes. Diese anscheinend so heterogenen Fälle zeigen sich also auf's innigste mit einander verknüpft, eine und dieselbe Betrachtungsweise findet auf beide Schritt für Schritt gleichmässige Anwendung, und die ganze Theorie der Beugung stellt sich dar wie aus einem Gusse hervorgegangen.

---

1) Lommel, Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung und eines kreisrunden Schirmchens. Abhandl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. XV. 2. p. 233. 1884.

Die in einem besonderen Abschnitt dargelegten einfachen analytischen Eigenschaften der Functionen U_ν und V_ν gestatten, die Gesetze der Erscheinungen durch allgemeine Discussion aus den obigen Formeln zu entwickeln. Wie die Functionen U_1 und U_2 der vorigen Abhandlung von den Bessel'schen Functionen mit ganzzahligem Index, so hängen $U_{\frac{1}{2}}$ und $U_{\frac{3}{2}}$ von denjenigen Bessel'schen Functionen ab, deren Indices ungerade Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind. Der Betrachtung dieser letzteren Klasse von Bessel'schen Functionen, welche bisher weniger Beachtung gefunden hat, ist desshalb ein vorausgehender Abschnitt gewidmet, welcher mancherlei Neues enthält. Am Schlusse der Abhandlung sind Tabellen dieser Functionen mitgetheilt.

In einem Abschnitt über die Fresnel'schen Integrale wird eine neue Art der Berechnung dieser Transscendenten gelehrt, welche, nachdem die eben erwähnten Tabellen der Bessel'schen Functionen vorlagen, mit Leichtigkeit zu deren numerischen Werthen führte, und zugleich Interpolationstafeln lieferte, die für jedes Argument die Zahlenwerthe dieser Integrale anzugeben gestatten.

Die Gesetze der Lichtvertheilung im Beugungsbilde sind den in der vorigen Abhandlung für kreisförmig begrenzte Schirme entwickelten ganz analog. Sie werden wie dort übersichtlich dargestellt durch zwei in der zy-Ebene verlaufende Linienschaaren, deren Gleichungen $I_{\frac{1}{2}} = 0$ und $U_{\frac{3}{2}} = 0$ für den Spalt, $I_{\frac{1}{2}} = 0$ und $V_{\frac{1}{2}} = 0$ für den Streifen sind. Auch hier begegnen wir Wendepunkten der Intensitätscurve von zweierlei Art, welche den früheren Bearbeitungen entgangen sind. Die in einer Reihe von Tabellen aufgeführten numerischen Werthe der Lichtstärke sind analog wie in der vorigen Abhandlung durch graphische Darstellung zur Anschauung gebracht.

Im VIII. Abschnitt wird eine spectrale Beobachtungsmethode beschrieben, welche die vorhin erwähnten Linien der Minima, deren Gleichungen $I_{\frac{1}{2}} = 0$ und $U_{\frac{3}{2}} = 0$ sind, auf dem farbigen Grunde des Spectrums unmittelbar wahrzunehmen gestattet, und damit die experimentelle Bestätigung der vorgetragenen Theorie liefert.

I. Abschnitt.

Aufstellung und Entwickelung der Integrale.

1. Wenn es sich um Beugungsschirme handelt, deren Ränder durch unbegrenzte parallele gerade Linien gebildet werden, so genügt bekanntlich die Betrachtung desjenigen grössten Kreises der einfallenden Kugelwelle, dessen Ebene zu den Begrenzungslinien des Schirmes senkrecht steht. Wählen wir den Auffangschirm zur xy-Ebene, seinen Schnitt mit der Ebene der Kreiswelle zur x-Axe und die vom Lichtpunkt auf ihn gefällte Senkrechte zur z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so beschränkt sich hienach die Untersuchung auf die xz-Ebene. Die Lage eines Punktes der Kreiswelle ist alsdann gegeben durch seine rechtwinkligen Coordinaten x und z, oder, wenn a den Radius des Kreises und ψ den Winkel bezeichnet, welchen der nach dem Punkte x, z vom Lichtpunkt gehende Strahl mit der z-Axe bildet, durch diese Polarcoordinaten a und ψ.

Nimmt man die Vibrationsintensität für die Bogenlänge 1 der mit dem Radius 1 um den Lichtpunkt beschriebenen Kreiswelle zur Einheit, so sendet das im Punkte x, z gelegene Element $a\,d\psi$ der Welle vom Radius a die Schwingungsgeschwindigkeit:

$$\frac{1}{d}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d}{\lambda}\right)\cdot d\psi$$

nach dem Punkte der x-Axe, dessen Abscisse ξ ist, und der vom Punkte x, z den Abstand d hat, wenn $2\pi t/T$ die zur Zeit t auf der Kugelwelle vom Radius a herrschende Phase, T die Schwingungsdauer und λ die Wellenlänge bezeichnet.

Die in der Bildebene im Punkte ξ der x-Axe erzeugte Bewegung wird alsdann durch das Integral:

$$\int\frac{1}{d}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d}{\lambda}\right)d\psi$$

ausgedrückt, wenn dasselbe über alle wirksamen Theile der Kreiswelle vom Radius a erstreckt wird.

2. Die Entfernung d ist gegeben durch die Gleichung:

$$d^2 = (x - \xi)^2 + z^2 \qquad = x^2 + z^2 + \xi^2 - 2x\xi.$$

Setzt man die Entfernung des Lichtpunktes vom Auffangschirm $= a + b$, so ist:

$$x = a \sin \psi, \qquad z = a + b - a \cos \psi,$$

$$x^2 + z^2 \quad = b^2 + 4a(a + b) \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi,$$

und man erhält:

$$d^2 = b^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{b^2} - \frac{2a\xi}{b^2} \sin \psi + \frac{4a(a + b)}{b^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi\right).$$

3. Ist der Winkel ψ so klein, dass sein Sinus mit dem Bogen vertauscht werden darf, oder, was dasselbe heisst, dass seine höheren Potenzen von der dritten an gegenüber den niedrigeren zu vernachlässigen sind, und ist ξ/b von derselben Grössenordnung wie ψ, so darf man offenbar:

$$d = b \quad + \frac{\xi^2}{2b} - \frac{a\xi}{b} \sin \psi + \frac{2a(a + b)}{b} \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi$$

setzen. Bezeichnen wir ferner mit ϱ den Abstand des Punktes x, z der Kreiswelle von der z-Axe, so ist:

$$a \sin \psi = \varrho, \text{ oder auch } a\psi = \varrho,$$

und:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \psi = \frac{\varrho^2}{4a^2}.$$

Das obige Integral nimmt alsdann nach Einführung dieser Werthe, und wenn wir die im Nenner unter dem Integralzeichen vorkommende veränderliche Entfernung d durch die constante Entfernung b ersetzen, was erlaubt ist, wenn ψ und ξ/b hinlänglich klein sind, die folgende Form an:

$$\frac{1}{ab} \int \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{\xi^2}{2b\lambda} + \frac{\xi}{b\lambda} \varrho - \frac{a + b}{2ab\lambda} \varrho^2\right) d\varrho.$$

4. Dieses Integral, welches die resultirende schwingende Bewegung im Punkte ξ der x-Axe in der Bildebene darstellt, bringen wir nun unter Weglassung des constanten Factors 1/ab auf die kanonische Form:

$$M \sin (p - \chi),$$

indem wir:

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{\xi^2}{2b\lambda}\right) = p,$$

und:

$$\int \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a+b}{2ab} \varrho^2 - \frac{\xi}{b} \varrho \right) d\varrho = C,$$

$$\int \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a+b}{2ab} \varrho^2 - \frac{\xi}{b} \varrho \right) d\varrho = S$$

setzen. Alsdann ist:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{S}{C}$$

und die im Bildpunkt ξ herrschende Lichtstärke ist dem Ausdruck:

$$M^2 = C^2 + S^2$$

proportional.

5. Zur Abkürzung werde nun:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a+b}{2ab} = \tfrac{1}{2} k, \qquad \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\xi}{b} = l$$

gesetzt; dann ist:

$$\begin{aligned} C &= \int \cos(\tfrac{1}{2} k\varrho^2 - l\varrho)\, d\varrho \\ &= \int \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \cos l\varrho \, d\varrho \quad + \int \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \sin l\varrho \, d\varrho, \\ S &= \int \sin(\tfrac{1}{2} k\varrho^2 - l\varrho)\, d\varrho \\ &= \int \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \cos l\varrho \, d\varrho \quad - \int \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \sin l\varrho \, d\varrho. \end{aligned}$$

Nun ist bekanntlich, wenn $I_\nu(z)$ die Bessel'sche Function erster Art bezeichnet:

$$I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \qquad I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z,$$

und es kann demnach:

$$\cos l\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (l\varrho)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(l\varrho), \qquad \sin l\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (l\varrho)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}(l\varrho)$$

geschrieben werden. Die vier Integrale, auf welche C und S soeben zurückgeführt wurden, nehmen alsdann folgende Gestalt an:

$$\int \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \cos l\varrho \, d\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int (l\varrho)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho,$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \cos l\varrho \, d\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int (l\varrho)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho,$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \sin l\varrho \, d\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int (l\varrho)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho,$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \sin l\varrho \, d\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int (l\varrho)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho.$$

6. Die rechts stehenden Integrale sind in den allgemeineren Formen (in welchen ν beliebig reell zu denken ist):

$$\gamma_\nu = \int (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho, \qquad \gamma'_\nu = \int (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho,$$

$$\sigma_\nu = \int (l\varrho)^{-\nu+1} I_\nu(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho, \qquad \sigma'_\nu = \int (l\varrho)^{-\nu+1} I_\nu(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho$$

für $\nu = \frac{1}{2}$ enthalten; sie umfassen aber auch als specielle Fälle (die beiden ersteren für $\nu = 1$, die beiden letzteren für $\nu = 0$) diejenigen Integrale, auf welche wir die Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter Schirme zurückgeführt haben [1]). Es lässt sich somit die ganze Theorie der Beugung durch die Betrachtung dieser allgemeineren Integrale mit einem Male erledigen.

7. Um diese Integrale in Reihen zu entwickeln, bedienen wir uns der Methode der theilweisen Integration, indem wir bei γ_ν und γ'_ν zuerst $(l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho)$ als zu integrirenden Factor ansehen, und die Formel:

$$\int z^\nu I_{\nu-1} \, dz = z^\nu I_\nu(z)$$

in fortgesetzte Anwendung bringen. Wir erhalten so:

$$\gamma_\nu = \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, \Sigma (-1)^p \cdot \frac{k^{2p}}{l^{4p+1}} (l\varrho)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(l\varrho)$$

$$+ \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, \Sigma (-1)^p \cdot \frac{k^{2p+1}}{l^{4p+3}} (l\varrho)^{\nu+2p+1} I_{\nu+2p+1}(l\varrho),$$

1) Lommel, Abhandl. der k. b. Akad. d. Wiss. XV. 2. p. 233. 1884.

wo der Rest entweder:

$$R = (-1)^n \cdot \frac{k^{2n+1}}{l^{4n+2}} \int (l\varrho)^{\nu+2n+1} I_{\nu+2n}(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho,$$

oder:

$$R = (-1)^{n+1} \cdot \frac{k^{2n+2}}{l^{4n+4}} \int (l\varrho)^{\nu+2n+2} I_{\nu+2n+1}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho$$

beträgt, je nachdem man die Entwickelung mit dem $(n+1)^{ten}$ Gliede der ersten oder der zweiten Reihe abbrechen lässt.

8. Etwas übersichtlicher gestaltet sich die vorstehende Entwickelung in folgender Schreibweise:

$$\gamma_\nu = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, \Sigma(-1)^p \left(\frac{k\varrho}{l}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(l\varrho)$$

$$+ \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, \Sigma(-1)^p \left(\frac{k\varrho}{l}\right)^{\nu+2p+1} I_{\nu+2p+1}(l\varrho).$$

Setzen wir hier zur Vereinfachung:

$$k\varrho^2 = y, \qquad l\varrho = z,$$

so ergibt sich γ_ν in folgender Form:

$$\gamma_\nu = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \cos \tfrac{1}{2} y \, \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(z)$$

$$+ \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \sin \tfrac{1}{2} y \, \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p+1} I_{\nu+2p+1}(z).$$

Ebenso erhalten wir:

$$\gamma'_\nu = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \sin \tfrac{1}{2} y \, \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(z)$$

$$- \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \cos \tfrac{1}{2} y \, \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p+1} I_{\nu+2p+1}(z),$$

wo die Restintegrale die nämliche Form haben wie oben, nur mit dem Unterschiede, dass sin und cos mit einander vertauscht sind.

9. Die zwei in diesen Ausdrücken vorkommenden Reihen, welche nach Potenzen von y/z und nach Bessel'schen Functionen von z fortschreiten, und demnach als Functionen der zwei Veränderlichen y und z (und des Index ν) anzusehen sind, befolgen beide das nämliche Bildungs-

gesetz. Bezeichnen wir die erstere mit $U_\nu(y, z)$, oder kürzer mit U_ν, indem wir setzen:

$$U_\nu(y,z) = \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(z),$$

so haben wir:

$$\gamma_\nu = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu}\left(U_\nu \cos\tfrac{1}{2}y + U_{\nu+1}\sin\tfrac{1}{2}y\right),$$

$$\gamma'_\nu = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu}\left(U_\nu \sin\tfrac{1}{2}y - U_{\nu+1}\cos\tfrac{1}{2}y\right).$$

10. Zu einer anderen Entwickelung des Integrales γ_ν gelangen wir, wenn wir demselben die Form:

$$\gamma_\nu = \frac{1}{k}\int (l\varrho)^{\nu-1} I_{\nu-1}(l\varrho)\cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2 k\varrho\, d\varrho$$

geben, und nun unter fortgesetzter Anwendung der bekannten Gleichung:

$$\frac{\partial(z^{\nu-1} I_{\nu-1}(z))}{\partial z} = z^{\nu-1} I_{\nu-2}(z)$$

in Bezug auf den Factor $\cos\frac{1}{2}k\varrho^2 k\varrho\, d\varrho$ theilweise integriren. Wir erhalten so:

$$\gamma_\nu = \sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \Sigma(-1)^p \frac{l^{4p+1}}{k^{2p+1}}(l\varrho)^{\nu-2p+1} I_{\nu-2p-1}(l\varrho)$$

$$+ \cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \Sigma(-1)^p \cdot \frac{l^{4p+3}}{k^{2p+2}}(l\varrho)^{\nu-2p-2} I_{\nu-2p-2}(l\varrho).$$

Der Rest, welcher übrig bleibt, ist entweder:

$$R = (-1)^{n+1}\frac{l^{4n+2}}{k^{2n+1}}\int (l\varrho)^{\nu-2n-1} I_{\nu-2n-2}(l\varrho)\cdot\sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2\, d\varrho,$$

oder:

$$R' = (-1)^{n+1}\frac{l^{4n+4}}{k^{2n+2}}\int (l\varrho)^{\nu-2n-2} I_{\nu-2n-3}(l\varrho)\cdot\cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2\, d\varrho,$$

je nachdem man in der Entwickelung bei dem $(n+1)^{ten}$ Gliede der ersten oder der zweiten Reihe stehen bleibt.

11. Fasst man in geeigneter Weise zusammen, und setzt wiederum:

$$k\varrho^2 = y, \qquad l\varrho = z,$$

so ergibt sich:

$$\gamma_\nu = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \sin\tfrac{1}{2} y \, \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2p-1} I_{\nu-2p-1}(z)$$

$$+ \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \cos\tfrac{1}{2} y \, \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2p-2} I_{\nu-2p-2}(z).$$

Ebenso erhält man:

$$\gamma'_\nu = -\frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \cos\tfrac{1}{2} y \, \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2p-1} I_{\nu-2p-1}(z)$$

$$+ \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \sin\tfrac{1}{2} y \, \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2p-2} I_{\nu-2p-2}(z).$$

12. Bezeichnen wir die erstere der beiden hierin vorkommenden Reihen mit $V_{-\nu+1}(y, z)$, oder kürzer mit $V_{-\nu+1}$, indem wir:

$$V_\nu(y, z) = \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{-\nu-2p} I_{-\nu-2p}(z)$$

setzen, so haben wir:

$$\gamma_\nu = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \left(V_{-\nu+1} \sin\tfrac{1}{2} y + V_{-\nu+2} \cos\tfrac{1}{2} y\right)$$

und:

$$\gamma'_\nu = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \left(-V_{-\nu+1} \cos\tfrac{1}{2} y + V_{-\nu+2} \sin\tfrac{1}{2} y\right).$$

13. Einer ganz ähnlichen Behandlung sind die Integrale σ_ν und σ'_ν fähig. Unterwirft man das Integral:

$$\sigma_\nu = \frac{1}{k} \int (l\varrho)^{-\nu} I_\nu(l\varrho) \sin\tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, k\varrho \, d\varrho$$

unter fortgesetzter Benützung der Gleichung:

$$\frac{\partial(z^{-\nu} I_\nu(z))}{\partial z} = -z^{-\nu} I_{\nu+1}(z)$$

der theilweisen Integration in Bezug auf den Factor $\sin\frac{1}{2} kr^2 \, k\varrho \, d\varrho$, so erhält man zunächst:

$$\sigma_\nu = -\cos\tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, \Sigma(-1)^p \cdot \frac{l^{4p+1}}{k^{2p+1}} (l\varrho)^{-\nu-2p} I_{\nu+2p}(l\varrho)$$

$$-\sin\tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, \Sigma(-1)^p \cdot \frac{l^{4p+3}}{k^{2p+2}} (l\varrho)^{-\nu-2p-1} I_{\nu+2p+1}(l\varrho)$$

mit den Ergänzungsgliedern:

$$R = (-1)^{n+1} \frac{l^{4n+2}}{k^{2n+1}} \int (l\varrho)^{-\nu-2n} I_{\nu+2n+1}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho,$$

oder:

$$R' = (-1)^n \cdot \frac{l^{4n+1}}{k^{2n+2}} \int (l\varrho)^{-\nu-2n-1} I_{\nu+2n+2}(l\varrho) \cdot \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho,$$

je nachdem die Entwickelung bis zum $(n+1)^{ten}$ Gliede der ersteren oder der letzteren Reihe fortgesetzt wird.

14. In mehr übersichtlicher Anordnung können wir diese Entwickelung auch schreiben wie folgt:

$$\sigma_\nu = -\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, \Sigma (-1)^p \cdot \left(\frac{l}{k\varrho}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(l\varrho)$$

$$-\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, \Sigma (-1)^p \left(\frac{l}{k\varrho}\right)^{\nu+2p+1} I_{\nu+2p+1}(l\varrho),$$

oder, wenn wir wieder:

$$k\varrho^2 = y, \qquad l\varrho = z$$

setzen:

$$\sigma_\nu = -\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \cos \tfrac{1}{2} y \, \Sigma (-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(z)$$

$$-\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \sin \tfrac{1}{2} y \, \Sigma (-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu+2p+1} I_{\nu+2p+1}(z).$$

In gleicher Weise findet man:

$$\sigma'_\nu = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \sin \tfrac{1}{2} y \, \Sigma (-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(z)$$

$$-\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \cos \tfrac{1}{2} y \, \Sigma (-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu+2p+1} I_{\nu+2p+1}(z).$$

15. Die erstere der hier vorkommenden Reihen geht aber aus:

$$U_\nu(y, z) = \Sigma (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(z)$$

hervor, wenn man darin y mit z^2/y vertauscht. Folglich ist:

$$\Sigma (-1)^p \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(z) = U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right),$$

und man erhält auf die Functionen U_ν zurückgeführt:

$$\sigma_\nu = -\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\left(U_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)\cdot\cos\tfrac{1}{2}y + U_{\nu+1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)\cdot\sin\tfrac{1}{2}y\right)$$

und:

$$\sigma_\nu' = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\left(U_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)\cdot\sin\tfrac{1}{2}y - U_{\nu+1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)\cdot\cos\tfrac{1}{2}y\right).$$

16. Eine zweite Entwickelung erhalten wir, wenn wir in dem Integral:

$$\sigma_\nu = \int (l\varrho)^{-\nu+1} I_\nu(l\varrho)\sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2\, d\varrho$$

den Ausdruck $(l\varrho)^{-\nu+1} I_\nu(l\varrho)\, d\varrho$ als zu integrirenden Factor ansehen, und die theilweise Integration unter Berücksichtigung der Formel:

$$\int z^{-\nu+1} I_\nu(z)\, dz = -z^{-\nu+1} I_{\nu-1}(z)$$

durchführen. Wir erhalten so:

$$\sigma_\nu = -\sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \Sigma(-1)^p \frac{k^{2p}}{l^{4p+1}}(l\varrho)^{-\nu+2p+1} I_{\nu-2p-1}(l\varrho)$$

$$-\cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \Sigma(-1)^p \frac{k^{2p+1}}{l^{4p+3}}(l\varrho)^{-\nu+2p+2} I_{\nu-2p-2}(l\varrho),$$

wo, je nachdem die Entwickelung bis zum $(n+1)^{ten}$ Gliede der ersteren oder der letzteren Reihe vordringt, als Restglied entweder:

$$R = (-1)^n \cdot \frac{k^{2n+1}}{l^{4n+2}} \int (l\varrho)^{-\nu+2n+2} I_{\nu-2n-1}(l\varrho)\cdot\cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2\, d\varrho$$

oder:

$$R' = (-1)^{n+1}\frac{k^{2n+2}}{l^{4n+4}} \int (l\varrho)^{-\nu+2n+3} I_{\nu-2n-2}(l\varrho)\sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2\, d\varrho$$

hinzuzufügen ist.

17. Uebersichtlicher zusammengefasst kann diese Entwickelung auch wie folgt geschrieben werden:

$$\sigma_\nu = -\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \Sigma(-1)^p\left(\frac{l}{k\varrho}\right)^{\nu-2p-1} I_{\nu-2p-1}(l\varrho)$$

$$-\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \Sigma(-1)^p\left(\frac{l}{k\varrho}\right)^{\nu-2p-2} I_{\nu-2p-2}(l\varrho),$$

oder, wenn wir wie vorher:

$$y = k\varrho^2, \qquad z = l\varrho$$

setzen:

$$\sigma_\nu = -\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \sin\tfrac{1}{2}y \,\Sigma(-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu-2p-1} I_{\nu-2p-1}(l\varrho)$$

$$-\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \cos\tfrac{1}{2}y \,\Sigma(-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu-2p-2} I_{\nu-2p-2}(l\varrho).$$

Ebenso ergibt sich:

$$\sigma'_\nu = -\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \cos\tfrac{1}{2}y \,\Sigma(-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu-2p-1} I_{\nu-2p-1}(l\varrho)$$

$$+\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \sin\tfrac{1}{2}y \,\Sigma(-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu-2p-2} I_{\nu-2p-2}(l\varrho).$$

18. Da nun, wie man leicht erkennt (vergl. 12):

$$\Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^{\nu-2p-1} I_{\nu-2p-1}(l\varrho) = V_{-\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right),$$

so haben wir:

$$\sigma_\nu = -\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \left(V_{-\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) \cdot \sin\tfrac{1}{2}y + V_{-\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) \cdot \cos\tfrac{1}{2}y\right)$$

und:

$$\sigma'_\nu = -\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \left(V_{-\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) \cdot \cos\tfrac{1}{2}y - V_{-\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) \cdot \sin\tfrac{1}{2}y\right).$$

Hiermit sind aber die beiden Integrale σ_ν und σ'_ν auf die nämlichen Functionen U und V zurückgeführt wie die Integrale γ_ν und γ'_ν.

19. Die Functionen U_ν und V_ν sind für die Theorie der Beugung von fundamentaler Bedeutung. Sie können als der naturgemässe analytische Ausdruck für diese Classe von Erscheinungen angesehen werden, indem sie dieselben vollständig und auf die denkbar einfachste Weise beschreiben. Sie spielen für die kreisförmige Oeffnung und das kreisförmige Scheibchen ($\nu = 1$ und $\nu = 2$) die nämliche Rolle wie für den geradlinig begrenzten Spalt und Streifen ($\nu = \frac{1}{2}$ und $\nu = \frac{3}{2}$), und gestatten daher, diese anscheinend so heterogenen Fälle unter dem gleichen Gesichtspunkt zu betrachten und in gemeinsamer Darstellung zu behandeln. Sie umfassen sowohl die Fraunhofer'schen als die Fresnel'schen Beugungserscheinungen, und enthalten alle analytischen Formen, welche bisher in der Theorie der Beugung zur Verwendung kamen, als specielle Fälle. Ehe wir an die Beugungserscheinungen selbst herantreten, erscheint

es daher nothwendig, die Eigenschaften der Functionen U_ν und V_ν, welche auch ein hervorragendes mathematisches Interesse darbieten, kennen zu lernen. Einer der folgenden Abschnitte ist daher der Untersuchung dieser Functionen gewidmet.

Wie die für kreisförmig begrenzte Schirme massgebenden Functionen U_1 und U_2 mit den Bessel'schen Functionen mit ganzzahligem Index, so hängen die Functionen $U_{\frac{1}{2}}$ und $U_{\frac{3}{2}}$, welche die Beugungsgesetze geradlinig begrenzter Sirme beherrschen, mit denjenigen Bessel'schen Functionen zusammen, deren Index ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ oder von $-\frac{1}{2}$ ist. Diese letzteren haben jedoch, obgleich in mancher Hinsicht ausgezeichnet, bisher weniger Beachtung gefunden als jene. Es erschien daher zweckmässig, der Betrachtung der Functionen U_ν und V_ν einen besonderen Abschnitt über die Bessel'schen Functionen, deren Index $\pm\frac{2n+1}{2}$ ist, vorauszuschicken.

Seit Fresnel pflegte man die Beugung an geradlinigen Rändern auf die nach ihm benannten Integrale zurückzuführen. Diese hervorragende Stellung, welche die Fresnel'schen Integrale bisher in der Theorie der Beugung eingenommen haben, wird ihnen durch die vorliegende Darstellung in keiner Weise geschmälert. Diese Transcendenten erscheinen vielmehr als eine der wichtigsten und brauchbarsten Ausdrucksformen, in welche die Functionen $U_{\frac{1}{2}}$ und $U_{\frac{3}{2}}$ sich kleiden lassen. Es ist daher in Folgendem auch den Fresnel'schen Integralen ein besonderer Abschnitt zugetheilt.

II. Abschnitt.

Die Bessel'sche Function $I_{\pm\frac{2n+1}{2}}(z)$.

20. Die Bessel'schen Functionen, deren Indices ungerade Vielfache von $\frac{1}{2}$ oder von $-\frac{1}{2}$ sind, lassen sich bekanntlich in geschlossener Form durch Sinus und Cosinus im Verein mit gewissen algebraischen Functionen ausdrücken. Denn indem man sie unter fortgesetzter Anwendung der Gleichung [1]):

1) Alle Gleichungen, in welchen ν als Index der Bessel'schen Functionen vorkommt, gelten für jedes beliebige (reelle oder complexe) ν.

$$I_\nu(z) = \frac{2(\nu-1)}{z} I_{\nu-1}(z) - I_{\nu-2}(z)$$

durch successive Erniedrigung oder Erhöhung des Index auf $I_{\frac{1}{2}}$ und $I_{-\frac{1}{2}}$ zurückführt, erhält man:

$$I_{\frac{2n+1}{2}} = R_{n,\frac{1}{2}} \cdot I_{\frac{1}{2}}(z) - R_{n-1,\frac{3}{2}} \cdot I_{-\frac{1}{2}}(z),$$

$$I_{-\frac{2n+1}{2}} = (-1)^n \left(R_{n,\frac{1}{2}} \cdot I_{-\frac{1}{2}}(z) + R_{n-1,\frac{3}{2}} \cdot I_{\frac{1}{2}}(z) \right),$$

oder, wenn man:

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \qquad I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

einführt:

$$I_{\frac{2n+1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(R_{n,\frac{1}{2}} \cdot \sin z - R_{n-1,\frac{3}{2}} \cdot \cos z \right),$$

$$I_{-\frac{2n+1}{2}} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(R_{n,\frac{1}{2}} \cdot \cos z + R_{n-1,\frac{3}{2}} \cdot \sin z \right).$$

Die Ausdrücke R stellen rationale ganze Functionen von $1/z$ vor, welche sich durch die oben angedeutete Operation zunächst in folgender Form ergeben:

$$R_{n,\frac{1}{2}}(z) = \Sigma(-1)^p \cdot \frac{(n-p)^{\underline{p}|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+1)^{n-2p\,2}}{z^{n-2p}}$$

$$R_{n-1,\frac{3}{2}}(z) = \Sigma(-1)^p \cdot \frac{(n-1-p)^{\underline{p}|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+3)^{n-1-2p|2}}{z^{n-1-2p}},$$

wo in der ersten Summe p nicht grösser als $n/2$, in der zweiten nicht grösser als $(n-1)/2$ genommen zu werden braucht, weil für grössere Werthe von p der Factor $(n-p)^{\underline{p}|-1}$ oder $(n-1-p)^{\underline{p}|-1}$ verschwindet.

21. Eine etwas einfachere Gestalt gewinnen diese Ausdrücke, wenn man in dem ersten Zähler und Nenner des allgemeinen Gliedes mit:

$$(p+1)^{n-3p|1},$$

im zweiten mit:

$$(p+1)^{n-1-3p\,1}$$

multiplicirt. Es ergibt sich nämlich:

$$\frac{(n-p)^{\underline{p}\,-1}(p+1)^{n-3p\,1}}{p!\,(p+1)^{n-3p|1}} = \frac{(p+1)^{n-2p\,1}}{1^{n-2p|1}} = \frac{(2p+2)^{n-2p\,2}}{2^{n-2p|2}},$$

ferner:

$$(2p+2)^{n-2p|2}(2p+1)^{n-2p,2} = (2p+1)^{2n-4p,1}.$$

Eine ähnliche Umformung gestattet der zweite Ausdruck. Man hat demnach:

$$R_{n,\frac{1}{2}} = \Sigma(-1)^p \cdot \frac{(2p+1)^{2n-4p|1}}{2^{n-2p|2}\, z^{n-2p}},$$

$$R_{n-1,\frac{3}{2}} = \Sigma(-1)^p \cdot \frac{(2p+2)^{2n-2-4p|1}}{2^{n-1-2p|2}\, z^{n-1-2p}}.$$

22. In diesen Formen erscheinen die endlichen Reihen nach fallenden Potenzen von 1 z geordnet. Will man sie lieber nach steigenden Potenzen fortlaufen lassen, was zum Zwecke der numerischen Berechnung für grosse z vortheilhafter ist, so empfiehlt es sich, die Fälle des geraden und ungeraden n von einander zu trennen.

Ist n gerade, $= 2m$, so kann man, weil p in dem ersten Ausdruck blos bis m, in dem zweiten blos bis $m-1$ zu steigen braucht, dort $m-q$, hier $m-1-q$ statt p schreiben, und erhält, wenn man zugleich im Zähler jeden Gliedes die Factorenfolge umkehrt:

$$R_{2m,\frac{1}{2}} = (-1)^m \Sigma(-1)^q \cdot \frac{(2m+2q)^{4q|-1}}{2^{2q|2}\, z^{2q}},$$

$$R_{2m-1,\frac{3}{2}} = (-1)^{m-1} \Sigma(-1)^q \cdot \frac{(2m+2q+1)^{4p+2|-1}}{2^{2q+1|2}\, z^{2q+1}}.$$

Ist dagegen n ungerade, $= 2m+1$, so ergibt das gleiche Verfahren, wenn man in beiden Ausdrücken $m-q$ statt p schreibt:

$$R_{2m+1,\frac{1}{2}} = (-1)^m \Sigma(-1)^q \cdot \frac{(2m+2q+2)^{4q+2|-1}}{2^{2q+1|2}\, z^{2q+1}},$$

$$R_{2m,\frac{3}{2}} = (-1)^m \Sigma(-1)^q \cdot \frac{(2m+2q+1)^{4q|-1}}{2^{2q|2}\, z^{2q}}.$$

23. Addirt man die Quadrate der beiden oben (20) für $I_{\frac{2n+1}{2}}$ und $I_{-\frac{2n+1}{2}}$ gegebenen Gleichungen, so erhält man:

$$\left(I_{\frac{2n+1}{2}}(z)\right)^2 + \left(I_{-\frac{2n+1}{2}}(z)\right)^2 = \frac{2}{\pi z}\left[\left(R_{n,\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(R_{n-1,\frac{3}{2}}\right)^2\right],$$

und erkennt, dass die Summe der Quadrate zweier solcher Bessel'scher Functionen, deren Indices gleich und von entgegengesetzten Vorzeichen

sind, eine rationale ganze Function von $\frac{1}{z}$ ist. Vermöge der für die R-Functionen giltigen Beziehungen[1]) lässt sich diese Gleichung auch wie folgt schreiben:

$$\left(I_{\frac{2n+1}{2}}(z)\right)^2 + \left(I_{-\frac{2n+1}{2}}(z)\right)^2 = (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi z} R_{2n,-n+\frac{1}{2}},$$

d. h. man hat:

$$\left(I_{\frac{2n+1}{2}}(z)\right)^2 + \left(I_{-\frac{2n+1}{2}}(z)\right)^2 = \frac{2}{\pi z} \Sigma \frac{(2n-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \left(\frac{1^{n-p|2}}{z^{n-p}}\right)^2$$

oder:

$$\left(I_{\frac{2n+1}{2}}(z)\right)^2 + \left(I_{-\frac{2n+1}{2}}(z)\right)^2 = \frac{2}{\pi z} \Sigma \frac{(2p+1)^{n-p|1}}{(n-p)!} \cdot \left(\frac{1^{p|2}}{z^p}\right)^2,$$

je nachdem man nach fallenden oder nach steigenden Potenzen von z ordnet.

24. Nach steigenden positiven Potenzen von z lassen sich nur die Bessel'schen Functionen mit positivem Index entwickeln, und zwar hat man:

$$I_{\frac{2n+1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \Sigma (-1)^p \cdot \frac{z^{n+1+2p}}{2^{p|2}\, 1^{n+1+p|2}}.$$

Die unendliche Reihe Σ convergirt für jeden Werth von z. Sie gilt auch noch für $n = -1$, in welchem Falle sie in die Cosinusreihe übergeht, wie sie sich für $n = 0$ in die Sinusreihe verwandelt.

Die convergente Entwickelung von $I_{-\frac{2n+1}{2}}$ dagegen, nämlich:

$$I_{-\frac{2n+1}{2}}(z) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \cdot \frac{1^{n-p,2}}{2^{p,2}} z^{-n+2p} + (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \Sigma (-1)^p \cdot \frac{z^{n+2p}}{2^{n+p,2} 1^{p|2}}$$

enthält auch negative Potenzen des Arguments z.

Uebrigens können die Functionen mit negativem Index in endlicher Form durch solche mit positivem Index ausgedrückt werden sowohl durch die Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen, als auch durch die Entwickelung[2]):

$$I_{-\frac{2n+1}{2}}(z) = (-1)^n \Sigma \frac{n^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{1^{p|2}}{z^p} I_{n-\frac{1}{2}-p}.$$

1) Lommel, Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Math. Ann. IV. p. 103. 1871.
2) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 9. Leipzig, 1868.

25. Für $z = o$ verschwinden sämmtliche Functionen $I_{\frac{2n+1}{2}}$ mit positivem Index in derselben Weise wie $z^{\frac{2n+1}{2}}$; diejenigen mit negativem Index dagegen werden unendlich wie $(-1)^n z^{-\frac{2n+1}{2}}$, also abwechselnd $+\infty$ und $-\infty$, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Die Functionen mit positivem Index sind ihrem absoluten Werthe nach stets kleiner als 1.

Man erkennt diess ganz allgemein mit Hilfe der Gleichung[1]):

$$\left(I_\nu\right)^2 + 2\left(I_{\nu+1}\right)^2 + 2\left(I_{\nu+2}\right)^2 + 2\left(I_{\nu+3}\right)^2 + \ldots = 2\nu \int_o^z \frac{1}{z}\left(I_\nu\right)^2 dz,$$

welche für jedes positive ν giltig ist. Da nun offenbar (für positive z):

$$\int_o^z \frac{1}{z}\left(I_\nu\right)^2 dz \quad < \int_o^\infty \frac{1}{z}\left(I_\nu\right)^2 dz$$

ist, so muss:

---

1) Diese Gleichung ergibt sich leicht aus der Combination zweier Gleichungen, welche ich früher bewiesen habe. Es ist nämlich (Lommel, Math. Ann. XIV. p. 532. Gl. 6. 1878):

$$2\sum_{p=o}^{p=\infty}\left(I_{\nu+p+1}\right)^2 = z\left(I_{\nu+1}\,J_\nu - I_\nu\,J_{\nu+1}\right),$$

wo:

$$J_\nu = z^\nu \frac{\partial\left(z^{-\nu} J_\nu(z)\right)}{\partial \nu}$$

bedeutet; andrerseits ist (ib. p. 526. Gl. P):

$$\int_o^z \frac{1}{z}\left(I_\nu\right)^2 dz = \frac{z}{2\nu}\left(I_{\nu+1}\,J_\nu - I_\nu\,J_{\nu+1}\right) + \frac{1}{2\nu}\left(I_\nu\right)^2,$$

woraus die obige Gleichung unmittelbar folgt.

Die bekannte Gleichung:

$$\left(I_o\right)^2 + 2\left(I_1\right)^2 + 2\left(I_2\right)^2 + 2\left(I_3\right)^2 + \ldots = 1$$

erscheint nun als Specialfall der obigen allgemeineren. Denn für $\nu = 1$ ergibt dieselbe:

$$\left(I_1\right)^2 + 2\left(I_2\right)^2 + 2\left(I_3\right)^2 + \ldots = 2\int_o^z \frac{1}{z}\left(I_1\right)^2 dz.$$

Es ist aber (ibid. p. 528 Gl. Q_1):

$$2\int_o^z \frac{1}{z}\left(I_1\right)^2 dz = 1 - \left(I_o\right)^2 - \left(I_1\right)^2,$$

folglich:

$$\left(I_o\right)^2 + 2\sum\left(I_{p+1}\right)^2 = 1.$$

$$\left(I_\nu\right)^2+2\left(I_{\nu+1}\right)^2+2\left(I_{\nu+2}\right)^2+2\left(I_{\nu+3}\right)^2+\ldots<2\nu\int_0^\infty\frac{1}{z}\left(I_\nu\right)^2dz$$

sein. Nun ist aber [1]):

$$2\nu\int_0^\infty\frac{1}{z}\left(I_\nu\right)^2dz=1,$$

sonach: $$\left(I_\nu\right)^2+2\left(I_{\nu+1}\right)^2+2\left(I_{\nu+2}\right)^2+2\left(I_{\nu+3}\right)^2+\ldots<1,$$

woraus folgt, dass, wenn ν positiv und kleiner als 1, p aber beliebig positiv ganz oder Null ist:

$$\left(I_\nu\right)^2<1,$$

und:

$$\left(I_{\nu+p+1}\right)^2<\tfrac{1}{2}$$

sein muss.

---

1) Es ist nämlich (Lommel, Math. Ann. XIV. p. 525. Gl. O):

$$\int_0^z\frac{1}{z}I_\mu I_\nu\,dz=\frac{z}{\mu^2-\nu^2}\left(I_\mu I_{\nu+1}-I_{\mu+1}I_\nu\right)+\frac{1}{\mu+\nu}I_\mu I_\nu.$$

Für äusserst grosse Werthe von z ist aber bekanntlich:

$$I_\nu=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right),$$

und demnach:

$$I_\mu I_{\nu+1}-I_\mu I_\nu=\frac{2}{\pi z}\sin\frac{\mu-\nu}{2}\pi,$$

$$I_\mu I_\nu=\frac{2}{\pi z}\cos\left(z-\frac{2\mu+1}{4}\pi\right)\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right).$$

Da der letztere Ausdruck für $z=\infty$ verschwindet, so hat man:

$$\int_0^\infty\frac{1}{z}I_\mu I_\nu\,dz=\frac{2}{\pi(\mu^2-\nu^2)}\sin\frac{\mu-\nu}{2}\pi=\frac{1}{\mu+\nu}\cdot\frac{\sin\frac{\mu-\nu}{2}\pi}{\frac{\mu-\nu}{2}\pi}.$$

Lässt man hierin $\mu=\nu$ werden, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty\frac{1}{z}\left(I_\nu\right)^2dz=\frac{1}{2\nu}$$

für jedes positive ν.

Für $\nu = \frac{1}{2}$ insbesondere hat man:

$$\left(I_{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2\left(I_{\frac{3}{2}}\right)^2 + 2\left(I_{\frac{5}{2}}\right)^2 + \ldots = \int_0^z \frac{1}{z}\left(I_{\frac{1}{2}}\right)^2 dz = \frac{2}{\pi}\int_0^z \frac{\sin^2 z}{z^2} dz.$$

Nun ist:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^z \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = -\frac{2}{\pi z}\sin^2 z + \frac{2}{\pi}\int_0^z \frac{\sin 2z}{2z}\, 2\, dz = -\frac{2}{\pi z}\sin^2 z + \frac{2}{\pi}\int_0^{2z} \frac{\sin\zeta}{\zeta} d\zeta.$$

Das letztere transscendente Integral ist der bekannte durch die Gleichung:

$$\mathrm{Si}(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{\sin\zeta}{\zeta} d\zeta$$

definirte Integralsinus, so dass man hat:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^z \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = -\left(I_{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{2}{\pi}\mathrm{Si}(2z)$$

und:

$$\left(I_{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(I_{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(I_{\frac{5}{2}}\right)^2 + \left(I_{\frac{7}{2}}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(2z).$$

Hienach ist die Summe der Quadrate sämmtlicher Bessel'schen Functionen, deren Index ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist, gleich dem Integralsinus für das doppelte Argument, dividirt durch π [1]).

Mit unendlich wachsendem z nähert sich $I_{\frac{2n+1}{2}}$ (wie überhaupt I_ν) der Null, weil

$$\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, R_{n,\frac{1}{2}}(z) \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, R_{n-1,\frac{3}{2}}(z)$$

für $z = \infty$ verschwinden.

---

1) Sind daher die Werthe dieser Bessel'schen Functionen bekannt (sie sind in der That in der am Schlusse dieser Abhandlung folgenden Tabelle I enthalten), so lassen sich mittels der stets convergenten Reihe:

$$\mathrm{Si}(2z) = \pi \Sigma\left(I_{\frac{1}{2}+p}\right)^2$$

auch diejenigen des Integralsinus mit geringer Mühe angeben.

Da vermöge der Gleichung [1]):

$$\tfrac{1}{2}\left(I_{\frac{1}{2}}\right)^2+\tfrac{3}{2}\left(I_{\frac{3}{2}}\right)^2+\tfrac{5}{2}\left(I_{\frac{5}{2}}\right)^2+\ldots=\frac{z}{\pi}$$

nothwendig:

$$\left(I_{\frac{2n+1}{2}}\right)^2<\frac{2z}{(2n+1)\pi}$$

sein muss, so erkennt man, dass der absolute Werth der Function mit positivem Index sich der Null nähert, wenn der Index unbegrenzt wächst. Diess erhellt übrigens für jedes $\nu>-\frac{1}{2}$ schon aus dem Satze, dass absolut genommen stets:

$$I_\nu(z)<\frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma_{(\nu+1)}}$$

ist [2]).

26. Der absolute Werth der Function $I_{-\frac{2n+1}{2}}$ kann jede Grenze übersteigen, wie sich oben für $z=0$ bereits ergeben hat. Für jeden Werth von z geschieht diess, wenn der negative Index unendlich gross wird. Denn da in der Gleichung (23):

---

1) Lommel, Math. Ann. II. p. 633. 1869. Diese Gleichung ergibt sich auch als specieller Fall aus der ersten der beiden folgenden Gleichungen:

$$\Sigma(\nu+p)\left(I_{\nu+p}\right)^2=\tfrac{1}{2}z^2\left[\left(I_{\nu-1}\right)^2+\left(I_\nu\right)^2-\frac{2\nu-1}{z}I_{\nu-1}I_\nu\right],$$

$$\Sigma(-1)^p(\nu+p)\left(I_{\nu+p}\right)^2=\tfrac{1}{2}z\,I_{\nu-1}I_\nu,$$

welche in dieser Allgemeinheit (für ein beliebig positives ν) noch nicht bekannt sein dürften.

2) Da nämlich für $\nu>-\frac{1}{2}$:

$$I_\nu(z)=\frac{2z^\nu}{2^\nu\Gamma_{(\frac{1}{2})}\Gamma_{(\nu+\frac{1}{2})}}\int_0^1\cos zu\,(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du$$

ist, so hat man absolut:

$$I_\nu(z)<\frac{2z^\nu}{2^\nu\Gamma_{(\frac{1}{2})}\Gamma_{(\nu+\frac{1}{2})}}\int_0^1(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du$$

oder, weil:

$$2\int_0^1(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du=\frac{\Gamma_{(\frac{1}{2})}\Gamma_{(\nu+\frac{1}{2})}}{\Gamma_{(\nu+1)}}$$

ist, die obige Ungleichheit..

$$\left(I_{\frac{2n+1}{2}}\right)^2+\left(I_{-\frac{2n+1}{2}}\right)^2=\frac{2}{\pi z}\Sigma'\frac{(2n-p)^{\underline{p|}-1}}{p!}\cdot\left(\frac{1^{\underline{n-p|}2}}{z^{n-p}}\right)^2$$

für $n=\infty$ $I_{+\infty}$ verschwindet, und demnach $(I_{-\infty})^2$ einer Summe aus lauter positiven Gliedern gleich wird, deren erstes:

$$\frac{2}{\pi z}\left(\frac{1^{\underline{n|}2}}{z^n}\right)^2$$

bereits unendlich gross ist für $n=\infty$, so folgt hieraus die obige Behauptung von selbst.

Mit unendlich wachsendem z dagegen nähert sich auch $I_{-\frac{2n+1}{2}}$ gleichwie $I_{\frac{2n+1}{2}}$ unaufhörlich der Null. Es ist nämlich, was auch ν sein mag, für äusserst grosse Werthe von z:

$$I_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right).$$

27. Tabellen der numerischen Werthe der Functionen $I_{\pm\frac{2n+1}{2}}$ lassen sich ohne sonderliche Mühe herstellen. Hat man die beiden Functionen:

$$I_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \quad \text{und} \quad I_{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

mit Hilfe der goniometrischen Tafeln berechnet, so ergeben sich die übrigen jedesmal aus den beiden vorhergehenden leicht mittels der Gleichung:

$$I_{\nu+1}=\frac{2\nu}{z}I_\nu-I_{\nu-1},$$

welche im vorliegenden Fall in folgenden zwei specielleren Gestalten:

$$I_{\frac{2n+3}{2}}=\frac{2n+1}{z}I_{\frac{2n+1}{2}}-I_{\frac{2n-1}{2}},$$

$$I_{-\frac{2n+3}{2}}=-\frac{2n+1}{z}I_{-\frac{2n+1}{2}}-I_{-\frac{2n-1}{2}}$$

zur Anwendung kommt.

28. Man kann sich jedoch dieser Formeln mit Sicherheit nur so lange bedienen, als 2ν oder $2n+1$ den Werth von z nicht übersteigt; wird $2\nu>z$, so häuft sich der Fehler, welcher der letzten Decimale von I_ν anhaftet, nach und nach zu immer grösserem Betrage an, und die gefundenen Resultate werden ungenau.

Setzt man jedoch in:

$$I_{\nu+2} = \frac{2(\nu+1)}{z} I_{\nu+1} - I_\nu$$

statt I_ν:

$$\frac{z}{2\nu}\left(I_{\nu+1} + I_{\nu-1}\right),$$

so gelangt man zu der Formel:

$$I_{\nu+2} = \left(\frac{2(\nu+1)}{z} - \frac{z}{2\nu}\right) I_{\nu+1} - \frac{z}{2\nu} I_{\nu-1},$$

oder speciell:

$$I_{\frac{2n+5}{2}} = \left(\frac{2n+3}{z} - \frac{z}{2n+1}\right) I_{\frac{2n+3}{2}} - \frac{z}{2n+1} I_{\frac{2n-1}{2}},$$

welche jede Bessel'sche Function aus der nächst- und der drittvorhergehenden zu berechnen erlaubt, und, ohne eine wesentlich grössere Mühe als die obige einfachere Formel zu bedingen, in der Reihe der Indices beträchtlich weiter aufwärts vorzudringen gestattet. Sie liefert nämlich genaue Werthe, solange:

$$\frac{2(\nu+1)}{z} - \frac{z}{2\nu}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist.

29. Ist auch mit dieser Formel die Grenze der sicheren Genauigkeit erreicht, so greift man auf die convergente unendliche Reihe (24) zurück; denn die geschlossenen Ausdrücke (20) geben bei hohem Index die Functionswerthe als Differenzen sehr grosser Zahlen, und sind daher, falls nicht auch z sehr gross ist, zur numerischen Rechnung unbequem.

Man braucht jedoch jeweils nur die drittnächste der aufeinander folgenden Functionen direct aus der Reihe zu berechnen. Denn kennt man I_ν und $I_{\nu+3}$, so ergibt sich aus (28):

$$I_{\nu+2} = \frac{(2\nu+2)z}{(2\nu+2)(2\nu+4) - z^2}\left(I_{\nu+3} + \frac{z}{2\nu+2} I_\nu\right),$$

da jetzt nothwendig:

$$\frac{(2\nu+2)z}{(2\nu+2)(2\nu+4) - z^2} < 1$$

ist, $I_{\nu+2}$ mit völliger Genauigkeit, und sodann gleichfalls genau:

$$I_{\nu+1} = \frac{z}{2\nu+2}\left(I_{\nu+2} + I_\nu\right).$$

30. Auf diese Weise wurden die Werthe der Functionen $I_{\frac{2n+1}{2}}$ auf sechs Decimalen berechnet und in der Tab. I zusammengestellt, und zwar die Functionen $I_{\frac{1}{2}}$ bis $I_{\frac{13}{2}}$ für alle ganzzahligen Werthe des Arguments von $z = 0$ bis $z = 50$, die Functionen $I_{\frac{15}{2}}$ bis $I_{\frac{71}{2}}$ von $z = 0$ bis $z = 20$.

Von den Functionen mit negativem Index wurden nur $I_{-\frac{1}{2}}$ bis $I_{-\frac{13}{2}}$ von $z = 0$ bis $z = 50$ berechnet (Tab. II). Die Functionen mit höherem negativem Index können aus diesen mittels der Gleichung:

$$I_{-\frac{2n+3}{2}} = -\frac{2n+1}{z} I_{-\frac{2n+1}{2}} - I_{-\frac{2n-1}{2}},$$

soweit sie genaue Resultate liefert, d. h. solange $2n+1 < z$ ist, in jedem Falle aber unter Zuhilfenahme der Werthe der Functionen mit positivem Index, soweit deren Tabelle reicht, mittels der Gleichung [1]):

$$I_\nu I_{-\nu+1} + I_{-\nu} I_{\nu-1} = \frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi$$

oder speciell:

$$I_{\frac{2n+1}{2}} I_{-\frac{2n-1}{2}} + I_{-\frac{2n+1}{2}} I_{\frac{2n-1}{2}} = (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi z}$$

gefunden werden.

31. Bedarf man eines Functionswerths für ein Argument $z + \varepsilon$, das in den Tafeln nicht vorkommt, so gehen wir von der Formel [2]):

$$(\zeta + h)^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(\sqrt{\zeta + h}) = \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{h}{2\sqrt{\zeta}}\right)^p \cdot \frac{1}{p!} \zeta^{-\frac{\nu}{2}} I_{\nu+p}(\sqrt{\zeta})$$

aus, setzen darin z^2 statt ζ und:

$$\sqrt{z^2 + h} = z + \varepsilon,$$

also:

$$\frac{h}{2z} = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2z}$$

und erhalten:

$$I_\nu(z + \varepsilon) = \left(\frac{z+\varepsilon}{z}\right)^\nu \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{h}{2z}\right)^p \cdot \frac{1}{p!} I_{\nu+p}(z).$$

Ebenso erhalten wir aus der Gleichung [2]):

$$(\zeta + h)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(\sqrt{\zeta + h}) = \Sigma\left(\frac{h}{2\sqrt{\zeta}}\right)^p \frac{1}{p!} \zeta^{\frac{\nu}{2}} I_{\nu-p}(\sqrt{\zeta})$$

---

1) Lommel, Math. Ann. IV. p. 105. 1871.

2) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen p. 11. Leipzig, 1868.

durch dieselbe Behandlung:

$$I_\nu(z+\varepsilon) = \left(\frac{z}{z+\varepsilon}\right)^\nu \Sigma\left(\frac{h}{2z}\right)^p \frac{1}{p!} I_{\nu-p}(z).$$

Vermöge dieser beiden Formeln für $I_\nu(z+\varepsilon)$, welche jeden Zwischenwerth der Functionen aus den tabellarischen Werthen abzuleiten gestatten, sind die Tabellen der Bessel'schen Functionen zugleich ihre eigenen Interpolationstafeln.

III. Abschnitt.

Die Functionen U_ν und V_ν.

32. Die unendliche Reihe:

$$U_\nu(y,z) = \Sigma(-1)^p \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}(z),$$

welche wir als Definition der Function $U_\nu(y,z)$ hinstellen, convergirt unter allen Umständen, was auch y, z und ν sein mögen; denn der Quotient des $(p+2)^{ten}$ Gliedes durch das vorhergehende, nämlich:

$$-\left(\frac{y}{z}\right)^2 \cdot \frac{I_{\nu+2p+2}}{I_{\nu+2p}}$$

verschwindet für $p=\infty$. Ist $y/z<1$, so convergirt sie von dem Gliede ab, bei welchem $\nu+2p$ positiv wird, rascher als die geometrische Reihe:

$$\Sigma\left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p}.$$

Die unendliche Reihe:

$$V_\nu(y,z) = \Sigma(-1)^p\left(\frac{y}{z}\right)^{-(\nu+2p)} I_{-(\nu+2p)}(z)$$

convergirt, wenn ν positiv oder negativ ganz oder Null $(=n)$ ist, weil alsdann:

$$I_{-(n+2p)} = (-1)^n I_{n+2p}$$

ist, und für den Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Glieder das nämliche gilt wie vorher.

Für gebrochene Werthe von ν dagegen ist diese Reihe divergent. Wir denken sie in diesem Falle als endliche Reihe mit dem zugehörigen Ergänzungsglied.

33. Da

$$(l\varrho)^{\nu+p} I_{\nu+p}(l\varrho),$$

wenn ν positiv ist, für $\varrho = o$ verschwindet, so hat man, wenn $l > o$ ist, (vergl. 7, 8, 9) zwischen den Grenzen $\varrho = o$ und $\varrho = r$:

$$\int_o^r (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \left(U_\nu \cos \tfrac{1}{2} kr^2 + U_{\nu-1} \sin \tfrac{1}{2} kr^2 \right),$$

$$\int_o^r (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \left(U_\nu \sin \tfrac{1}{2} kr^2 - U_{\nu+1} \cos \tfrac{1}{2} kr^2 \right),$$

welche Gleichungen, falls $\nu \gtreqless \frac{1}{2}$ ist, auch noch für $l = o$ gelten.

Da ferner, wenn $\nu < 1$ und $l > o$ ist:

$$(l\varrho)^{\nu-p-1} I_{\nu-p-1}(l\varrho)$$

für $\varrho = \infty$ verschwindet, so ergibt sich noch (vergl. 10, 11, 12) zwischen den Grenzen $\varrho = r$ und $\varrho = \infty$:

$$\int_r^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = -\frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \left(V_{-\nu+1} \sin \tfrac{1}{2} kr^2 + V_{-\nu+2} \cos \tfrac{1}{2} kr^2 \right),$$

$$\int_r^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \left(V_{-\nu+1} \cos \tfrac{1}{2} kr^2 - V_{-\nu+2} \sin \tfrac{1}{2} kr^2 \right),$$

wo bei beiden Formelpaaren rechts in den U und V kr^2 statt y und lr statt z geschrieben zu denken ist. Falls $\nu \gtreqless \frac{1}{2}$ ist, gelten auch diese Gleichungen noch für $l = o$.

Addirt man letztere Gleichungen zu den entsprechenden obigen, so erhält man, wenn $\nu \gtreqless \frac{1}{2}$ und < 1 ist:

$$\int_o^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \left[\left(U_\nu - V_{-\nu+2} \right) \cos \tfrac{1}{2} kr^2 + \left(U_{\nu+1} - V_{-\nu+1} \right) \sin \tfrac{1}{2} kr^2 \right],$$

$$\int_o^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \left[\left(U_\nu - V_{-\nu+2} \right) \sin \tfrac{1}{2} kr^2 - \left(U_{\nu+1} - V_{-\nu+1} \right) \cos \tfrac{1}{2} kr^2 \right].$$

34. Um die bestimmten Integrale auf den linken Seiten dieser Gleichungen zu ermitteln, betrachten wir zunächst das allgemeinere Integral:

$$\int_0^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho)\, e^{-(a+\frac{1}{2}ki)\varrho^2} d\varrho,$$

wo a beliebig positiv ist, und substituiren statt $I_{\nu-1}$ die convergente für $\nu > o$ giltige unendliche Reihe:

$$I_{\nu-1}(l\varrho) = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma_{(\nu)}} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{(l\varrho)^{\nu+2p-1}}{2^{p|2}(2\nu)^{p|2}};$$

es ergibt sich alsdann:

$$\int_0^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho)\, e^{-(a+\frac{1}{2}ki)\varrho^2} d\varrho = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma_{(\nu)}} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{l^{2\nu+2p-1}}{2^{p|2}(2\nu)^{p|2}} \int_0^\infty e^{-(a+\frac{1}{2}ki)\varrho^2} \varrho^{2\nu+2p-1} d\varrho.$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\int_0^\infty e^{-(a+\frac{1}{2}ki)\varrho^2} \varrho^{2\nu+2p-1} d\varrho = \frac{\Gamma(\nu+p)}{2(a+\frac{1}{2}ki)^{\nu+p}},$$

folglich da:

$$\Gamma_{(\nu+p)} = \nu^{p|1}\, \Gamma_{(\nu)}$$

ist:

$$\int_0^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho)\, e^{-(a+\frac{1}{2}ki)\varrho^2} d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{(2a+ki)^\nu} \Sigma(-1)^p \frac{1}{p!} \left(\frac{l^2}{4a+2ki}\right)^\nu$$

oder:

$$\int_0^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho)\, e^{-(a+\frac{1}{2}ki)\varrho^2} d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{(2a+ki)^\nu} e^{-\frac{l^2}{4a+2ki}}$$

oder:

$$\int_0^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho)\, e^{-(a+\frac{1}{2}ki)\varrho^2} d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{K^\nu} e^{-\frac{al^2}{K^2}} e^{\left(\frac{kl^2}{2K^2}-\nu\varphi\right)i},$$

wo:

$$K^2 = 4a^2 + k^2 \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{4a^2+k^2}}$$

ist.

Durch Trennung des Reellen vom Imaginären ergibt sich hieraus:

$$\int_0^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho)\, e^{-a\varrho^2} \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{(4a^2+k^2)^{\frac{\nu}{2}}} e^{-\frac{al^2}{4a^2+k^2}} \cdot \cos\left(\frac{kl^2}{2(4a^2+k^2)} - \nu \arcsin \frac{k}{\sqrt{4a^2+k^2}}\right),$$

$$\int_0^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho)\, e^{-a\varrho^2} \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = -\frac{l^{2\nu-1}}{(4a^2+k^2)^{\frac{\nu}{2}}} e^{-\frac{al^2}{4a^2+k^2}} \cdot \sin\left(\frac{kl^2}{2(4a^2+k^2)} - \nu \arcsin \frac{k}{\sqrt{4a^2+k^2}}\right).$$

Diese Gleichungen gelten, solange a positiv, wenn auch noch so klein, ist, für jedes positive ν. Sie gelten aber auch noch für $a = 0$, sofern die Integrale zur Linken überhaupt noch einen Sinn haben, was der Fall ist für $\nu \geqq \frac{1}{2}$ und $< \frac{3}{2}$. Man hat daher unter dieser Bedingung:

$$\int_0^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \cos\left(\frac{l^2}{2k} - \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

$$\int_0^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = -\frac{l^{2\nu-1}}{k^\nu} \sin\left(\frac{l^2}{2k} - \frac{\nu}{2}\pi\right).$$

Hieraus gehen z. B. für $\nu = \frac{1}{2}$ die bekannten Gleichungen:

$$\int_0^\infty \cos l\varrho \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \cos\left(\frac{l^2}{2k} - \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

$$\int_0^\infty \cos l\varrho \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \sin\left(\frac{l^2}{2k} - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

hervor, und für $\nu = 1$ (und l nicht Null) die Gleichungen:

$$\int_0^\infty I_0(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \cdot \varrho \, d\varrho = \frac{1}{k} \sin \frac{l^2}{2k},$$

$$\int_0^\infty I_0(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \cdot \varrho \, d\varrho = \frac{1}{k} \cos \frac{l^2}{2k},$$

welche ich bereits früher bewiesen habe [1]).

1) Lommel, Abhandl. der k. b. Akad. d. Wiss. XV. 2. p. 27. 1884.

35. Aus der Vergleichung dieser Formeln mit den vorhergehenden (33 Ende) ergibt sich, wenn wir:

$$kr^2 = y, \qquad lr = z$$

setzen, zunächst für $\nu \gtrless \frac{1}{2}$ und $\nu < 1$:

$$\left(U_\nu - V_{-\nu+2}\right)\cos\tfrac{1}{2}y + \left(U_{\nu+1} - V_{-\nu+1}\right)\sin\tfrac{1}{2}y = \cos\left(\frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

$$\left(U_\nu - V_{-\nu+2}\right)\sin\tfrac{1}{2}y - \left(U_{\nu+1} - V_{-\nu+1}\right)\cos\tfrac{1}{2}y = -\sin\left(\frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

oder, was dasselbe ist:

$$U_\nu - V_{-\nu+2} = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

$$U_{\nu+1} - V_{-\nu+1} = \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right).$$

Diese beiden Gleichungen sind mit einander identisch, da die zweite aus der ersten hervorgeht, wenn man $\nu + 1$ statt ν, die erste aus der zweiten, wenn man $\nu - 1$ statt ν schreibt.

Vermöge der Gleichung:

$$U_\nu(y, z) - V_{-\nu+2}(y, z) = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

deren Geltungsbereich durch die vorstehende Bemerkung bis zu den Grenzen $\nu > -\frac{1}{2}$ und $\nu < \frac{3}{2}$ hinausgerückt wird, kann die Function V durch die Function U ausgedrückt werden.

36. Da die Reihe U unter allen Umständen, was auch ν sein mag, convergent ist, so gehen wir noch weiter, indem wir von nun an die Gleichung:

$$V_{-\nu+2}(y, z) = U_\nu(y, z) - \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right)$$

oder:

$$V_\nu(y, z) = U_{-\nu+2}(y, z) + \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} + \frac{\nu}{2}\pi\right)$$

für jedes beliebige ν als Definition der Function V gelten lassen.

Da der Cosinus sich nicht ändert, wenn man z^2/y statt y setzt, so hat man auch:

$$U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) - V_{-\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

und:

$$U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) - V_{-\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = U_\nu(y, z) - V_{-\nu+2}(y, z).$$

37. Wenn ν positiv oder negativ ganz oder Null ($= n$) ist, so kann man die Function V_n auch durch die in diesem Falle convergirende unendliche Reihe:

$$V_n(y, z) = \Sigma(-1)^p\left(\frac{y}{z}\right)^{-(n+2p)} I_{-(n+2p)}(z)$$

oder (da:

$$I_{-(n+2p)} = (-1)^n I_{n+2p}$$

ist) durch:

$$V_n(y, z) = (-1)^n \Sigma(-1)^p\left(\frac{z}{y}\right)^{n+2p} I_{n+2p}(z)$$

darstellen und definiren. Hieraus wird sofort ersichtlich, dass:

$$V_n(y, z) = (-1)^n U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right),$$

$$U_n(y, z) = (-1)^n V_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right)$$

ist, und folglich auch:

$$U_n(y, z) - (-1)^n U_{-n+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = (-1)^n V_n(y, z) - V_{-n+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right)$$
$$= \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} - \frac{n}{2}\pi\right).$$

38. Durch Addition der beiden Gleichungen:

$$U_\nu = \left(\frac{y}{z}\right)^\nu I_\nu - \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2} I_{\nu+2} + \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+4} I_{\nu+4} - + \ldots,$$

$$U_{\nu+2} = \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2} I_{\nu+2} - \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+4} I_{\nu+4} + \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+6} I_{\nu+6} - + \ldots$$

findet man:

$$U_\nu(y, z) + U_{\nu+2}(y, z) = \left(\frac{y}{z}\right)^\nu I_\nu(z),$$

woraus vermöge der Definition für V_ν (36) sofort auch:

$$V_{-\nu}(y, z) + V_{-\nu+2}(y, z) = \left(\frac{y}{z}\right)^\nu I_\nu(z)$$

hervorgeht. Demnach ist:

$$V_{-\nu}(y, z) + V_{-\nu+2}(y, z) = U_\nu(y, z) + U_{\nu+2}(y, z).$$

Ferner ergibt sich:

$$U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) + U_{\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = V_{-\nu}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) + V_{-\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = \left(\frac{z}{y}\right)^\nu I_\nu(z),$$

sodann:

$$\Big(U_\nu(y,z) + U_{\nu+2}(y,z)\Big)\Big(V_\nu(y,z) + V_{\nu+2}(y,z)\Big)$$

$$= \Big(U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) + U_{\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right)\Big)\Big(V_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) + V_{\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right)\Big) = I_\nu(z)\, I_{-\nu}(z),$$

$$\Big(U_\nu(y,z) + U_{\nu+2}(y,z)\Big)\Big(U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) + U_{\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right)\Big)$$

$$= \Big(V_{-\nu}(y,z) + V_{-\nu+2}(y,z)\Big)\Big(V_{-\nu}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) + V_{-\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right)\Big) = \Big(I_\nu(z)\Big)^2$$

u. s. f.

39. Setzt man in der Reihenentwickelung für U_ν (32):

$$z = \sqrt{\zeta},$$

wodurch:

$$U_\nu(y, \sqrt{\zeta}) = \Sigma(-1)^p y^{\nu+2p} \zeta^{-\frac{\nu+2p}{2}} I_{\nu+2p}(\sqrt{\zeta})$$

wird, und differentiirt diese Gleichung m mal nach ζ, indem man von der Formel:

$$\frac{\partial^m\left(\zeta^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(\sqrt{\zeta})\right)}{\partial \zeta^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \zeta^{-\frac{\nu+m}{2}} I_{\nu+m}(\sqrt{\zeta})$$

Gebrauch macht, so erhält man:

$$\frac{\partial^m U_\nu(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = \Sigma(-1)^p y^{\nu+2p} (-\tfrac{1}{2})^m \zeta^{-\frac{\nu+m+2p}{2}} I_{\nu+m+2p}(\sqrt{\zeta}),$$

oder:

$$\frac{\partial^m U_\nu(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = (-\tfrac{1}{2})^m y^{-m} U_{\nu+m}(y, \sqrt{\zeta}),$$

woraus für $m = 1$:

$$\frac{\partial U_\nu(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} U_{\nu+1}(y, \sqrt{\zeta})$$

oder, wenn man mit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 2z$$

beiderseits multiplicirt, und wieder z^2 statt ζ setzt, die einfache Formel:

$$\frac{\partial U_\nu(y,z)}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_{\nu+1}(y,z)$$

hervorgeht.

Durch fortgesetzte Differentiation folgt hieraus weiter:

$$\frac{\partial^m U_\nu}{\partial z^m} = -\frac{z}{y}\frac{\partial^{m-1} U_{\nu+1}}{\partial z^{m-1}} - \frac{m-1}{y}\cdot\frac{\partial^{m-2} U_{\nu+1}}{\partial z^{m-2}}$$

woraus insbesondere für $m = 2$:

$$\frac{\partial^2 U_\nu}{\partial z^2} = -\frac{z}{y}\frac{\partial U_{\nu+1}}{\partial z} - \frac{1}{y}U_{\nu+1} = \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_{\nu+2} - \frac{1}{y}U_{\nu+1}$$

$$= \frac{1}{z}\frac{\partial U_\nu}{\partial z} - \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_\nu + \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2} I_\nu$$

sich ergibt.

40. Da gemäss obiger Definition (36):

$$V_\nu(y, \sqrt{\zeta}) = U_{-\nu+2}(y, \sqrt{\zeta}) + \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y} + \frac{\nu}{2}\pi\right)$$

$$= U_{-\nu+2}(y, \sqrt{\zeta}) + \tfrac{1}{2}\left(e^{\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y} + \frac{\nu}{2}\pi\right)i} + e^{-\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y} + \frac{\nu}{2}\pi\right)i}\right)$$

ist, so ergibt sich durch m malige Differentiation nach ζ:

$$\frac{\partial^m V_\nu(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^m y^{-m} U_{-\nu+2+m}(y, \sqrt{\zeta}) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{i}{2y}\right)^m e^{\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y} + \frac{\nu}{2}\pi\right)i}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{-i}{2y}\right)^m e^{-\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y} + \frac{\nu}{2}\pi\right)i}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}\right)^m y^{-m} U_{-\nu+2+m}(y, \sqrt{\zeta}) +$$

$$\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^m y^{-m}\left(e^{\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y} + \frac{\nu-m}{2}\pi\right)i} + e^{-\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y} + \frac{\nu-m}{2}\pi\right)i}\right)$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}\right)^m y^{-m} U_{-\nu+2+m}(y, \sqrt{\zeta}) +$$

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)^m y^{-m} \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y} + \frac{\nu-m}{2}\pi\right).$$

Nun ist aber vermöge derselben Definition:

$$U_{-\nu+2+m}(y, \sqrt{\zeta}) = V_{\nu-m}(y, \sqrt{\zeta}) - \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y} + \frac{\nu-m}{2}\pi\right);$$

man hat demnach:

$$\frac{\partial^m V_\nu(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = (-\tfrac{1}{2})^m y^{-m} V_{\nu-m}(y, \sqrt{\zeta}),$$

und daraus für $m = 1$:

$$\frac{\partial V_\nu(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} V_{\nu-1}(y, \sqrt{\zeta}).$$

Führt man z^2 für ζ wieder ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial V_\nu(y, z)}{\partial z} = -\frac{z}{y} V_{\nu-1}(y, z)$$

und hieraus durch $(m-1)$ malige Differentiation nach z:

$$\frac{\partial^m V_\nu}{\partial z^m} = -\frac{z}{y} \frac{\partial^{m-1} V_{\nu-1}}{\partial z^{m-1}} - \frac{m-1}{y} \frac{\partial^{m-2} V_{\nu-1}}{\partial z^{n-2}}.$$

Speciell für $m = 2$ erhält man:

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial z^2} = -\frac{z}{y} \frac{\partial V_{\nu-1}}{\partial z} - \frac{1}{y} V_{\nu-1} = \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{\nu-2} - \frac{1}{y} V_{\nu-1}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial V_\nu}{\partial z} - \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_\nu + \left(\frac{y}{z}\right)^{-\nu} I_{-\nu+2}.$$

oder auch, wenn man $-\nu + 2$ statt ν schreibt:

$$\frac{\partial^2 V_{-\nu+2}}{\partial z^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial V_{-\nu+2}}{\partial z} - \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{-\nu+2} + \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2} I_\nu.$$

41. Die letztere Gleichung und die entsprechende für $\frac{\partial^2 U_\nu}{\partial z^2}$ am Ende der vorhergehenden Nummer lassen erkennen, dass U_ν und $V_{-\nu+2}$ particuläre Integrale einer und derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{z^2}{y^2} u = \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2} I_\nu(z)$$

sind, deren vollständiges Integral entweder:

$$u = A \cos \frac{z^2}{2y} + B \sin \frac{z^2}{2y} + U_\nu(y, z)$$

oder:

$$u = A' \cos \frac{z^2}{2y} + B' \sin \frac{z^2}{2y} + V_{-\nu+2}(y, z)$$

lautet, welche zwei Formen vermöge der Beziehung (36):

$$U_\nu - V_{-\nu+2} = \cos\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2} \pi\right)$$

identisch sind.

42. Setzen wir in $U_\nu(y, z)$:

$$\sqrt{\zeta + h} \text{ statt } z,$$

so ergibt die Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes:

$$U_\nu(y, \sqrt{\zeta + h}) = \Sigma \frac{h^p}{p!} \frac{\partial^p U_\nu(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^p},$$

oder, weil gemäss (39):

$$\frac{\partial^p U_\nu(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^p} = (-\tfrac{1}{2})^p y^{-p} U_{\nu+p}(y, \sqrt{\zeta})$$

ist:

$$U_\nu(y, \sqrt{\zeta + h}) = \Sigma(-1)^p \cdot \frac{h^p}{(2y)^p p!} U_{\nu+p}(y, \sqrt{\zeta}).$$

Setzt man nun z^2 statt ζ und $z + \varepsilon$ statt $\sqrt{\zeta + h}$, so hat man:

$$U_\nu(y, z + \varepsilon) = \Sigma(-1)^p \cdot \frac{h^p}{(2y)^p \cdot p!} U_{\nu+p}(y, z),$$

wo:

$$h = 2\varepsilon z + \varepsilon^2$$

ist, und die Coefficienten $U_{\nu+p}$, wenn zwei aufeinanderfolgende bekannt sind, mittels der Recursionsformel:

$$U_\nu + U_{\nu+2} = \left(\frac{y}{z}\right)^\nu I_\nu$$

leicht gefunden werden.

Ganz in derselben Weise ergibt sich:

$$V_\nu(y, z + \varepsilon) = \Sigma(-1)^p \cdot \frac{h^p}{(2y)^p p!} V_{\nu-p}(y, z),$$

wo die Coefficienten $V_{\nu-p}$ aus zwei aufeinanderfolgenden, deren Werthe gegeben sind, mit Hilfe der Gleichung:

$$V_\nu + V_{\nu+2} = \left(\frac{y}{z}\right)^{-\nu} I_{-\nu}$$

bestimmt werden.

43. Wird

$$U_\nu(y, z) = \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p}$$

nach y differentiirt, so ergibt sich zunächst:

$$\frac{\partial U_\nu(y, z)}{\partial y} = \frac{1}{y} \Sigma(-1)^p (\nu + 2p) \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p} I_{\nu+2p},$$

oder, da bekanntlich:

$$(\nu + 2p) I_{\nu+2p} = \tfrac{1}{2} z I_{\nu+2p-1} + \tfrac{1}{2} z I_{\nu+2p+1}$$

ist:

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial y} = \tfrac{1}{2} \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p-1} I_{\nu+2p-1} + \tfrac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p+1} I_{\nu+2p+1}.$$

Man hat demnach:

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial y} = \tfrac{1}{2} U_{\nu-1} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 U_{\nu+1}.$$

Differentiirt man unter Berücksichtigung dieses Resultats die Gleichung

$$V_\nu = U_{-\nu+2} + \cos\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} + \frac{\nu}{2}\pi\right)$$

nach y, so ergibt sich die analoge Formel:

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial y} = \tfrac{1}{2} V_{\nu+1} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{\nu-1}.$$

44. Hienach ist:

$$\tfrac{1}{2} z^2 U_{\nu+1} = y^2\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial y} - \tfrac{1}{2} U_{\nu-1}\right).$$

Differentiirt man diese Gleichung m mal nach y, indem man rechts von dem Satze:

$$\frac{\partial^m PQ}{\partial y^m} = \sum_{p=o}^{p=m} \frac{m^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{\partial^p P}{\partial y^p} \cdot \frac{\partial^{m-p} Q}{\partial y^{m-p}}$$

Gebrauch macht, so erhält man zunächst:

$$\tfrac{1}{2} z^2 \frac{\partial^m U_{\nu+1}}{\partial y^m} = y^2\left(\frac{\partial^{m+1} U_\nu}{\partial y^{m+1}} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^m U_{\nu-1}}{\partial y^m}\right) + 2my\left(\frac{\partial^m U_\nu}{\partial y^m} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^{m-1} U_{\nu-1}}{\partial^{m-1}}\right)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot 2\left(\frac{\partial^{m-1} U_\nu}{\partial y^{m-1}} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^{m-2} U_{\nu-1}}{\partial y^{m-2}}\right),$$

und hieraus:

$$\frac{\partial^{m+1} U_\nu}{\partial y^{m+1}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^m U_{\nu-1}}{\partial y^m} - \frac{2m}{y}\cdot\frac{\partial^m U_\nu}{\partial y^m} + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{y}\right)^2\cdot\frac{\partial^m U_{\nu+1}}{\partial y^m}$$
$$+ \frac{m}{y}\cdot\frac{\partial^{m-1} U_{\nu-1}}{\partial y^{m-1}} - \frac{m(m-1)}{y^2}\cdot\frac{\partial^{m-1} U_\nu}{\partial y^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{2y^2}\cdot\frac{\partial^{m-2} U_{\nu-1}}{\partial y^{m-2}}.$$

Wird dasselbe Verfahren auf die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} z^2 V_{\nu-1} = y^2\left(\frac{\partial V_\nu}{\partial y} - \tfrac{1}{2} V_{\nu+1}\right)$$

angewendet, so ergibt sich die analoge Formel:

$$\frac{\partial^{m+1} V_\nu}{\partial y^{m+1}} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^m V_{\nu+1}}{\partial y^m} - \frac{2m}{y}\frac{\partial^m V_\nu}{\partial y^m} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2\frac{\partial^m V_{\nu-1}}{\partial y^m}$$
$$+ \frac{m}{y}\cdot\frac{\partial^{m-1} V_{\nu+1}}{\partial y^{m-1}} - \frac{m(m-1)}{y^2}\frac{\partial^{m-1} V_\nu}{\partial y^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{2y^2}\frac{\partial^{m-2} V_{\nu+1}}{\partial y^{m-2}}.$$

45. Betrachtet man y als eine Function von z, so ist der totale Differentialquotient von $U_\nu(y, z)$ nach z:

$$\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial z}\right) = \frac{\partial U_\nu}{\partial z} + \frac{\partial U_\nu}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$= -\frac{z}{y} U_{\nu+1} + \tfrac{1}{2}\left(U_{\nu-1} + \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_{\nu+1}\right)\frac{\partial y}{\partial z}.$$

Setzt man insbesondere:

$$y = cz,$$

wo c eine Constante ist, so wird:

$$\frac{z}{y} = \frac{1}{c}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = c$$

und es ergibt sich:

$$\frac{\partial U_\nu(cz, z)}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\left(cU_{\nu-1} - \frac{1}{c} U_{\nu+1}\right).$$

Hieraus folgt durch nochmaliges Differentiiren:

$$\frac{\partial^2 U_\nu(cz, z)}{\partial z^2} = \tfrac{1}{4}(c^2 U_{\nu-2} - 2U_\nu + c^{-2} U_{\nu+2}),$$

und durch fortgesetzte Differentiation ergibt sich allgemein:

$$\frac{\partial^m U_\nu(cz, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} c^{m-2p} U_{\nu-m+2p},$$

und in gleicher Weise für die Function V:

$$\frac{\partial^m V_\nu(cz, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} c^{m-2p} V_{\nu+m-2p}.$$

46. Speciell für $c = 1$ folgt hieraus:

$$\frac{\partial^m U_\nu(z, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} U_{\nu-m+2p},$$

$$\frac{\partial^m V_\nu(z, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} V_{\nu+m-2p}.$$

Diese Differentialquotienten gehorchen demnach demselben Bildungsgesetz wie die endlichen Differenzen der Functionswerthe:

$$U_{\nu-m}, \quad U_{\nu-m+2}, \quad U_{\nu-m+4}, \ldots$$

$$V_{\nu+m}, \quad V_{\nu+m-2}, \quad V_{\nu+m-4}, \ldots$$

mit dem Unterschied jedoch, dass jede Differenz mit der sovielten Potenz von 2 zu dividiren ist, als die Ordnung des Differentialquotienten anzeigt.

47. Da

$$\frac{\partial U_\nu(z,z)}{\partial z} = \tfrac{1}{2}(U_{\nu-1} - U_{\nu+1}), \qquad \frac{\partial V_\nu(z,z)}{\partial z} = \tfrac{1}{2}(V_{\nu+1} - V_{\nu-1})$$

und (gemäss 38) für $y = z$:

$$I_{\nu-1} = U_{\nu-1} + U_{\nu+1}, \qquad I_{-(\nu-1)} = V_{\nu+1} + V_{\nu-1}$$

ist, so gelten zwischen den Functionen $U_\nu(z,z)$ und $V_\nu(z,z)$ einerseits und den Bessel'schen Functionen andrerseits die Beziehungen:

$$2\,I_{\nu-1}(z)\cdot\frac{\partial U_\nu(z,z)}{\partial z} = U^2_{\nu-1}(z,z) - U^2_{\nu+1}(z,z),$$

$$2\,I_{-(\nu-1)}(z)\cdot\frac{\partial V_\nu(z,z)}{\partial z} = V^2_{\nu+1}(z,z) - V^2_{\nu-1}(z,z).$$

48. Da

$$\frac{\partial^2 U_\nu(z,z)}{\partial z^2} = \tfrac{1}{4}\Big(U_{\nu-2}(z,z) - 2U_\nu(z,z) + U_{\nu+2}(z,z)\Big),$$

$$\frac{\partial^2 V_{-\nu+2}}{\partial z} = \tfrac{1}{4}\Big(V_{-\nu+4}(z,z) - 2V_{-\nu+2}(z,z) + V_{-\nu}(z,z)\Big)$$

und:

$$U_\nu(z,z) + U_{\nu+2}(z,z) = I_\nu(z), \qquad V_{-\nu}(z,z) + V_{-\nu+2}(z,z) = I_\nu(z)$$

ist, so leisten die Functionen $U_\nu(z,z)$ und $V_{-\nu+2}(z,z)$ einer und derselben linearen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = \tfrac{1}{4}(I_{\nu-2} + I_\nu),$$

oder, weil:

$$I_{\nu-2} + I_\nu = \frac{2(\nu-1)}{z} I_{\nu-1}$$

ist, der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = \frac{\nu-1}{2z} I_{\nu-1}$$

Genüge. Die beiden Formen ihres vollständigen Integrals, welche sich hienach ergeben, nämlich:

$$u = A\cos z + B\sin z + U_\nu(z,z),$$

$$u = A'\cos z + B'\sin z + V_{-\nu+2}(z,z)$$

sind vermöge der Beziehung:

$$U_\nu(z,z) - V_{-\nu+2}(z,z) = \cos\Big(z - \frac{\nu}{2}\pi\Big)$$

ersichtlich gleichbedeutend.

49. Setzt man in (45):

$$y = \frac{z^2}{c}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{c},$$

so ergibt sich:

$$\frac{\partial U_\nu\left(\frac{z^2}{c}, z\right)}{\partial z} = \frac{z}{c} U_{\nu-1}\left(\frac{z^2}{c}, z\right),$$

oder, wenn man jetzt y statt c schreibt:

$$\frac{\partial U_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z} = \frac{z}{y} U_{\nu-1}\left(\frac{z^2}{c}, z\right);$$

ebenso erhält man:

$$\frac{\partial V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z} = \frac{z}{y} U_{\nu+1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right),$$

Ueberhaupt verhalten sich die Functionen $U_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)$ und $V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)$ den Functionen $U_\nu(y, z)$ und $V_\nu(y, z)$ ganz analog. Ihre Differentialeigenschaften können leicht direct in derselben Weise, wie es für die letzteren geschah, abgeleitet werden.

Um Wiederholungen zu vermeiden, begnügen wir uns, die folgenden Formeln blos anzuführen:

$$\frac{\partial^m U_\nu\left(\frac{\zeta}{y}, \sqrt{\zeta}\right)}{\partial \zeta^m} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^m y^{-m} U_{\nu-m}\left(\frac{\zeta}{y}, \sqrt{\zeta}\right), \quad \frac{\partial^m V_\nu\left(\frac{\zeta}{y}, \sqrt{\zeta}\right)}{\partial \zeta^m} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^m y^{-m} V_{\nu+m}\left(\frac{\zeta}{y}, \sqrt{\zeta}\right),$$

$$\frac{\partial^m U_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z^m} = \frac{z}{y} \frac{\partial^{m-1} U_{\nu-1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z^{m-1}} + \frac{m-1}{y} \frac{\partial^{m-2} U_{\nu-1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z^{m-2}},$$

$$\frac{\partial^m V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z^m} = \frac{z}{y} \frac{\partial^{m-1} V_{\nu+1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z^{m-1}} + \frac{m-1}{y} \frac{\partial^{m-2} V_{\nu+1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z^{m-2}},$$

$$\frac{\partial U_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial y} = -\tfrac{1}{2} U_{\nu+1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 \cdot U_{\nu-1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right),$$

$$\frac{\partial V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial y} = -\tfrac{1}{2} V_{\nu-1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{\nu+1}\left(\frac{z^2}{y}, z\right).$$

50. Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 U_{-\nu+2}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z^2} = \frac{1}{z}\frac{\partial U_{-\nu+2}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z} - \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_{-\nu+2}\left(\frac{z^2}{y}, z\right) + \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2} I_{-\nu}(z),$$

$$\frac{\partial^2 V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z^2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)}{\partial z} - \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right) + \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2} I_{-\nu}(z)$$

welche sich aus den vorhergehenden mit Rücksicht auf (38) leicht ergeben, erkennt man, dass sowohl $U_{-\nu+2}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)$ als auch $V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)$ der linearen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{z^2}{y^2} u = \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu-2} I_{-\nu}(z)$$

als particuläre Integrale genügen; ihr vollständiges Integral kann daher die zwei Formen:

$$u = A\cos\frac{z^2}{2y} + B\sin\frac{z^2}{2y} + U_{-\nu+2}\left(\frac{z^2}{y}, z\right)$$

$$u = A'\cos\frac{z^2}{2y} + B'\sin\frac{z^2}{2y} + V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right)$$

annehmen, welche vermöge der Beziehung (36):

$$V_\nu\left(\frac{z^2}{y}, z\right) - U_{-\nu+2}\left(\frac{z^2}{y}, z\right) = \cos\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} + \frac{\nu}{2}\pi\right)$$

identisch sind (vergl. 41).

51. Wenn $z = o$ ist, so ergibt sich aus (43):

$$\frac{\partial U_\nu(y, o)}{\partial y} = \tfrac{1}{2} U_{\nu-1}(y, o), \qquad \frac{\partial V_\nu(y, o)}{\partial y} = \tfrac{1}{2} V_{\nu+1}(y, o),$$

und demnach auch:

$$\frac{\partial^m U_\nu(y, o)}{\partial y^m} = (\tfrac{1}{2})^m U_{\nu-m}(y, o), \qquad \frac{\partial^m V_\nu(y, o)}{\partial y^m} = (\tfrac{1}{2})^m V_{\nu+m}(y, o)$$

für jedes beliebige ν.

52. Aus (38) erhalten wir für $z = o$:

$$U_\nu(y, o) + U_{\nu+2}(y, o) = V_{-\nu}(y, o) + V_{-\nu+2}(y, o) = y^\nu \left[z^{-\nu} I_\nu(z)\right]_{z=o},$$

oder, da:

$$\left[z^{-\nu} I_\nu(z)\right]_{z=o} = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

ist, für $\nu > -1$:

$$U_\nu(y,o) + U_{\nu+2}(y,o) = \frac{y^\nu}{2^\nu \Gamma_{(\nu+1)}},$$

$$V_{-\nu}(y,o) + V_{-\nu+2}(y,o) = \frac{y^\nu}{2^\nu \Gamma_{(\nu+1)}}.$$

Differentiirt man diese Gleichungen m mal nach y, so ergibt sich (vermöge 51):

$$U_{\nu-m}(y,o) + U_{\nu+2-m}(y,o) = \frac{\nu^{m|-1} y^{\nu-m}}{2^{\nu-m} \Gamma_{(\nu+1)}},$$

$$V_{-\nu+m}(y,o) + V_{-\nu+2+m}(y,o) = \frac{\nu^{m-1} y^{\nu-m}}{2^{\nu-m} \Gamma_{(\nu+1)}}.$$

Diese Gleichungen gelten für $\nu > -1$ und m positiv ganz oder Null, also für jeden beliebigen Index.

53. Da (gemäss 51):

$$\frac{\partial^2 U_{\nu+2-m}(y,o)}{\partial y^2} = \tfrac{1}{4} U_{\nu-m}(y,o), \qquad \frac{\partial^2 V_{-\nu+m}(y,o)}{\partial y^2} = \tfrac{1}{4} V_{-\nu+m+2}(y,o),$$

und vermöge der vorstehenden Gleichungen:

$$\tfrac{1}{4} U_{\nu-m}(y,o) = \frac{\nu^{m|-1} y^{\nu-m}}{2^{\nu-m+2} \Gamma_{(\nu+1)}} - \tfrac{1}{4} U_{\nu+2-m}(y,o),$$

$$\tfrac{1}{4} V_{-\nu+m+2}(y,o) = \frac{\nu^{m|-1} y^{\nu-m}}{2^{\nu-m+2} \Gamma_{(\nu+1)}} - \tfrac{1}{4} V_{-\nu+m}(y,o)$$

ist, so erkennt man, dass sowohl $U_{\nu+2-m}(y,o)$ als auch $V_{-\nu+m}(y,o)$ der linearen Differentialgleichung ($\nu > -1$, m positiv ganz oder Null):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tfrac{1}{4} u = \frac{\nu^{m|-1} y^{\nu-m}}{2^{\nu-m+2} \Gamma_{(\nu+1)}}$$

Genüge leisten; ihr vollständiges Integral ist demnach entweder:

$$u = A \cos \tfrac{1}{2} y + B \sin \tfrac{1}{2} y + U_{\nu+2-m}(y,o),$$

oder:

$$u = A' \cos \tfrac{1}{2} y + B' \sin \tfrac{1}{2} y + V_{-\nu+m}(y,o),$$

welche beide Formen übrigens vermöge der für jedes ν giltigen Beziehung (36):

$$U_\nu(y,o) - V_{-\nu+2}(y,o) = \cos\left(\tfrac{1}{2} y - \frac{\nu}{2} \pi\right)$$

zusammenfallen.

54. Die Function $U_\nu(y,o)$ ist für jedes ν bereits definirt durch die stets convergente unendliche Reihe (32):

$$U_\nu(y,o) = \Sigma(-1)^p \cdot y^{\nu+2p}\left[z^{-(\nu+2p)} I_{\nu+2p}\right]_{z=o}.$$

Ist insbesondere $\nu > -1$, so nimmt dieselbe, da unter dieser Bedingung:

$$\left[z^{-(\nu+2p)} I_{\nu+2p}(z)\right]_{z=o} = \frac{1}{2^{\nu+2p}\Gamma_{(\nu+2p+1)}}$$

ist, folgende Gestalt an:

$$U_\nu(y,o) = \Sigma(-1)^p \frac{(\frac{1}{2}y)^{\nu+2p}}{\Gamma_{(\nu+2p+1)}}.$$

Wird diese Gleichung m mal (mit Rücksicht auf 51) nach y differentiirt, so kommt:

$$U_{\nu-m}(y,o) = \Sigma(-1)^p \frac{(\nu+2p)^{m|-1}}{\Gamma_{(\nu+2p+1)}}(\tfrac{1}{2}y)^{\nu+2p-m}$$

welche Gleichung, da $\nu - m$ (wo $\nu > -1$, m positiv ganz oder Null ist) jeden reellen Werth vorstellt, ebenfalls als Definition der Function $U_\nu(y.o)$ für jeden beliebigen Index angesehen werden kann.

Ist m gerade $= 2n$, so kann letztere Gleichung, ohne an Allgemeinheit einzubüssen, auch wie folgt geschrieben werden:

$$U_{\nu-2n}(y,o) - (-1)^n U_\nu(y,o) = \frac{y^\nu}{2^\nu \Gamma_{(\nu+1)}} \sum_{p=o}^{p=n-1}(-1)^p \cdot \frac{(-2\nu)^{2n-2p|2}}{y^{2n-2p}},$$

ein Resultat, welches sich ebenso auch durch successive Anwendung der Formel (52):

$$U_{\nu-m}(y,o) + U_{\nu+2-m}(y,o) = (-1)^m\left(\frac{y}{2}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\Gamma_{(\nu+1)}} \frac{(-2\nu)^{m|2}}{y^m}$$

ergeben würde.

Aus diesen Formeln ergibt sich für ganzzahlige Indices:

$$U_o(y,o) = \cos\tfrac{1}{2}y, \quad U_1(y,o) = \sin\tfrac{1}{2}y, \quad U_2(y,o) = 1 - \cos\tfrac{1}{2}y,$$

und allgemein:

$$U_{2n}(y,o) = (-1)^n\left(\cos\tfrac{1}{2}y - \sum_{p=o}^{p=n-1}(-1)^p \cdot \frac{(\frac{1}{2}y)^{2p}}{(2p)!}\right),$$

$$U_{2n+1}(y,o) = (-1)^n\left(\sin\tfrac{1}{2}y - \sum_{p=o}^{p=n-1}(-1)^p \cdot \frac{(\frac{1}{2}y)^{2p+1}}{(2p+1)!}\right),$$

$$U_{-2n}(y, o) = (-1)^n \cos \tfrac{1}{2} y,$$
$$U_{-2n-1}(y, o) = (-1)^{n+1} \sin \tfrac{1}{2} y,$$

oder auch, wenn man die letzteren beiden Gleichungen in eine einzige zusammenfasst:

$$U_{-m}(y, o) = \cos\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{m}{2}\pi\right).$$

Die goniometrischen Functionen Sinus und Cosinus sind demnach in der Function U_ν als specielle Fälle eingeschlossen.

55. Vermöge der Gleichung:

$$V_\nu(y, o) = U_{-\nu+2}(y, o) + \cos\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

durch welche die Function $V_\nu(y, o)$ definirt wird, ergibt sich im Hinblick auf die vorstehenden Resultate sofort:

$$V_o(y, o) = 1, \qquad V_{m+1}(y, o) = o,$$

$$V_{-2n}(y, o) = (-1)^n \sum_{p=o}^{p=n} (-1)^p \frac{(\frac{1}{2} y)^{2p}}{(2p)!},$$

$$V_{-2n-1}(y, o) = (-1)^n \sum_{p=o}^{p=n} (-1)^p \cdot \frac{(\frac{1}{2} y)^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Für ganzzahlige Indices ist demnach die Function $V_\nu(y, o)$ eine algebraische rationale ganze Function von y.

Für jeden anderen Werth des Index repräsentirt die obige Definitionsgleichung, wenn man statt $U_{-\nu+2}(y, o)$ die entsprechende unendliche Reihe setzt, die convergente Entwickelung der Function $V_\nu(y, o)$.

56. Durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung (52):

$$V_{\nu+m}(y, o) + V_{\nu+m+2}(y, o) = (-1)^m \left(\frac{2}{y}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\Gamma_{(1-\nu)}} \frac{(2\nu)^{m|2}}{y^m},$$

wo $\nu < 1$ und m positiv ganz oder Null ist, erhält man leicht die Entwickelung:

$$V_{\nu+m}(y, o) = (-1)^m \cdot \left(\frac{2}{y}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\Gamma_{(1-\nu)}} \sum_{p=o}^{p=n} (-1)^p \cdot \frac{(2\nu)^{m+2p|2}}{y^{m+2p}} + (-1)^{n+1} V_{\nu+m+2n+2}(y, o),$$

zu welcher man auch gelangt, wenn man in (32):

$$V_{\nu+m}(y,z) = \Sigma(-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{-(\nu+m+2p)} I_{-(\nu+m+2p)}(z)$$

$z = o$ setzt. Jene Reihe, ins Unendliche fortgesetzt gedacht, ist zwar divergent, es lässt sich aber zeigen, dass sie zu den sogenannten halbconvergenten Reihen gehört, dass nämlich der Rest:

$$(-1)^{n+1} V_{\nu+m+2n+2}(y,o)$$

stets kleiner ist als das zuletzt in Rechnung gezogene Glied (vergl. unten 69). Sie kann daher für hinreichend grosse Werthe von y zur numerischen Berechnung der Functionswerthe V bequem verwendet werden, während für kleinere Werthe von y die convergente Entwickelung der Function U (54) zum Ziele führt.

57. Der Taylor'sche Lehrsatz liefert:

$$U_\nu(y+h,o) = \Sigma \frac{h^p}{p!} \frac{\partial^p U_\nu(y,o)}{\partial y^p}, \qquad V_\nu(y+h,o) = \Sigma \frac{h^p}{p!} \frac{\partial^p V_\nu(y,o)}{\partial y^p}$$

oder gemäss (51):

$$U_\nu(y+h,o) = \Sigma \frac{(\frac{1}{2}h)^p}{p!} U_{\nu-p}(y,o), \qquad V_\nu(y+h,o) = \Sigma \frac{(\frac{1}{2}h)^p}{p!} V_{\nu+p}(y,o),$$

wo die Coefficienten $U_{\nu-p}$ und $V_{\nu+p}$ aus den Formeln (52):

$$U_{\nu-p}(y,o) + U_{\nu+2p-p}(y,o) = \frac{\nu^{p|-1}}{\Gamma_{(1+\nu)}} (\tfrac{1}{2}y)^{\nu-p},$$

$$V_{\nu+p}(y,o) + V_{\nu+2+p}(y,o) = \frac{(-\nu)^{p|-1}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \cdot (\tfrac{1}{2}y)^{-\nu-p},$$

sobald zweie derselben, deren Indices um 1 verschieden sind, bekannt sind, gefunden werden.

58. Zufolge (54) hat man:

$$U_{\nu-2p-2}(y,o) = (-1)^{p+1} U_\nu(y,o) + \frac{(\frac{1}{2}y)^\nu}{\Gamma_{(1+\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \frac{(-2\nu)^{2p+2-2q|2}}{y^{2p+2-2q}} =$$

$$(-1)^{p+1} U_\nu(y,o) + A_{2p+2}$$

$$U_{\nu-2p-1}(y,o) = (-1)^{p+1} U_{\nu+1}(y,o) + \frac{(\frac{1}{2}y)^\nu}{\Gamma_{(1+\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \frac{(-2\nu)^{2p+1-2q|2}}{y^{2p+1-2q}} =$$

$$(-1)^{p+1} U_{\nu+1}(y,o) + A_{2p+1}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formeln (57):

$$U_\nu(y+h,o) = U_\nu(y,o) + \Sigma \frac{(\frac{1}{2}h)^{2p+1}}{(2p+1)!} U_{\nu-2p-1}(y,o) + \Sigma \frac{(\frac{1}{2}h)^{2p+1}}{(2p+2)!} U_{\nu-2p-2}(y,o),$$

$$U_{\nu+1}(y+h,o) = U_{\nu+1}(y,o) + \tfrac{1}{2}h\, U_\nu(y,o) + \Sigma \frac{(\frac{1}{2}h)^{2p+2}}{(2p+2)!} U_{\nu-2p-1}(y,o) + \Sigma \frac{(\frac{1}{2}h)^{2p+3}}{(2p+3)!} U_{\nu-2p-2}(y,o)$$

ein, so erhält man:

$$U_\nu(y+h,o) = U_\nu(y,o)\cdot\cos\tfrac{1}{2}h - U_{\nu+1}(y,o)\cdot\sin\tfrac{1}{2}h + \Sigma A_{p+1}\frac{(\frac{1}{2}h)^{p+1}}{(p+1)!},$$

$$U_{\nu+1}(y+h,o) = U_\nu(y,o)\cdot\sin\tfrac{1}{2}h + U_{\nu+1}(y,o)\cdot\cos\tfrac{1}{2}h + \Sigma A_{p+1}\frac{(\frac{1}{2}h)^{p+2}}{(p+2)!}$$

wo:

$$A_{2p+1} = \frac{(\frac{1}{2}y)^\nu}{\Gamma_{(1+\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \cdot \frac{(-2\nu)^{2p+1-2q|2}}{y^{2p+1-2q}} = (-1)^p \cdot \frac{(\frac{1}{2}y)^\nu}{\Gamma_{(1+\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \cdot \frac{(-2\nu)^{2q+1|2}}{y^{2q+1}},$$

$$A_{2p+2} = \frac{(\frac{1}{2}y)^\nu}{\Gamma_{(1+\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \cdot \frac{(-2\nu)^{2p+2-2q\,2}}{y^{2p+2-2q}} = (-1)^p \cdot \frac{(\frac{1}{2}y)^\nu}{\Gamma_{(1+\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \cdot \frac{(-2\nu)^{2q+2|2}}{y^{2q+2}}$$

ist.

Von den entsprechenden Gleichungen für V_ν (56, 57) ausgehend, erhält man ganz analog:

$$V_\nu(y+h,o) = V_\nu(y,o)\cdot\cos\tfrac{1}{2}h + V_{\nu+1}(y,o)\cdot\sin\tfrac{1}{2}h + \Sigma(-1)^p B_p \frac{(\frac{1}{2}h)^{p+2}}{(p+2)!},$$

$$V_{\nu+1}(y+h,o) = -V_\nu(y,o)\cdot\sin\tfrac{1}{2}h + V_{\nu+1}(y,o)\cdot\cos\tfrac{1}{2}h + \Sigma(-1)^p B_p \frac{(\frac{1}{2}h)^{p+1}}{(p+1)!},$$

wo:

$$B_{2p} = \frac{(\frac{1}{2}y)^{-\nu}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \cdot \frac{(2\nu)^{2p-2q|2}}{y^{2p-2q}} = (-1)^p \cdot \frac{(\frac{1}{2}y)^{-\nu}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \frac{(2\nu)^{2q|2}}{y^{2q}},$$

$$B_{2p+1} = \frac{(\frac{1}{2}y)^{-\nu}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \cdot \frac{(2\nu)^{2p+1-2q|2}}{y^{2p+1-2q}} = (-1)^p \frac{(\frac{1}{2}y)^{-\nu}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \sum_{q=o}^{q=p} (-1)^q \cdot \frac{(2\nu)^{2q+1|2}}{y^{2q+1}}$$

ist.

59. Will man die Functionen U_ν und V_ν durch bestimmte Integrale ausdrücken, so hat man zunächst aus (9 oder 33):

$$U_\nu = \frac{k^\nu}{l^{2\nu-1}} \int_o^r (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \cos\tfrac{1}{2}k(r^2-\varrho^2)\,d\varrho,$$

$$U_{\nu+1} = \frac{k^\nu}{l^{2\nu-1}} \int_o^r (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \sin\tfrac{1}{2}k(r^2-\varrho^2)\,d\varrho,$$

oder, wenn man:

$$\frac{\varrho}{r} = u, \qquad kr^2 = y, \qquad lr = z$$

setzt:

$$U_\nu(y,z) = \frac{y^\nu}{z^{2\nu-1}} \int_0^1 (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu) \cos \tfrac{1}{2} y (1-u^2) \cdot du,$$

$$U_{\nu+1}(y,z) = \frac{y^\nu}{z^{2\nu-1}} \int_0^1 (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu) \sin \tfrac{1}{2} y (1-u^2) \cdot du$$

welche Gleichungen für jedes $\nu > \frac{1}{2}$ gelten. Für positiv ganze ν habe ich dieselben bereits früher mitgetheilt [1]).

60. Aus (12) oder (33) ergibt sich ferner, sofern $\nu < 1$ ist:

$$V_{-\nu+2} = -\frac{k^\nu}{l^{2\nu-1}} \int_r^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k (r^2 - \varrho^2) \, d\varrho,$$

$$V_{-\nu+1} = -\frac{k^\nu}{l^{2\nu-1}} \int_r^\infty (l\varrho)^\nu I_{\nu-1}(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k (r^2 - \varrho^2) \, d\varrho,$$

oder für:

$$\frac{\varrho}{r} = u, \qquad kr^2 = y, \qquad lr = z:$$

$$V_{-\nu+2}(y,z) = -\frac{y^\nu}{z^{2\nu-1}} \int_1^\infty (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu) \cos \tfrac{1}{2} y (1-u^2) \cdot du,$$

$$V_{-\nu+1}(y,z) = -\frac{y^\nu}{z^{2\nu-1}} \int_1^\infty (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu) \sin \tfrac{1}{2} y (1-u^2) \cdot du.$$

oder auch, wenn man $-\nu+1$ statt ν setzt, und jetzt $\nu > 0$ ist:

$$V_{\nu+1}(y,z) = -\frac{y^{1-\nu}}{z^{1-2\nu}} \int_1^\infty (zu)^{1-\nu} I_{-\nu}(zu) \cos \tfrac{1}{2} y (u^2-1) \cdot du,$$

$$V_\nu(y,z) = \frac{y^{1-\nu}}{z^{1-2\nu}} \int_1^\infty (zu)^{1-\nu} I_{-\nu}(zu) \sin \tfrac{1}{2} y (u^2-1) \cdot du.$$

---

1) Lommel, Abhandl. der k. b. Akad. d. Wiss. XV. 2. p. 26. 1884.

61. Nehmen wir die oben (13, 14, 15) abgeleiteten unbestimmten Integrale σ_ν und σ'_ν zwischen den Grenzen o und r, so erhalten wir:

$$\int_0^r (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \Big(U_\nu\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) - U_\nu\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) \cos \tfrac{1}{2} kr^2 - U_{\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) \cdot \sin \tfrac{1}{2} kr^2 \Big),$$

$$\int_0^r (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho) \cdot \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} \Big(U_{\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) + U_\nu\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) \sin \tfrac{1}{2} kr^2 - U_{\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) \cos \tfrac{1}{2} kr^2 \Big),$$

woraus folgt, dass:

$$U_\nu\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) - U_\nu\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) \cos \tfrac{1}{2} kr^2 + U_{\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) \sin \tfrac{1}{2} kr^2 = \frac{k^{1-\nu}}{l^{1-2\nu}} \int_0^r (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho) \sin \tfrac{1}{2} k(r^2 - \varrho^2) \, d\varrho,$$

$$U_{\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) - U_\nu\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) \sin \tfrac{1}{2} kr^2 - U_{\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) \cos \tfrac{1}{2} kr^2 = - \frac{k^{1-\nu}}{l^{1-2\nu}} \int_0^r (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho) \cos \tfrac{1}{2} k(r^2 - \varrho^2) \, d\varrho.$$

oder, wenn wir wieder:

$$kr^2 = y, \qquad lr = z, \qquad \varrho = ru$$

setzen:

$$U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, o\right) \cos \tfrac{1}{2} y - U_{\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, o\right) \sin \tfrac{1}{2} y + \frac{y^{1-\nu}}{z^{1-2\nu}} \int_0^1 (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \sin \tfrac{1}{2} y(1 - u^2) \, du,$$

$$U_{\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, \varrho\right) \cdot \sin \tfrac{1}{2} y + U_{\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, o\right) \cos \tfrac{1}{2} y - \frac{y^{1-\nu}}{z^{1-2\nu}} \int_0^r (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \cos \tfrac{1}{2} y(1 - u^2) \, du.$$

Vertauschen wir hierin y mit $\frac{z^2}{y}$, so gelangen wir zu den Gleichungen:

$$U_\nu(y, z) = U_\nu(y, o) \cdot \cos\frac{z^2}{2y} - U_{\nu+1}(y, o) \sin\frac{z^2}{2y} +$$
$$\frac{z}{y^{1-\nu}} \int_o^1 (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \sin\frac{z^2}{2y}(1 - u^2)\, du,$$

$$U_{\nu+1}(y, z) = U_\nu(y, o) \sin\frac{z^2}{2y} + U_{\nu+1}(y, o) \cos\frac{z^2}{2y} -$$
$$\frac{z}{y^{1-\nu}} \int_o^1 (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \cdot \cos\frac{z^2}{2y}(1 - u^2)\, du,$$

welche für jedes beliebige ν giltig sind.

62. Behandeln wir in derselben Weise die in (16, 17, 18) gegebenen Entwickelungen, so erhalten wir:

$$\int_o^r (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho) \sin\tfrac{1}{2} k\varrho^2\, d\varrho = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\Big(V_{-\nu+2}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) - V_{-\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) \cdot \sin\tfrac{1}{2} kr_2 -$$
$$V_{-\nu+2}\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) \cdot \cos\tfrac{1}{2} kr^2\Big),$$

$$\int_o^r (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho) \cos\tfrac{1}{2} k\varrho^2\, d\varrho = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\Big(V_{-\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) - V_{-\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) \cdot \cos\tfrac{1}{2} kr^2 +$$
$$V_{-\nu+2}\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right) \cdot \sin\tfrac{1}{2} kr^2\Big),$$

und daraus auf dieselbe Weise wie vorhin:

$$V_{-\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = -V_{-\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, o\right) \cdot \sin\tfrac{1}{2} y + V_{-\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, o\right) \cdot \cos\tfrac{1}{2} y +$$
$$\frac{y^{1-\nu}}{z^{1-2\nu}} \int_o^1 (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \cdot \sin\tfrac{1}{2} y\,(1 - u^2)\, du,$$

$$V_{-\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = V_{-\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, o\right) \cdot \cos\tfrac{1}{2} y + V_{-\nu+2}\left(\tfrac{z^2}{y}, o\right) \cdot \sin\tfrac{1}{2} y -$$
$$\frac{y^{1-\nu}}{z^{1-2\nu}} \int_o^1 (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \cos\tfrac{1}{2} y\,(1 - u^2)\, du$$

und, wenn man y mit $\frac{z^2}{y}$ vertauscht:

$$V_{-\nu+2}(y,z) = -V_{-\nu+1}(y,o)\cdot\sin\frac{z^2}{2y} + V_{-\nu+2}(y,o)\cdot\cos\frac{z^2}{2y} + \frac{z}{y^{1-\nu}}\int_o^1 (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu)\cdot\sin\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du,$$

$$V_{-\nu+1}(y,z) = V_{-\nu+1}(y,o)\cdot\cos\frac{z^2}{2y} + V_{-\nu+2}(y,o)\cdot\sin\frac{z^2}{2y} - \frac{z}{y^{1-\nu}}\int_o^1 (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu)\cdot\cos\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du.$$

Setzt man darin noch $-\nu+1$ an die Stelle von ν, so hat man auch:

$$V_{\nu+1}(y,z) = -V_\nu(y,o)\cdot\sin\frac{z^2}{2y} + V_{\nu+1}(y,o)\cdot\cos\frac{z^2}{2y} + \frac{z}{y^\nu}\int_o^1 (zu)^\nu I_{1-\nu}(zu)\cdot\sin\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du,$$

$$V_\nu(y,z) = V_\nu(y,o)\cdot\cos\frac{z^2}{2y} + V_{\nu+1}(y,o)\cdot\sin\frac{z^2}{2y} - \frac{z}{y^\nu}\int_o^1 (zu)^\nu I_{1-\nu}(zu)\cdot\cos\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du.$$

63. Da, wenn $\nu > -\frac{1}{2}$ und l nicht Null ist:

$$(l\varrho)^{-\nu-2p} I_{\nu+2p}(l\varrho)$$

für $\varrho = \infty$ verschwindet, so ergibt sich noch aus (13, 14, 15):

$$\int_r^\infty (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho)\sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2\,d\varrho = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\left(U_\nu\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right)\cdot\cos\tfrac{1}{2}kr^2 + U_{\nu-1}\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right)\cdot\sin\tfrac{1}{2}kr^2\right),$$

$$\int_r^\infty (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho)\cdot\cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2\,d\varrho = -\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\left(U_\nu\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right)\cdot\sin\tfrac{1}{2}kr^2 - U_{\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, lr\right)\cdot\cos\tfrac{1}{2}kr^2\right),$$

woraus sofort:

$$U_\nu\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = \frac{y^{1-\nu}}{z^{1-2\nu}}\int_1^\infty (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu)\cdot\sin\tfrac{1}{2}y(u^2-1)\,du,$$

$$U_{\nu+1}\left(\tfrac{z^2}{y}, z\right) = \frac{y^{1-\nu}}{z^{1-2\nu}}\int_1^\infty (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu)\cdot\cos\tfrac{1}{2}y(u^2-1)\,du,$$

und, wenn man y mit $\frac{z^2}{y}$ vertauscht:

$$U_\nu(y,z) = \frac{z}{y^{1-\nu}} \int_1^\infty (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \sin \frac{z^2}{2y}(u^2-1)\,du,$$

$$U_{\nu+1}(y,z) = \frac{z}{y^{1-\nu}} \int_1^\infty (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \cos \frac{z^2}{2y}(u^2-1)\,du$$

hervorgeht.

64. Nimmt man die Integrale σ_ν und σ'_ν (13, 14, 15) zwischen den Grenzen $\varrho = 0$ und $\varrho = \infty$, so ergeben sich die Integrale:

$$\int_0^\infty (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho) \cdot \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2\, d\varrho = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} U_\nu\left(\tfrac{l^2}{k}, 0\right),$$

$$\int_0^\infty (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho) \cdot \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2\, d\varrho = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}} U_{\nu+1}\left(\tfrac{l^2}{k}, 0\right),$$

welche den oben (34) abgeleiteten ganz analog sind.

Man kann diese Resultate, wie sich durch Vergleichung der Formeln in (61) und (63) sofort ergibt, auch in folgender Gestalt darstellen:

$$\int_0^\infty (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \sin \frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du = \frac{y^{1-\nu}}{z}\left(-U_\nu(y,0)\cdot\cos\frac{z^2}{2y} + U_{\nu+1}(y,0)\cdot\sin\frac{z^2}{2y}\right)$$

$$\int_0^\infty (zu)^{1-\nu} I_\nu(zu) \cos \frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du = \frac{y^{1-\nu}}{z}\left(U_\nu(y,0)\cdot\sin\frac{z^2}{2y} + U_{\nu+1}(y,0)\cdot\cos\frac{z^2}{2y}\right).$$

65. Auch den soeben erwähnten Integralen (34) lässt sich eine analoge Form geben. Man erhält nämlich leicht aus den dortigen Gleichungen (für $\nu \gtreqless \frac{1}{2}$, $\nu < \frac{3}{2}$):

$$\int_0^\infty (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu) \cos \tfrac{1}{2} y (1-u^2)\,du = \frac{z^{2\nu-1}}{y^\nu} \cos\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

$$\int_0^\infty (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu) \sin \tfrac{1}{2} y (1-u^2)\,du = \frac{z^{2\nu-1}}{y^\nu} \sin\left(\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

also auch, wenn man $\frac{z^2}{y}$ an die Stelle von y setzt:

$$\int_0^\infty (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu) \cos\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du = \frac{y^\nu}{z}\cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right),$$

$$\int_0^\infty (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu)\cdot\sin\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du = \frac{y^\nu}{z}\sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} - \frac{\nu}{2}\pi\right).$$

Hieraus folgt (für $\nu \gtreqless \frac{1}{2}$, $\nu < \frac{3}{2}$) und wenn z nicht Null ist):

$$\int_0^\infty (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu)\left(y^{2\nu}\cos\tfrac{1}{2}y(1-u^2) - z^{2\nu}\cos\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\right)du = 0,$$

$$\int_0^\infty (zu)^\nu I_{\nu-1}(zu)\left(y^{2\nu}\sin\tfrac{1}{2}y(1-u^2) - z^{2\nu}\sin\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\right)du = 0.$$

66. Integrirt man die Differentialgleichung (48):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = \frac{\nu-1}{2z} I_{\nu-1}(z)$$

nach der Methode der Variation der Constanten, so erhält man als vollständiges Integral derselben, wenn $\nu > 1$ ist:

$$u = A\cos z + B\sin z + \frac{\nu-1}{2}\int_0^z \frac{1}{\zeta} I_{\nu-1}(\zeta)\sin(z-\zeta)\,d\zeta.$$

Da dieser Differentialgleichung aber auch durch $U_\nu(z,z)$ genügt wird (vergl. 48), so muss bei geeigneter Wahl der Constanten:

$$U_\nu(z,z) = A\cos z + B\sin z + \frac{\nu-1}{2}\int_0^z \frac{1}{\zeta} I_{\nu-1}(\zeta)\sin(z-\zeta)\,d\zeta$$

und, wenn man beiderseits nach z differentiirt:

$$\tfrac{1}{2}U_{\nu-1}(z,z) - \tfrac{1}{2}U_{\nu+1}(z,z) = -A\sin z + B\cos z + \frac{\nu-1}{2}\int_0^z \frac{1}{\zeta} I_{\nu-1}(\zeta)\cos(z-\zeta)\,d\zeta$$

sein. Da, wenn $\nu > 1$, für $z = 0$:

$$U_\nu(z,z), \qquad U_{\nu-1}(z,z), \qquad U_{\nu+1}(z,z)$$

gemäss der Definition von U_ν (32) verschwinden, so ergibt sich:

$$A = o, \qquad B = o,$$

und man hat für $\nu > 1$, wenn man noch auf die Beziehung:

$$U_{\nu+1}(z, z) = I_{\nu-1}(z) - U_{\nu-1}(z, z)$$

Rücksicht nimmt:

$$U_\nu(z, z) = \frac{\nu-1}{2} \int_o^z \frac{1}{\zeta} I_{\nu-1}(\zeta) \sin(z-\zeta)\, d\zeta = \frac{\nu-1}{2} \int_o^1 I_{\nu-1}(zu) \cdot \sin z(1-u) \cdot \frac{du}{u},$$

$$U_{\nu-1}(z, z) = \tfrac{1}{2} I_{\nu-1}(z) + \frac{\nu-1}{2} \int_o^z \frac{1}{\zeta} I_{\nu-1}(\zeta) \cos(z-\zeta)\, d\zeta$$

$$= \tfrac{1}{2} I_{\nu-1}(z) + \frac{\nu-1}{2} \int_o^1 I_{\nu-1}(zu) \cdot \cos z(1-u) \cdot \frac{du}{u},$$

oder, was dasselbe ist (für $\nu > 1$):

$$I_\nu - I_{\nu+2} + I_{\nu+4} - I_{\nu+6} + - \ldots = \frac{\nu-1}{2} \int_o^1 I_{\nu-1}(zu) \sin z(1-u) \frac{du}{u}$$

$$I_{\nu-1} - I_{\nu+1} + I_{\nu+3} - I_{\nu+5} + - \ldots = \frac{\nu-1}{2} \int_o^1 I_{\nu-1}(zu) \cos z(1-u) \frac{du}{u}.$$

67. Ist $\nu = 1$, so ist:

$$u = A \cos z + B \sin z$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = o,$$

welcher andrerseits auch durch die Function $U_\nu(z, z)$ genügt wird. Man hat daher:

$$U_1(z, z) = A \cos z + B \sin z$$

und, wenn man nach z differentiirt:

$$\tfrac{1}{2} U_o(z, z) - \tfrac{1}{2} U_2(z, z) = - A \sin z + B \cos z,$$

oder weil:

$$U_2(z, z) = I_o(z) - U_o(z, z)$$

ist:

$$U_o(z, z) - \tfrac{1}{2} I_o(z) = - A \sin z + B \cos z.$$

Da nun für $z = o$ (vergl. 54):

$$U_1(o, o) = o, \qquad U_o(o, o) = 1, \qquad I_o(o) = 1$$

ist, so muss:

$$A = o, \qquad B = \tfrac{1}{2}$$

sein, und man gelangt zu den bekannten Gleichungen:

$$U_1(z, z) = I_1 - I_3 + I_5 - I_7 + - \ldots = \tfrac{1}{2} \sin z,$$

$$U_o(z, z) - \tfrac{1}{2} I_o = \tfrac{1}{2} I_o - I_2 + I_4 - I_6 + - \ldots = \tfrac{1}{2} \cos z.$$

68. Aus (59) ergibt sich für $z = o$:

$$U_\nu(y, o) = y^\nu \int_o^1 \left[(zu)^{-\nu+1} I_{\nu-1}(zu)\right]_{z=o} \cdot u^{2\nu-1} \cos \tfrac{1}{2} y (1 - u^2)\, du$$

oder da:

$$\left[(zu)^{-\nu+1} I_{\nu-1}(zu)\right]_{z=o} = \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma_{(\nu)}}$$

ist:

$$U_\nu(y, o) = \frac{y^\nu}{2^{\nu-1} \Gamma_{(\nu)}} \int_o^1 u^{2\nu-1} \cos \tfrac{1}{2} y (1 - u^2)\, du,$$

und ebenso:

$$U_{\nu+1}(y, o) = \frac{y^\nu}{2^{\nu-1} \Gamma_{(\nu)}} \int_o^1 u^{2\nu-1} \sin \tfrac{1}{2} y (1 - u^2)\, du.$$

Beide Formeln gelten für jedes positive ν.

69. In ähnlicher Weise folgt aus den Formeln für $V_\nu(y, z)$ (60) für $z = o$:

$$V_\nu(y, o) = y^{1-\nu} \int_1^\infty \left[(zu)^\nu I_{-\nu}(zu)\right]_{z=o} u^{1-2\nu} \sin \tfrac{1}{2} y (u^2 - 1) \cdot du.$$

Setzen wir hier statt des beliebig positiven ν lieber $\nu + m$, wo jetzt m positiv ganz oder Null und ν positiv echt gebrochen zu denken ist, so ist[1]):

$$\left[(zu)^{\nu+m} I_{-\nu-m}(zu)\right]_{z=o} = (-1)^m \frac{2^\nu (2\nu)^{m|2}}{\Gamma_{(1-\nu)}}$$

---

1) Drückt man nämlich die Bessel'sche Function mit negativem Index durch solche mit positiven Indices aus (Lommel, Studien etc. p. 9), so hat man:

und es ergibt sich:

$$V_{\nu+m}(y,o) = (-1)^m \cdot \frac{2^\nu (2\nu)^{m|2}}{y^{m+\nu-1}\Gamma_{(1-\nu)}} \int_1^\infty u^{1-2\nu-2m} \sin\tfrac{1}{2} y (u^2-1)\,du,$$

$$V_{\nu+m+1}(y,o) = -(-1)^m \cdot \frac{2^\nu (2\nu)^{m,2}}{y^{m+\nu-1}\Gamma_{(1-\nu)}} \cdot \int_1^\infty u^{1-2\nu-2m} \cos\tfrac{1}{2} y (u^2-1)\,du.$$

Man erkennt leicht, dass jedes der beiden Integrale seinem absoluten Werthe nach kleiner ist als:

$$\int_1^\infty u^{1-2\nu-2m}\,du = \frac{1}{2\nu+2m-2}$$

und desshalb dem absoluten Werthe nach sowohl:

$$V_{\nu+m}(y,o) < \frac{2^\nu (2\nu)^{m-1|2}}{y^{m-1+\nu}\Gamma_{(1-\nu)}}, \quad \text{als auch} \quad V_{\nu+m+1}(y,o) < \frac{2^\nu (2\nu)^{m-1|2}}{y^{m-1+\nu}\Gamma_{(1-\nu)}}$$

ist. Es ist daher der Rest der divergenten Entwickelung (56) von $V_{\nu+m}(y,o)$, nämlich:

$$(-1)^{n+1} V_{\nu+m+2n+2}(y,o)$$

absolut genommen stets kleiner als das letzte in Rechnung gezogene Glied. Zu dieser sonach halbconvergenten Entwickelung (56) würde man übrigens auch gelangen, wenn man die obigen Integrale nach dem Factor:

$$u \sin\tfrac{1}{2} y (u^2-1)\,du \qquad \text{oder} \qquad u \cos\tfrac{1}{2} y (u^2-1)\,du$$

wiederholt theilweise integrirte.

Ebenso leicht erhellt, dass auch die in (54) gegebene convergente Entwickelung von $U_{\nu-m}(y,o)$ sich aus den Formeln (68) durch theilweise Integration nach dem Factor $u^{2\nu-1}\,du$ ergeben würde, dass ferner absolut genommen für $\nu > o$:

$$z^{\nu+m} I_{-\nu-m} = (-1)^m \sum_{p=o}^{p=m} \frac{m^{p|-1} (2\nu)^{p|2}}{p!} z^{\nu+m-p} I_{m-\nu-p}(z).$$

Für $z = o$ verschwinden sämmtliche Glieder dieser endlichen Reihe mit Ausnahme des letzten ($p = m$), und man erhält:

$$\left[z^{\nu+m} I_{-\nu-m}(z)\right]_{z=o} = (-1)^m (2\nu)^{m|2} \left[z^\nu I_{-\nu}\right]_{z=o} = (-1)^m \cdot \frac{2^\nu (2\nu)^{m|2}}{\Gamma_{(1-\nu)}}.$$

$$U_{\nu+1}(y,o) \text{ sowohl als } U_\nu(y,o) < \frac{y^\nu}{2^\nu \Gamma_{(\nu+1)}}$$

ist, und demnach auch beim Gebrauch dieser Reihen der Rest seinem absoluten Werthe nach kleiner bleibt als das letzte bei Berechnung von $U_{\nu-m}(y,o)$ und $U_{\nu+1-m}(y,o)$ berücksichtigte Reihenglied.

70. Setzt man in den obigen Integralen:

$$\tfrac{1}{2} y (u^2 - 1) = v,$$

wo v positiv zu denken ist, so nehmen sie folgende einfache Gestalt an:

$$V_{\nu+m}(y,o) = (-1)^m \cdot \frac{\nu^{m|1}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \int_o^\infty \frac{\sin v \, dv}{(\tfrac{1}{2} y + v)^{\nu+m}},$$

$$V_{\nu+m+1}(y,o) = (-1)^{m+1} \frac{\nu^{m|1}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \int_o^\infty \frac{\cos v \, dv}{(\tfrac{1}{2} y + v)^{\nu+m}}.$$

71. Nach einer bekannten Formel ist, wenn $\nu + m$ positiv:

$$\int_o^\infty e^{-(\frac{1}{2} y + v)} u^{\nu+m-1} \cdot du = \frac{\Gamma_{(\nu+m)}}{(\tfrac{1}{2} y + v)^{\nu+m}} = \frac{\nu^{m|1} \Gamma_{(\nu)}}{(\tfrac{1}{2} y + v)^{\nu+m}}.$$

Mit Rücksicht hierauf verwandelt sich die erste der vorstehenden Gleichungen in:

$$V_{\nu+m}(y,o) = \frac{(-1)^m}{\Gamma_{(\nu)} \Gamma_{(1-\nu)}} \int_o^\infty e^{-\frac{1}{2} y u} u^{\nu+m-1} \int_o^\infty e^{-uv} \sin v \, dv \, du,$$

oder, weil bekanntlich:

$$\int_o^\infty e^{-uv} \sin v \, dv = \frac{1}{1+u^2}$$

und (für $\nu \gtrless {}^{o}_{1}$):

$$\Gamma_{(\nu)} \Gamma_{(1-\nu)} = \frac{\pi}{\sin \nu\pi}$$

ist, in folgende:

$$V_{\nu+m}(y,o) = (-1)^m \cdot \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_o^\infty e^{-\frac{1}{2} yu} \cdot \frac{u^{\nu+m-1}}{1+u^2} du.$$

Diese Form für die Function $V_{\nu+m}(y,o)$, welche sich ebenso auch aus der zweiten der obigen Gleichungen ergeben würde, lässt unmittelbar

erkennen, dass $V_{\nu+m}(y, o)$ (wo ν positiv echt gebrochen und m positiv ganz oder Null ist) für gerade m stets positiv, für ungerade dagegen immer negativ ist, und dass die Functionswerthe mit wachsendem y fortwährend abnehmen. Da, wie bekannt (für $\nu < 2$):

$$\int_0^\infty \frac{u^{\nu-1}}{1+u^2}\,du = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sin\frac{1}{2}\nu\pi}$$

ist, so hat man, wenn $y = o$ ist, für $m = o$ und $m = 1$:

$$V_\nu(o, o) = \cos\tfrac{1}{2}\nu\pi, \qquad V_{\nu+1}(o, o) = -\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi.$$

Diess sind absolut genommen die grössten Werthe der Functionen $V_\nu(y, o)$ und $V_{\nu+1}(y, o)$.

72. Mit Rücksicht auf die in (68) und (71) für $U_\nu(y, o)$ und $V_\nu(y, o)$ abgeleiteten Ausdrücke, sowie auf die Beziehung (53):

$$U_\nu(y, o) - V_{-\nu+2}(y, o) = \cos\left(\tfrac{1}{2}y - \frac{\nu}{2}\pi\right)$$

erhalten wir noch aus (64) die bemerkenswerthen Gleichungen.

$$\int_0^\infty (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho)\cdot\sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2\,d\varrho = \frac{1}{k\cdot 2^{\nu-1}\Gamma_{(\nu)}}\int_0^1 u^{2\nu-1}\cos\frac{l^2}{2k}(1-u^2)\cdot du,$$

$$\int_0^\infty (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho)\cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2\,d\varrho = \frac{1}{k\cdot 2^{\nu-1}\Gamma_{(\nu)}}\int_0^1 u^{2\nu-1}\sin\frac{l^2}{2k}(1-u^2)\cdot du,$$

welche für jedes positive ν giltig sind; ferner, wenn $\nu \gtrless \begin{matrix}-1\\+1\end{matrix}$ ist:

$$\int_0^\infty (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho)\sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2\,d\varrho = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\cos\left(\frac{l^2}{2k} - \frac{\nu}{2}\pi\right) -$$

$$\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\cdot\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{l^2}{2k}u}\cdot\frac{u^{1-\nu}}{1+u^2}\,du,$$

$$\int_0^\infty (l\varrho)^{1-\nu} I_\nu(l\varrho)\cdot\cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2\,d\varrho = \frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\sin\left(\frac{l^2}{2k} - \frac{\nu}{2}\pi\right) +$$

$$\frac{l^{1-2\nu}}{k^{1-\nu}}\cdot\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{l^2}{2k}u}\cdot\frac{u^{-\nu}}{1+u^2}\,du,$$

Formeln, welche sich den oben in (34) abgeleiteten zur Seite stellen.

73. Da:

$$\int_0^\infty \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = \int_0^\alpha \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} + \int_\alpha^\infty \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}}$$

$$= \int_0^\alpha \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} + \int_0^\infty \frac{\sin(v+\alpha)\,dv}{(\frac{1}{2}y+\alpha+v)^{\nu+m}}$$

$$= \int_0^\alpha \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} + \cos\alpha \int_0^\infty \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+\alpha+v)^{\nu+m}} + \sin\alpha \int_0^\infty \frac{\cos v\,dv}{(\frac{1}{2}y+\alpha+v)^{\nu+m}}$$

und ebenso:

$$\int_0^\infty \frac{\cos v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = \int_0^\alpha \frac{\cos v\,du}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} + \cos\alpha \int_0^\infty \frac{\cos v\,dv}{(\frac{1}{2}y+\alpha+v)^{\nu+m}} - \sin\alpha \int_0^\infty \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+\alpha+v)^{\nu+m}}$$

ist, so hat man:

$$(-1)^m \frac{\nu^{m|1}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \int_0^\alpha \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = V_{\nu+m}(y,0) - \cos\alpha\, V_{\nu+m}(y+2\alpha,0) + \sin\alpha\, V_{\nu+m+1}(y+2\alpha,0),$$

$$(-1)^{m+1} \frac{\nu^{m|1}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \int_0^\alpha \frac{\cos v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = V_{\nu+m+1}(y,0) - \cos\alpha\, V_{\nu+m+1}(y+2\alpha,0) - \sin\alpha\, V_{\nu+m}(y+2\alpha,0).$$

Hieraus folgt für $\alpha = n\pi$:

$$V_{\nu+m}(y,0) - (-1)^n V_{\nu+m}(y+2n\pi,0) = (-1)^m \frac{\nu^{m|1}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \int_0^{n\pi} \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}},$$

$$V_{\nu+m+1}(y,0) - (-1)^n V_{\nu+m+1}(y+2n\pi,0) = (-1)^{m+1} \frac{\nu^{m|1}}{\Gamma_{(1-\nu)}} \int_0^{n\pi} \frac{\cos v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}}.$$

Nun ist:

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = \int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{\sin v\,du}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} + \int_{\frac{1}{2}n\pi}^{n\pi} \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{\sin(\frac{1}{2}n\pi - v)\,dv}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi-v)^{\nu+m}} + \int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{\sin(\frac{1}{2}n\pi+v)\,dv}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi+v)^{\nu+m}}$$

und ebenso:

$$\int_0^{n\pi} \frac{\cos v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = \int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{\cos(\frac{1}{2}n\pi - v)\,dv}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi - v)^{\nu+m}} + \int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{\cos(\frac{1}{2}n\pi + v)\,dv}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi + v)^{\nu+m}}.$$

Ist n gerade $(= 2r)$, so ergibt sich hieraus:

$$\int_0^{2r\pi} \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = (-1)^{r+1} \int_0^{r\pi} \sin v\,dv \left[\frac{1}{(\frac{1}{2}y+r\pi - v)^{\nu+m}} - \frac{1}{(\frac{1}{2}y+r\pi + v)^{\nu+m}}\right],$$

$$\int_0^{2r\pi} \frac{\cos v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = (-1)^{r} \int_0^{r\pi} \cos v\,dv \left[\frac{1}{(\frac{1}{2}y+r\pi - v)^{\nu+m}} + \frac{1}{(\frac{1}{2}y+r\pi + v)^{\nu+m}}\right],$$

und wenn n ungerade $(= 2r+1)$ ist:

$$\int_0^{(2r+1)\pi} \frac{\sin v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = (-1)^{r} \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} \cos v\,dv \left[\frac{1}{(\frac{1}{2}y+\frac{2r+1}{2}\pi - v)^{\nu+m}} + \frac{1}{(\frac{1}{2}y+\frac{2r+1}{2}\pi + v)^{\nu+m}}\right],$$

$$\int_0^{(2r+1)\pi} \frac{\cos v\,dv}{(\frac{1}{2}y+v)^{\nu+m}} = (-1)^{r} \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} \sin v\,dv \left[\frac{1}{(\frac{1}{2}y+\frac{2r+1}{2}\pi - v)^{\nu+m}} - \frac{1}{(\frac{1}{2}y+\frac{2r+1}{2}\pi + v)^{\nu+m}}\right].$$

Da nun, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi - v)^{\nu+m}} - \frac{1}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi + v)^{\nu+m}} = \frac{2}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi)^{\nu+m}} \Sigma \frac{(\nu+m)^{2p+1|2}}{(2p+1)!} \cdot \frac{v^{2p+1}}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi)^{2p+1}},$$

$$\frac{1}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi - v)^{\nu+m}} + \frac{1}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi + v)^{\nu+m}} = \frac{2}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi)^{\nu+m}} \Sigma \frac{(\nu+m)^{2p|2}}{(2p)!} \cdot \frac{v^{2p}}{(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}n\pi)^{2p}}$$

ist, so ergeben sich folgende Reihenentwickelungen:

$$V_{\nu+m}(y, o) = V_{\nu+m}(y + 4r\pi, o) -$$

$$\frac{(-1)^{m+r}2}{(\frac{1}{2}y+r\pi)^{\nu} \cdot \Gamma_{(1-\nu)}} \Sigma \frac{\nu^{m+2p+1|1}}{(2p+1)!\,(\frac{1}{2}y+r\pi)^{m+2p+1}} \int_0^{r\pi} v^{2p+1} \sin v\,dv,$$

$$V_{\nu+m+1}(y, o) = V_{\nu+m+1}(y + 4r\pi, o) -$$

$$\frac{(-1)^{m+r} \cdot 2}{(\frac{1}{2}y+r\pi)^{\nu} \cdot \Gamma_{(1-\nu)}} \Sigma \frac{\nu^{m+2p|1}}{(2p)!\,(\frac{1}{2}y+r\pi)^{m+2p}} \int_0^{r\pi} v^{2p} \cos v\,dv,$$

$$V_{\nu+m}(y, o) = -V_{\nu+m}(y + (4r+2)\pi, o) +$$

$$\frac{(-1)^{m+r} \cdot 2}{(\frac{1}{2}y + \frac{2r+1}{2}\pi)^{\nu} \Gamma_{(1-\nu)}} \Sigma \frac{\nu^{m+2p|1}}{(2p)!\,(\frac{1}{2}y + \frac{2r+1}{2}\pi)^{m+2p}} \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} v^{2p} \cos v \, dv,$$

$$V_{\nu+m+1}(y, o) = -V_{\nu+m+1}(y + (4r+2)\pi, o) -$$

$$\frac{(-1)^{m+r} \cdot 2}{(\frac{1}{2}y + \frac{2r+1}{2}\pi)^{\nu} \Gamma_{(1-\nu)}} \Sigma \frac{\nu^{m+2p+1|1}}{(2p+1)!\,(\frac{1}{2}y + \frac{2r+1}{2}\pi)^{m+2p+1}} \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} v^{2p+1} \sin v \, dv.$$

Andere ganz ähnliche Entwickelungen würde man noch erhalten, wenn man oben $(n + \frac{1}{2})\pi$ statt α setzen würde.

74. Die in diesen Formeln vorkommenden unendlichen Reihen convergiren rasch, und eignen sich daher zur numerischen Berechnung der Function $V_{\nu+m}(y, o)$, wenn die Zahlenwerthe der Integrale:

$$\int_0^{r\pi} v^{2p+1} \sin v \, dv, \text{ etc.}$$

gegeben sind.

Um die Werthe der Integrale:

$$C_q = \int_0^v v^q \cos v \, dv \quad \text{und} \quad S_q = \int_0^v v^q \sin v \, dv$$

zu finden, kann man wie folgt verfahren. Man hat:

$$\int_0^v v^q \cos v \, dv = v^q \sin v - q \int_0^v v^{q-1} \sin v \, dv,$$

$$\int_0^v v^q \sin v \, dv = -v^q \cos v + q \int_0^v v^{q-1} \cos v \, dv,$$

oder:

$$C_q + qS_{q-1} = v^q \sin v,$$

$$S_q - qC_{q-1} = -v^q \cos v,$$

woraus weiter folgt:

$$C_q + q(q-1)C_{q-2} = v^q \sin v + qv^{q-1} \cos v,$$

$$S_q + q(q-1)S_{q-2} = -v^q \cos v + qv^{q-1} \sin v,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} C_q + q(q-1)C_{q-2} &= (-1)^r q (r\pi)^{q-1}, \\ S_q + q(q-1)S_{q-2} &= (-1)^{r+1}(r\pi)^q, \\ C_q + q S_{q-1} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{für } v = r\pi$$

und:

$$\left.\begin{aligned} C'_q + q(q-1)C'_{q-2} &= (-1)^r \left(\frac{2r+1}{2}\pi\right)^q, \\ S'_q + q(q-1)S'_{q-2} &= (-1)^r q \left(\frac{2r+1}{2}\pi\right)^{q-1}, \\ S'_q - q C'_{q-1} &= 0. \end{aligned}\right\} \text{für } v = \frac{2r+1}{2}\pi.$$

Aus:

$$\frac{S_q + q(q-1)S_{q-2}}{S_{q+2} + (q+1)(q+2)S_q} = \frac{1}{(r\pi)^2} \quad \text{und:} \quad \frac{C'_q + q(q-1)C'_{q-2}}{C'_{q+2} + (q+1)(q+2)C'_q} = \frac{1}{(\frac{2r+1}{2}\pi)^2}$$

geht, wenn man die Quotienten:

$$\frac{S_q}{S_{q-2}} \quad \text{und} \quad \frac{C_q}{C_{q-2}} \quad \text{mit} \quad Q_q$$

bezeichnet, hervor:

$$Q_q = \frac{q(q-1)a^2}{(q+1)(q+2) - a^2 + Q_{q+2}}$$

wo statt a jedesmal die obere Grenze $r\pi$ oder $\frac{2r+1}{2}\pi$ der entsprechenden Integrale zu setzen ist.

Dieser Ausdruck lässt erkennen, dass Q_q mit wachsendem q sich dem Werthe a^2 nähert, und dass daher um so näher:

$$Q_q = \frac{q(q-1)a^2}{(q+1)(q+2)}$$

ist, je grösser man q annimmt. Beträgt für irgend einen Werth von q die Grösse, um welche Q_{q+2} noch von a^2 abweicht, ε_{q+2}, so hat man:

$$Q_q = \frac{q(q-1)a^2}{(q+1)(q+2) + \varepsilon_{q+2}}.$$

Der Fehler, mit welchem Q_q in Folge dessen behaftet wird, ist demnach dem absoluten Werthe nach kleiner als

$$\frac{q(q-1)a^2\varepsilon_{q+2}}{[(q+1)(q+2)]^2}.$$

Nimmt man daher für ein hinlänglich grosses q:

$$Q_{q+2} = a^2$$

an, und rechnet von da mittelst der Formel:

$$Q_q = \frac{q(q-1)a^2}{(q+1)(q+2) - a^2 + Q_{q+2}}$$

zurück, so werden die Fehler mit welchen die so erhaltenen Werthe der Q_q behaftet sind, immer kleiner. Sind die Q_q auf diese Weise gefunden, so hat man, da:

$$C'_o = \int_o^{\frac{2r+1}{2}\pi} \cos v \, dv = (-1)^r, \qquad S_1 = \int_o^{r\pi} v \sin v \, dv = (-1)^{r+1} \cdot r\pi$$

ist:

$C'_2 = (-1)^r Q_2$, $C'_4 = (-1)^r Q_2 Q_4$, $C'_6 = (-1)^r Q_2 Q_4 Q_6$, ... für $a = \frac{2r+1}{2}\pi$,

$S_3 = (-1)^{r+1} r\pi Q_1$, $S_5 = (-1)^{r+1} r\pi Q_1 Q_3$, $S_7 = (-1)^{r+1} r\pi Q_1 Q_3 Q_5$, ... für $a = r\pi$,

und dann im ersten Falle:

$$S'_q = q C'_{q-1}$$

und im zweiten:

$$C_q = -q S_{q-1}.$$

Sind hiemit diese Coefficienten gefunden, so lassen sich nun $V_{\nu+m}(y, o)$ und $V_{\nu+m+1}(y, o)$ aus den obigen Reihen berechnen, nachdem $V_{\nu+m}(y + 4a, o)$ aus der halbconvergenten Entwickelung (56)

$$V_{\nu+m}(y + 4a, o) = (-1)^m \cdot \left(\frac{2}{y}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\Gamma_{(1-\nu)}} \Sigma (-1)^p \cdot \frac{(2\nu)^{m+2p|2}}{(y + 4a)^{m+2p}}$$

gefunden ist.

IV. Abschnitt.

Die Fresnel'schen Integrale.

75. Die im ersten Abschnitt entwickelten Integrale C und S (5) ziehen sich für $l = o$ auf die einfacheren:

$$\int \cos \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho, \qquad \int \sin \tfrac{1}{2} k\varrho^2 \, d\varrho$$

zurück, welche mit den Integralen:

$$\int \cos \tfrac{1}{2} \pi v^2 \cdot dv, \qquad \int \sin \tfrac{1}{2} \pi v^2 \, dv,$$

auf welche Fresnel die Theorie der Beugung an einem geradlinigen Rande zurückgeführt hat, dem Wesen nach identisch sind.

Setzen wir in den letzteren Formen $\frac{1}{2}\pi v^2 = z$, so erhalten wir:

$$\int_0^v \cos\tfrac{1}{2}\pi v^2\,dv = \tfrac{1}{2}\int_0^z \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\,dz = \tfrac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\,dz,$$

$$\int_0^v \sin\tfrac{1}{2}\pi v^2\,dv = \tfrac{1}{2}\int_0^z \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,dz = \tfrac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz.$$

76. Aus dem Vorhergehenden erhalten wir nun sofort durch U-Functionen ausgedrückt (vergl. 9, 68):

$$\tfrac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}U_{\frac{1}{2}}(2z, o)\cdot\cos z + \frac{1}{\sqrt{2}}U_{\frac{3}{2}}(2z, o)\cdot\sin z,$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}U_{\frac{1}{2}}(2z, o)\cdot\sin z - \frac{1}{\sqrt{2}}U_{\frac{3}{2}}(2z, o)\cdot\cos z,$$

und daraus wieder vermöge der Beziehungen (36):

$$U_{\frac{1}{2}}(2z, o) - V_{\frac{3}{2}}(2z, o) = \sin(z + \tfrac{1}{4}\pi),$$
$$U_{\frac{3}{2}}(2z, o) - V_{\frac{1}{2}}(2z, o) = -\cos(z + \tfrac{1}{4}\pi)$$

die Gilbert'schen Formeln:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}V_{\frac{1}{2}}(2z, o)\cdot\sin z + \frac{1}{\sqrt{2}}V_{\frac{3}{2}}(2z, o)\cdot\cos z,$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}V_{\frac{1}{2}}(2z, o)\cdot\cos z + \frac{1}{\sqrt{2}}V_{\frac{3}{2}}(2z, o)\cdot\sin z.$$

77. Als zur numerischen Berechnung brauchbare Entwickelungen ergeben sich für die U-Functionen aus (54) die convergenten Knochenhauer'schen Reihen[1]):

1) Knochenhauer, Pogg. Ann. XLI. 1837.

$$U_{\frac{1}{2}}(2z, o) = \sqrt{\frac{4z}{\pi}} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{(2z)^{2p}}{1^{2p+1|2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4z}{\pi}} \left(1 - \frac{(2z)^2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{(2z)^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - + \ldots\right),$$

$$U_{\frac{3}{2}}(2z, o) = \sqrt{\frac{4z}{\pi}} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{(2z)^{2p+1}}{1^{2p+2|2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4z}{\pi}} \left(\frac{2z}{1\cdot 3} - \frac{(2z)^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{(2z)^5}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} - + \ldots\right),$$

welche für kleine Werthe von z bequem sind, und für die V-Functionen aus (56) die halbconvergenten Cauchy'schen Reihen[1]):

$$V_{\frac{1}{2}}(2z, o) = \sqrt{\frac{4z}{\pi}} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{1^{p|2}}{(2z)^{2p+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{4z}{\pi}} \left(\frac{1}{2z} - \frac{1\cdot 3}{(2z)^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{(2z)^3} - + \ldots\right),$$

$$V_{\frac{3}{2}}(2z, o) = -\sqrt{\frac{4z}{\pi}} \Sigma(-1)^p \cdot \frac{1^{2p+1|2}}{(2z)^{2p+2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{4z}{\pi}} \left(\frac{1}{(2z)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2z)^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{(2z)^6} - + \ldots\right),$$

welche für grosse Werthe von z rasch zum Ziele führen.

78. Es ist Ph. Gilbert's[2]) Verdienst, zuerst gezeigt zu haben, dass (gemäss 71):

$$V_{\frac{1}{2}}(2z, o) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{2}} e^{-uz}}{1+u^2} du, \qquad V_{\frac{3}{2}}(2z, o) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{2}} e^{-uz}}{1+u^2} du$$

ist. Zwar liefern diese Gilbert'schen Integrale keine neue Methode der numerischen Berechnung, sondern sie führen, je nachdem man sie nach steigenden oder nach fallenden Potenzen von z entwickelt, wieder zu den Knochenhauer'schen und den Cauchy'schen Reihen. Sie gewähren aber den wesentlichen Vortheil, dass sie den Gang der Werthe der Functionen $V_{\frac{1}{2}}(2z, o)$ und $V_{\frac{3}{2}}(2z, o)$ mit einem Blicke übersehen lassen.

---

1) Cauchy, C. R. XV. 1842.

2) Gilbert, Mém. cour. de l'Acad. de Brux., XXXI. 1862.

Man erkennt nämlich unmittelbar, dass die Function $V_{\frac{1}{2}}(2z, o)$ stets positiv bleibt und, da ihr erster Differentialquotient $V_{\frac{3}{2}}(2z, o)$ (vergl. 51) stets negativ ist, mit wachsendem z von dem Werthe $\cos\frac{1}{4}\pi = 1/\sqrt{2}$ bei $z = o$ (71) stetig abnimmt, um für $z = \infty$ zu verschwinden. Denkt man sich z als Abscisse und die Functionswerthe als Ordinaten einer Curve, so schneidet diese die Ordinatenaxe in der Höhe $1/\sqrt{2}$ unter einem Winkel, dessen Tangente $-1/\sqrt{2}$ ist, und nähert sich dann asymptotisch der Abscissenaxe, indem sie dieser, weil:

$$\frac{\partial^2 V_{\frac{1}{2}}(2z, o)}{\partial z^2} = V_{\frac{1}{2}+2}(2z, o)$$

immer positiv ist (51, 71), stets ihre convexe Seite zuwendet.

Die Function $V_{\frac{3}{2}}(2z, o)$ dagegen ist immer negativ; von dem Werthe $-1/\sqrt{2}$, der ihr für $z = o$ zukommt, wächst sie mit zunehmendem z bis zu dem Werthe Null für $z = \infty$; denn ihr erster Differentialquotient, gleich dem zweiten von $V_{\frac{1}{2}}(2z, o)$, bleibt fortwährend positiv. Die entsprechende Curve berührt die Ordinatenaxe in der Tiefe $-1/\sqrt{2}$, und erhebt sich von da asymptotisch gegen die Abscissenaxe, welcher sie, wegen des immer negativen Werthes von:

$$\frac{\partial^2 V_{\frac{3}{2}}(2z, o)}{\partial z^2} = V_{\frac{1}{2}+3}(2z, o)$$

stets ihre convexe Seite zukehrt.

Wie man sieht, ist der oscillirende Charakter sowohl der Functionen $U_{\frac{1}{2}}(2z, o)$ und $U_{\frac{3}{2}}(2z, o)$ als auch der Fresnel'schen Integrale lediglich durch die in den Gleichungen:

$$U_{\frac{1}{2}}(2z, o) = \sin(z + \tfrac{1}{4}\pi) + V_{\frac{3}{2}}(2z, o), \quad U_{\frac{3}{2}}(2z, o) = -\cos(z + \tfrac{1}{4}\pi) + V_{\frac{1}{2}}(2z, o)$$

vorkommenden goniometrischen Functionen bedingt, während der eigentlich transcendente Inhalt derselben sich in die Functionen $V_{\frac{1}{2}}(2z, o)$ und $V_{\frac{3}{2}}(2z, o)$ zurückzieht, deren absolute Werthe mit wachsendem z fortwährend und rasch abnehmen. Wegen dieses Verhaltens bieten Tabellen der letzteren Functionen den Vortheil, dass sie bei geeigneter Wahl des Incrementes lineare Interpolation gestatten.

Gilbert[1]) hat daher eine Tabelle dieser Functionen berechnet, wozu er sich der Knochenhauer'schen und der Cauchy'schen Reihen be-

1) Gilbert, l. c. p. 47—50. 1862.

diente, und für den Werthbereich, innerhalb welches diese Reihen unbequem sind, die oben (58) in allgemeiner Form entwickelten Interpolationsformeln $V_\nu(y+h, o)$, $V_{\nu+1}(y+h, o)$ zu Hilfe nahm. Gilbert's Tabellen geben die Functionen:

$$M(\mu^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}(\mu^2\pi, o), \qquad N(\mu^2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot V_{\frac{3}{2}}(\mu^2\pi, o)$$

von $\mu^2 = o$ bis $\mu^2 = 30$, d. i. von $z = o$ bis $z = 48,124$, mit fünf Decimalen.

Später hat Hermann Struve[1]), indem er lediglich von den Knochenhauer'schen und Cauchy'schen Reihen Gebrauch machte, die Functionen (wo M und N, wie man sieht, eine andere Bedeutung haben als bei Gilbert)

$$N(v) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot V_{\frac{1}{2}}(2v^2, o), \qquad M(v) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, V_{\frac{3}{2}}(2v^2, o)$$

von $v = o$ bis $v = 6$, d. i. von $z = o$ bis $z = 36$ berechnet, ebenfalls auf fünf Decimalen.

Ferner hat Lindstedt[2]), nach der oben (in 73 und 74) allgemein entwickelten Methode, aus den beiden letzten dort (73) angegebenen Formeln (für $m = o$, $r = o$, $\nu = \frac{1}{2}$) die Functionen:

$$N(\beta) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, V_{\frac{1}{2}}((2\beta+1)\pi, o), \qquad M(\beta) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, V_{\frac{3}{2}}((2\beta+1)\pi, o)$$

von $\beta = o$ bis $\beta = 8,9$, also von $z = 1,571$ bis $z = 15,523$ auf sechs Decimalen berechnet.

Endlich geben wir am Schlusse dieser Abhandlung (Tab. XXII) eine Tabelle der Werthe von $\frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)$ und $\frac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}(x, o)$ von $x = o$ bis $x = 100$, deren Berechnungsweise weiter unten (81) zur Sprache kommen wird. Auch sie gestattet, wenn nur geringere Genauigkeit verlangt wird, lineare Interpolation. Mit völliger Schärfe aber wird die Interpolalion durchgeführt mittelst unserer Formeln (57):

$$V_{\frac{1}{2}}(x+h, o) = V_{\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} V_{\frac{3}{2}} + \frac{h^2}{2\cdot 4} V_{\frac{5}{2}} + \frac{h^3}{2\cdot 4\cdot 6} V_{\frac{7}{2}} + \ldots$$

$$V_{\frac{3}{2}}(x+h, o) = V_{\frac{3}{2}} + \frac{h}{2} V_{\frac{5}{2}} + \frac{h^2}{2\cdot 4} V_{\frac{7}{2}} + \frac{h^3}{2\cdot 4\cdot 6} V_{\frac{9}{2}} + \ldots.$$

---

1) H. Struve, Fresnel's Interferenzerscheinungen. Dorpat 1881.

2) A. Lindstedt, Zur Theorie der Fresnel'schen Integrale; Wied. Ann. XVII. p. 720. 1882.

wo die Coefficienten $V_{\frac{1}{2}}$, $V_{\frac{3}{2}}$, $V_{\frac{5}{2}}$ ... aus der Gleichung

$$V_{\frac{1}{2}+p} + V_{\frac{1}{2}+p+2} = (-1)^p \cdot \frac{1^{p|2}}{y^{p+1}} \sqrt{\frac{2y}{\pi}}$$

leicht zu berechnen sind.

79. Uebrigens kann man, auch ohne zu numerischen Auswerthungen zu greifen, den Verlauf der Werthe der Fresnel'schen Integrale mit Rücksicht auf das dargelegte Verhalten der Functionen $V_{\frac{1}{2}}(2z, o)$ und $V_{\frac{3}{2}}(2z, o)$ leicht verfolgen.

Das Integral:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\, dz = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}(2z, o) \cdot \sin z + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{3}{2}}(2z, o) \cdot \cos z$$

wird zu einem Maximum oder Minimum, wenn $\cos z = o$, oder $z = \frac{2n+1}{2}\pi$ ist. Die Maxima, für $z = \frac{4n+1}{2}\pi$, sind ausgedrückt durch:

$$\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}(2z, o),$$

die Minima, für $z = \frac{4n+3}{2}\pi$, durch:

$$\tfrac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}(2z, o).$$

Da $V_{\frac{1}{2}}(2z, o)$ stets positiv und kleiner als $1/\sqrt{2}$ ist, so können die Maxima niemals den Werth 1 erreichen, und die Minima nie bis Null herabsinken. Die Werthe des Integrals sind demnach stets positiv und kleiner als 1. Denken wir uns ihren Gang durch eine Curve mit der Abscisse z dargestellt, so berührt dieselbe im Anfangspunkt die Ordinatenaxe, erhebt sich über die Gerade $y = 1/2$ zu ihrem ersten Maximum bei $z = \frac{1}{2}\pi$, sinkt dann unter diese Gerade herab, u. s. f. und nähert sich ihr, indem die Biegungen der Curve abwechselnd über und unter ihr verlaufen, mit wachsendem z immer mehr. Die Gipfel der Maxima und Minima liegen beziehungsweise auf den Curven:

$$y = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}(2z, o) \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}(2z, o),$$

welche sich von beiden Seiten her derselben Asymptote $y = \frac{1}{2}$ nähern. Diese letztere wird von der Curve der Werthe des Integrals geschnitten in den Punkten, deren Abscissen die Gleichung:

$$\operatorname{tgz} = -\frac{V_{\frac{3}{2}}(2z, o)}{V_{\frac{1}{2}}(2z, o)}$$

erfüllen; mit wachsendem z kommen die Wurzelwerthe dieser Gleichung denjenigen der Gleichung:

$$\operatorname{tgz} = \frac{1}{2z},$$

folglich den Werthen $z = n\pi$ immer näher.

80. Auch das Integral:

$$\tfrac{1}{2}\int_o^z I_{\frac{1}{2}}\,dz = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}(2z, o)\cdot\cos z + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{3}{2}}(2z, o)\cdot\sin z$$

bleibt stets positiv und kleiner als 1, da seine Maxima, ausgedrückt durch:

$$\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}(2z, o)$$

für $z = (2n+1)\pi$, niemals bis zu dem Werth 1 emporsteigen, die Minima:

$$\tfrac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}(2z, o)$$

für $z = (2n+2)\pi$, nie bis Null herabgehen können. Die Curve der Integralwerthe berührt im Anfangspunkt die Abscissenaxe, steht also hier auf der vorigen senkrecht, und nähert sich ebenfalls der Geraden $y = \frac{1}{2}$, welche sie in den durch die Gleichung:

$$\operatorname{tgz} = \frac{V_{\frac{1}{2}}(2z, o)}{V_{\frac{3}{2}}(2z, o)}$$

bestimmten Punkten hinüber- und herübergehend durchsetzt; die Wurzeln dieser Gleichung nähern sich mit zunehmendem z denjenigen der Gleichung:

$$\operatorname{tgz} = -2z$$

und mit diesen den Werthen $z = \frac{2n+1}{2}\pi$. Mit wachsendem z rücken demnach die Schnittpunkte der einen Curve mit der Geraden $y = \frac{1}{2}$ immer näher unter die Gipfelpunkte der anderen.

81. Eine neue Berechnungsmethode der Fresnel'schen Integrale ergibt sich aus der Gleichung [1]):

$$\tfrac{1}{2}\int_o^z I_\nu\,dz = I_{\nu+1} + I_{\nu+3} + I_{\nu+5} + \ldots = \Sigma I_{\nu+2p+1};$$

2) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen p. 45. Leipzig, 1868.

dieselbe liefert nämlich für $\nu = -\frac{1}{2}$ und $\nu = \frac{1}{2}$ die beiden für jeden Werth von z convergirenden unendlichen Reihen:

$$\frac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\,dz = I_{\frac{1}{2}} + I_{\frac{3}{2}} + I_{\frac{5}{2}} + I_{1\frac{3}{2}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz = I_{\frac{3}{2}} + I_{\frac{7}{2}} + I_{1\frac{1}{2}} + I_{1\frac{5}{2}} + \ldots.$$

Stehen daher die numerischen Werthe der Bessel'schen Functionen $I_{\frac{2n+1}{2}}$ zu Gebote, wie dies vermöge unserer Tabelle I. der Fall ist, so erhält man diejenigen der Fresnel'schen Integrale einfach durch Addition. Auf diese Weise wurden die Werthe der Fresnel'schen Integrale auf sechs Decimalen für alle ganzzahligen Argumente von $z = 1$ bis $z = 20$ direct berechnet (s. Tab. III), und hieraus erst indirect die zugehörigen V der Tab. XXII. Von $z = 21$ bis $z = 50$ dagegen wurden die Functionen $V_{\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{3}{2}}$ mittels der Cauchy'schen Reihen, welche für so grosse Werthe von z rasch zum Ziele führen, direct bestimmt und hieraus dann die Werthe der Fresnel'schen Integrale abgeleitet. Von $z = 0$ bis $z = 1$ wurden die Integralwerthe von Zehntel zu Zehntel des Arguments aus den convergenten unendlichen Reihen:

$$\frac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\,dz = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\left(1 - \frac{z^2}{5\cdot 2!} + \frac{z^4}{9\cdot 4!} - - + \ldots\right) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\,\Sigma(-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{(4p+1)(2p)!},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\left(\frac{z}{3} - \frac{z^3}{7\cdot 3!} + \frac{z^5}{11\cdot 5!} - + \ldots\right) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\,\Sigma(-1)^p \cdot \frac{z^{2p+1}}{(4p+3)(2p+1)!}$$

berechnet.

82. Um die Integrale für einen zwischenliegenden Werth $z + h$ des Arguments zu bestimmen, bedienen wir uns der Taylor'schen Reihe:

$$\frac{1}{2}\int_0^{z+h} I_\nu\,dz = \frac{1}{2}\int_0^z I_\nu\,dz + \frac{1}{2}I_\nu \cdot \frac{h}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial z}\cdot\frac{h^2}{2!} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial z^2}\cdot\frac{h^3}{3!} + \ldots.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \tfrac{1}{2}(I_{\nu-1} - I_{\nu+1}),$$

$$\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial z^2} = \tfrac{1}{4}(I_{\nu-2} - 2\,I_\nu + I_{\nu+2}),$$

$$\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial z^3} = \tfrac{1}{8}(I_{\nu-3} - 3\,I_{\nu-1} + 3\,I_{\nu+1} - I_{\nu+3}),$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^m I_\nu}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \Sigma(-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} I_{\nu-m+2p}.$$

Die Differentialquotienten der Bessel'schen Functionen werden also nach demselben Gesetze gebildet, wie die nach ν genommenen endlichen Differenzen zwischen je der zweiten Function, nur dass jede derselben noch mit der sovielten Potenz von 2 zu dividiren ist, als die Ordnung des Differentialquotienten angibt. Man findet sie demnach durch ein bequemes Rechnungsverfahren aus den Tabellen der Bessel'schen Functionen (Tab. I. und II.).

Setzt man nun:

$$\frac{1}{2} I_{-\frac{1}{2}} = a, \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial I_{-\frac{1}{2}}}{\partial z} = b, \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{\partial^2 I_{-\frac{1}{2}}}{\partial z^2} = c, \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\frac{\partial^3 I_{-\frac{1}{2}}}{\partial z^3} = d,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\frac{\partial^4 I_{-\frac{1}{2}}}{\partial z^4} = e, \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\frac{\partial^5 I_{-\frac{1}{2}}}{\partial z^5} = f,$$

ferner:

$$\frac{1}{2} I_{\frac{1}{2}} = a', \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial I_{\frac{1}{2}}}{\partial z} = b', \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{\partial^2 I_{\frac{1}{2}}}{\partial z^2} = e', \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\frac{\partial^3 I_{\frac{1}{2}}}{\partial z^3} = d',$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\frac{\partial^4 I_{\frac{1}{2}}}{\partial z^4} = e', \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\frac{\partial^5 I_{\frac{1}{2}}}{\partial z^5} = f',$$

so hat man:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{z+h} I_{-\frac{1}{2}}\,dz = \tfrac{1}{2}\int_0^{z} I_{-\frac{1}{2}}\,dz + ah + bh^2 + ch^3 + dh^4 + eh^5 + fh^6,$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{z} I_{\frac{1}{2}}\,dz = \tfrac{1}{2}\int_0^{z} I_{\frac{1}{2}}\,dz + a'h + b'h^2 + c'h^3 + d'h^4 + e'h^5 + f'h^6.$$

Die Werthe von a bis f und von a′ bis f′ sind in den beiden Interpolationstafeln [1]) Tab. III b und III c von $z = 1$ bis $z = 50$ in Einheiten

1) In der Tab. III b ist für $z = 1$ und $z = 2$ auch noch der Coefficient g von h^7 angegeben.

der sechsten Decimale angegeben. Mit ihrer Hilfe wurden die Zwischenwerthe der Fresnel'schen Integrale für $z = 1{,}5$ bis $z = 49{,}5$, welche in der Tab. III mit aufgeführt sind, sowie ihre Maximal- und Minimalwerthe, welche die Tab. III a enthält, berechnet. Beim Gebrauch der Interpolationstafeln bleibt der Werth von h daher stets zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ eingeschlossen.

Ist h sehr klein, oder werden weniger als sechs Decimalen verlangt, so genügen natürlich weniger Glieder der vorstehenden Interpolationsreihen.

83. Die Fresnel'schen Integrale können noch auf mehrere andere Arten in Reihen, welche nach Bessel'schen Functionen fortschreiten, entwickelt werden.

Wendet man auf das Integral:

$$\int I_\nu \, dz = \int z^\nu z^{-\nu} I_\nu \, dz$$

die Methode der theilweisen Integration an, indem man z^ν als zu integrirenden Factor betrachtet, und von der Formel:

$$\frac{\partial(z^{-\nu} I_\nu)}{\partial z} = -z^{-\nu} I_{\nu+1}$$

fortgesetzten Gebrauch macht, so erhält man leicht die für jedes z und jedes $\nu > -1$ convergente Entwickelung:

$$\int I_\nu \, dz = \Sigma \frac{z^{p+1}}{(\nu+1)^{\overline{p+1}|2}} I_{\nu+p}$$

oder speciell, da die Reihe für $z = 0$ verschwindet

$$\frac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}} \, dz = \frac{1}{2} \Sigma \frac{(2z)^{p+1}}{1^{\overline{p+1}|4}} I_{-\frac{1}{2}+p}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2z\, I_{-\frac{1}{2}} + \frac{(2z)^2}{1 \cdot 5} I_{\frac{1}{2}} + \frac{(2z)^3}{1 \cdot 5 \cdot 9} I_{\frac{3}{2}} + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}} \, dz = \frac{1}{2} \Sigma \frac{(2z)^{p+1}}{3^{\overline{p+1}|4}} I_{\frac{1}{2}+p}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2z}{3} I_{\frac{1}{2}} + \frac{(2z)^2}{3 \cdot 7} I_{\frac{3}{2}} + \frac{(2z)^3}{3 \cdot 7 \cdot 11} I_{\frac{5}{2}} + \ldots\right).$$

84. Wird dagegen in:

$$\int I_\nu \, dz = \int z^{-\nu-1} z^{\nu+1} I_\nu \, dz$$

$z^{\nu+1} I_\nu$ als zu integrirender Factor angesehen, und unter Benutzung der Formel:

$$\int z^{\nu+1} I_\nu \, dz = z^{\nu+1} I_{\nu+1}$$

die theilweise Integration wiederholt, so findet sich:

$$\int I_\nu \, dz = \Sigma \frac{(\nu+1)^{p,2}}{z^p} I_{\nu+1+p},$$

folglich insbesondere, da diese Reihe für $z = \infty$ verschwindet:

$$\tfrac{1}{2} \int_z^\infty I_{-\frac{1}{2}} \, dz = -\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1^{p|4}}{(2z)^p} I_{\frac{1}{2}+p},$$

$$\tfrac{1}{2} \int_z^\infty I_{\frac{1}{2}} \, dz = -\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{3^{p|4}}{(2z)^p} I_{\frac{3}{2}+p},$$

und, da:

$$\tfrac{1}{2} \int_0^\infty I_{-\frac{1}{2}} \, dz = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty I_{\frac{1}{2}} \, dz = \tfrac{1}{2}$$

ist:

$$\tfrac{1}{2} \int_0^z I_{-\frac{1}{2}} \, dz = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1^{p|4}}{(2z)^p} I_{\frac{1}{2}+p}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \left(I_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2z} I_{\frac{3}{2}} + \frac{1 \cdot 5}{(2z)^2} I_{\frac{5}{2}} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{(2z)^3} I_{\frac{7}{2}} + \ldots \right),$$

$$\tfrac{1}{2} \int_0^z I_{\frac{1}{2}} \, dz = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{3^{p|4}}{(2z)^p} I_{\frac{3}{2}+p}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \left(I_{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2z} I_{\frac{5}{2}} + \frac{3 \cdot 7}{(2z)^2} I_{\frac{7}{2}} + \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{(2z)^3} I_{\frac{9}{2}} + \ldots \right).$$

Diese Reihen sind zwar divergent, können aber dennoch für hinlänglich grosse Werthe von z zur Berechnung der Integralwerthe gebraucht werden, da sich leicht eine obere Grenze des Fehlers angeben lässt, welchen man begeht, wenn man die Reihen mit dem Gliede:

$$\frac{(\nu+1)^{n|2}}{z^n} I_{\nu+1+n}$$

abbricht. Der gesammte Rest beträgt alsdann:

$$R = (\nu+1)^{n+1|2}\int_z^\infty z^{-\nu-2n-3}\, z^{\nu+n+2}\, I_{\nu+n+1}\, dz = (\nu+1)^{n+1|2}\int_z^\infty z^{-n-1}\, I_{\nu+n+1}\, dz.$$

Da $I_{\nu+n+1}$ seinem absoluten Werthe nach kleiner als 1 ist, so ist absolut genommen:

$$R < (\nu+1)^{n+1|2}\int_z^\infty z^{-n-1}\, dz, \quad \text{oder} \quad R < \frac{(\nu+1)^{n+1|2}}{n z^n}.$$

85. Wir erhalten ferner aus den Formeln des § 66 nach leichter Umformung der dort zorkommenden Integrale:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\, dz &= \sqrt{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}z\left(I_{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z) - I_{\frac{5}{2}}(\tfrac{1}{2}z) + I_{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z) - I_{\frac{1}{2}^3}(\tfrac{1}{2}z) + \ldots\right)\\
&\quad + \sqrt{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}z\left(I_{\frac{3}{2}}(\tfrac{1}{2}z) - I_{\frac{7}{2}}(\tfrac{1}{2}z) + I_{\frac{1}{2}^1}(\tfrac{1}{2}z) - I_{\frac{1}{2}^5}(\tfrac{1}{2}z) + - \ldots\right),\\
\tfrac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\, dz &= \sqrt{2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}z\left(I_{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}z) - I_{\frac{5}{2}}(\tfrac{1}{2}z) + I_{\frac{9}{2}}(\tfrac{1}{2}z) - I_{\frac{1}{2}^3}(\tfrac{1}{2}z) + - \ldots\right)\\
&\quad - \sqrt{2}\cdot\cos\tfrac{1}{2}z\left(I_{\frac{3}{2}}(\tfrac{1}{2}z) - I_{\frac{7}{2}}(\tfrac{1}{2}z) + I_{\frac{1}{2}^1}(\tfrac{1}{2}z) - I_{\frac{1}{2}^5}(\tfrac{1}{2}z) + - \ldots\right),
\end{aligned}$$

wo die unendlichen Reihen für jeden Werth von z convergiren.

86. Ein Blick auf die Formeln (59 — 62) lässt sofort erkennen, dass die Functionen $U_{\frac{1}{2}}(y,z)$, $U_{\frac{3}{2}}(y,z)$, $V_{\frac{1}{2}}(y,z)$, $V_{\frac{3}{2}}(y,z)$ durch Fresnel'sche Integrale, folglich auch durch $U_{\frac{1}{2}}(y,o)$, $U_{\frac{3}{2}}(y,o)$, $V_{\frac{1}{2}}(y,o)$, $V_{\frac{3}{2}}(y,o)$ ausdrückbar sein müssen.

Aus (59) ergibt sich nämlich für $\nu = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
U_{\frac{1}{2}}(y,z) &= \sqrt{\frac{2y}{\pi}}\int_0^1 \cos zu\cos\tfrac{1}{2}y(1-u^2)\,du,\\
U_{\frac{3}{2}}(y,z) &= \sqrt{\frac{2y}{\pi}}\int_0^1 \cos zu\sin\tfrac{1}{2}y(1-u^2)\,du,
\end{aligned}$$

und aus (61):

$$U_{\frac{1}{2}}(y,z) = U_{\frac{1}{2}}(y,o)\cos\frac{z^2}{2y} - U_{\frac{3}{2}}(y,o)\sin\frac{z^2}{2y} + z\sqrt{\frac{2}{\pi y}}\int_0^1 \sin zu\sin\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du,$$

$$U_{\frac{3}{2}}(y,z) = U_{\frac{1}{2}}(y,o)\sin\frac{z^2}{2y} + U_{\frac{3}{2}}(y,o)\cos\frac{z^2}{2y} - z\sqrt{\frac{2}{\pi y}}\int_0^1 \sin zu\cos\frac{z^2}{2y}(1-u^2)\,du.$$

87. Fassen wir das erste dieser beiden Formelpaare näher ins Auge, so ist:

$$\cos zu \cos \tfrac{1}{2} y (1 - u^2) = \tfrac{1}{2} \cos(\tfrac{1}{2} y - \tfrac{1}{2} yu^2 - zu) + \tfrac{1}{2} \cos(\tfrac{1}{2} y - \tfrac{1}{2} yu^2 + zu),$$

$$\cos zu \sin \tfrac{1}{2} y (1 - u^2) = \tfrac{1}{2} \sin(\tfrac{1}{2} y - \tfrac{1}{2} yu^2 - zu) + \tfrac{1}{2} \sin(\tfrac{1}{2} y - \tfrac{1}{2} yu^2 + zu)$$

Man kann aber schreiben:

$$\tfrac{1}{2} y - \tfrac{1}{2} yu^2 - zu = \tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} - \frac{z^2}{2y}\left(1 + \frac{y}{z} u\right)^2 = \alpha - \zeta,$$

$$\tfrac{1}{2} y - \tfrac{1}{2} yu^2 + zu = \tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} - \frac{z^2}{2y}\left(1 - \frac{y}{z} u\right)^2 = \alpha - \zeta',$$

wenn man:

$$\frac{z^2}{2y}\left(1 + \frac{y}{z} u\right)^2 = \tfrac{1}{2} y \left(\frac{z}{y} + u\right)^2 = \zeta,$$

$$\frac{z^2}{2y}\left(1 - \frac{y}{z} u\right)^2 = \tfrac{1}{2} y \left(\frac{z}{y} - u\right)^2 = \zeta',$$

und:

$$\tfrac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} = \alpha$$

setzt. Man hat alsdann, um die obigen Integrale zu erhalten, die Ausdrücke:

$$\cos zu \cos \tfrac{1}{2} y (1 - u^2) = \tfrac{1}{2} \cos(\alpha - \zeta) + \tfrac{1}{2} \cos(\alpha - \zeta') = \tfrac{1}{2} \cos\alpha (\cos\zeta + \cos\zeta') + \tfrac{1}{2} \sin\alpha (\sin\zeta + \sin\zeta')$$

$$\cos zu \sin \tfrac{1}{2} y (1 - u^2) = \tfrac{1}{2} \sin(\alpha - \zeta) + \tfrac{1}{2} \sin(\alpha - \zeta') = \tfrac{1}{2} \sin\alpha (\cos\zeta + \cos\zeta') - \tfrac{1}{2} \cos a (\sin\zeta + \sin\zeta')$$

nach u von u = o bis u = 1 zu integriren. Es ist aber, wenn man:

$$\frac{z^2}{2y}\left(1 + \frac{y}{z}\right)^2 = \tfrac{1}{2} y \left(\frac{z}{y} + 1\right)^2 = \sigma$$

setzt, und beachtet, dass $\sigma > \frac{z^2}{2y}$ ist:

$$\int_0^1 \cos\zeta \, du = \frac{1}{\sqrt{2y}} \int_{\frac{z^2}{2y}}^{\sigma} \frac{\cos\zeta}{\sqrt{\zeta}} d\zeta = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{y}} \int_{\frac{z^2}{2y}}^{\sigma} I_{-\frac{1}{2}} d\zeta = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{y}} \left(\int_0^{\sigma} I_{-\frac{1}{2}} d\zeta - \int_0^{\frac{z^2}{2y}} I_{-\frac{1}{2}} d\zeta \right)$$

und ebenso:

$$\int_0^1 \sin\zeta\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\int_{\frac{z^2}{2y}}^{\sigma} I_{\frac{1}{2}}\,d\zeta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\left(\int_0^{\sigma} I_{\frac{1}{2}}\,d\zeta - \int_0^{\frac{z^2}{2y}} I_{\frac{1}{2}}\,d\zeta\right).$$

Was die Integrale, die ζ' enthalten, anlangt, so sind zwei Fälle, $y<z$ und $y>z$, zu unterscheiden.

Ist $y<z$, so hat man, wenn:

$$\frac{z^2}{2y}\left(1-\frac{y}{z}\right)^2 = \tfrac{1}{2}y\left(\frac{z}{y}-1\right)^2 = \delta$$

gesetzt wird, und mit Rücksicht darauf, dass $\delta < \frac{z^2}{2y}$ ist:

$$\int_0^1 \cos\zeta'\,du = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\int_{\frac{z^2}{2y}}^{\delta} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\int_{\delta}^{\frac{z^2}{2y}} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta' =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\left(\int_0^{\frac{z^2}{2y}} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta' - \int_0^{\delta} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta'\right)$$

und:

$$\int_0^1 \sin\zeta'\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\left(\int_0^{\frac{z^2}{2y}} I_{\frac{1}{2}}\,d\zeta' - \int_0^{\delta} I_{\frac{1}{2}}\,d\zeta'\right).$$

Ist dagegen $y>z$, so zerlegen wir wie folgt:

$$\int_0^1 \cos\zeta'\,du = \int_0^{\frac{z}{y}} \cos\zeta'\,du + \int_{\frac{z}{y}}^1 \cos\zeta'\,du,$$

und erhalten, wenn wir in dem ersten Integral:

$$\zeta'^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\sqrt{2y}}\left(1-\frac{y}{z}u\right),$$

in dem zweiten:

$$\zeta'^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\sqrt{2y}}\left(\frac{y}{z}u-1\right)$$

einführen:

$$\int_0^1 \cos\zeta'\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\left(-\int_{\frac{z^2}{2y}}^{0} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta' + \int_0^{\delta} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta'\right) =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\left(\int_0^{\frac{z^2}{2y}} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta' + \int_0^{\delta} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta'\right),$$

und ebenso:

$$\int_0^1 \sin\zeta'\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\left(\int_0^{\frac{z^2}{2y}} I_{\frac{1}{2}}\,d\zeta' + \int_0^{\delta} I_{\frac{1}{2}}\,d\zeta'\right).$$

88. Es ergibt sich also schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} U_{\frac{1}{2}}(y,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(A-A')\cos\alpha + (B-B')\sin\alpha\Big], \\ U_{\frac{3}{2}}(y,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(A-A')\sin\alpha - (B-B')\cos\alpha\Big], \end{aligned}\right\} \text{ für } y<z,$$

und:

$$\left.\begin{aligned} U_{\frac{1}{2}}(y,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(A+A')\cos\alpha + (B+B')\sin\alpha\Big], \\ U_{\frac{3}{2}}(y,z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(A+A')\sin\alpha - (B+B')\cos\alpha\Big], \end{aligned}\right\} \text{ für } y>z,$$

wo:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{\sigma} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta, \qquad A' = \tfrac{1}{2}\int_0^{\delta} I_{-\frac{1}{2}}\,d\zeta,$$

$$B = \tfrac{1}{2}\int_0^{\sigma} I_{\frac{1}{2}}\,d\zeta, \qquad B' = \tfrac{1}{2}\int_0^{\delta} I_{\frac{1}{2}}\,d\zeta,$$

$$\sigma = \frac{(y+z)^2}{2y}, \qquad \delta = \frac{(y-z)^2}{2y}, \qquad \alpha = \frac{y^2+z^2}{2y}$$

ist, welche drei Ausdrücke sich nicht ändern, wenn man $\frac{z^2}{y}$ statt y setzt.

89. Drücken wir hierin wieder (gemäss 76) die Fresnel'schen Integrale durch die Functionen $U_{\frac{1}{2}}$ und $U_{\frac{3}{2}}$ aus, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} U_{\frac{1}{2}}(y,z) &= -\tfrac{1}{2}\big(U_{\frac{1}{2}}(2\delta,0) - U_{\frac{1}{2}}(2\sigma,0)\big)\cos z + \tfrac{1}{2}\big(U_{\frac{3}{2}}(2\delta,0) + U_{\frac{3}{2}}(2\sigma,0)\big)\sin z, \\ U_{\frac{3}{2}}(y,z) &= -\tfrac{1}{2}\big(U_{\frac{1}{2}}(2\delta,0) + U_{\frac{1}{2}}(2\sigma,0)\big)\sin z - \tfrac{1}{2}\big(U_{\frac{3}{2}}(2\delta,0) - U_{\frac{3}{2}}(2\sigma,0)\big)\cos z, \end{aligned}\right\} \text{für } y<z,$$

und:

$$\left.\begin{aligned} U_{\frac{1}{2}}(y,z) &= \tfrac{1}{2}\big(U_{\frac{1}{2}}(2\delta,o)+U_{\frac{1}{2}}(2\sigma,o)\big)\cos z-\tfrac{1}{2}\big(U_{\frac{3}{2}}(2\delta,o)-U_{\frac{3}{2}}(2\sigma,o)\big)\sin z,\\ U_{\frac{3}{2}}(y,z) &= \tfrac{1}{2}\big(U_{\frac{1}{2}}(2\delta,o)-U_{\frac{1}{2}}(2\sigma,o)\big)\sin z+\tfrac{1}{2}\big(U_{\frac{3}{2}}(2\delta,o)+U_{\frac{3}{2}}(2\sigma,o)\big)\cos z\end{aligned}\right\}\text{für } y>z.$$

90. Wir erhalten ferner mit Rücksicht auf (76) durch $V_{\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{3}{2}}$, d. i. durch Gilbert'sche Integrale ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} U_{\frac{1}{2}}(y,z) &= \tfrac{1}{2}\big(V_{\frac{1}{2}}(2\delta,o)+V_{\frac{1}{2}}(2\sigma,o)\big)\sin z-\tfrac{1}{2}\big(V_{\frac{3}{2}}(2\delta,o)-V_{\frac{3}{2}}(2\sigma,o)\big)\cos z,\\ U_{\frac{3}{2}}(y,z) &= -\tfrac{1}{2}\big(V_{\frac{1}{2}}(2\delta,o)-V_{\frac{1}{2}}(2\sigma,o)\big)\cos z-\tfrac{1}{2}\big(V_{\frac{3}{2}}(2\delta,o)+V_{\frac{3}{2}}(2\sigma,o)\big)\sin z,\end{aligned}\right\}\text{für } y<z,$$

und:

$$\left.\begin{aligned} V_{\frac{1}{2}}(y,z) &= \tfrac{1}{2}\big(V_{\frac{1}{2}}(2\delta,o)+V_{\frac{1}{2}}(2\sigma,o)\big)\cos z+\tfrac{1}{2}\big(V_{\frac{3}{2}}(2\delta,o)-V_{\frac{3}{2}}(2\sigma,o)\big)\sin z,\\ V_{\frac{3}{2}}(y,z) &= -\tfrac{1}{2}\big(V_{\frac{1}{2}}(2\delta,o)-V_{\frac{1}{2}}(2\sigma,o)\big)\sin z+\tfrac{1}{2}\big(V_{\frac{3}{2}}(2\delta,o)+V_{\frac{3}{2}}(2\sigma,o)\big)\cos z,\end{aligned}\right\}\text{für } y>z,$$

woraus vermöge der Gleichungen:

$$U_{\frac{3}{2}}(y,z)-V_{\frac{3}{2}}(y,z)=\sin(\alpha+\tfrac{1}{4}\pi),\qquad U_{\frac{3}{2}}(y,z)-V_{\frac{1}{2}}(y,z)=-\cos(\alpha+\tfrac{1}{4}\pi)$$

noch andere Combinationen leicht zu bilden sind.

Da sich α, δ und σ bei Vertauschung von y mit $\frac{z^2}{y}$ nicht ändern, so stellen dieselben Formeln (88 bis 90) auch die Functionen $U_{\frac{1}{2}}\left(\frac{z^2}{y},z\right)$, $U_{\frac{3}{2}}\left(\frac{z^2}{y},z\right)$, $V_{\frac{1}{2}}\left(\frac{z^2}{y},z\right)$, $V_{\frac{3}{2}}\left(\frac{z^2}{y},z\right)$ dar, nur dass diejenigen Ausdrücke, welche dort für $y<z$ galten, hier für $y>z$ zu nehmen sind, und umgekehrt.

V. Abschnitt.

Beugung durch einen engen Spalt.

91. Geht die vom Lichtpunkt auf die Ebene des beugenden Schirmes gefällte Senkrechte durch die Mitte des Spaltes, und ist r dessen halbe Breite, so sind die Integrale C und S (4), durch deren Quadratsumme die Lichtstärke M^2 des Beugungsbildes dargestellt wird, zwischen den Grenzen $\varrho=-r$ und $\varrho=+r$ zu nehmen. Da für diese Grenzen die Integrale, welche wir oben (6) mit $\sigma_{\frac{1}{2}}$ und $\sigma'_{\frac{1}{2}}$ bezeichnet haben, verschwinden, so erhalten wir (9, 33):

$$C=r\sqrt{\tfrac{2\pi}{y}}\left(U_{\frac{1}{2}}(y,z)\cdot\cos\tfrac{1}{2}y+U_{\frac{3}{2}}(y,z)\cdot\sin\tfrac{1}{2}y\right),$$

$$S=r\sqrt{\tfrac{2\pi}{y}}\left(U_{\frac{1}{2}}(y,z)\cdot\sin\tfrac{1}{2}y-U_{\frac{3}{2}}(y,z)\cdot\cos\tfrac{1}{2}y\right),$$

worin:

$$y = kr^2, \qquad z = lr,$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a+b}{ab}, \qquad l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\xi}{b}$$

ist. Für die Lichtstärke ergibt sich demnach, wenn man die Breite 2r des Spaltes gleich 1 annimmt, der einfache Ausdruck:

$$M^2 = \frac{\pi}{2y}\left(U_{\frac{1}{2}}^2(y,z) + U_{\frac{3}{2}}^2(y,z)\right),$$

worin die Functionen $U_{\frac{1}{2}}$ und $U_{\frac{3}{2}}$ durch irgend eine der Formen, welche wir für dieselben in den vorhergehenden Abschnitten kennen gelernt haben, dargestellt werden.

92. Die Lichtstärke erscheint sonach als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen z und y, von welchen wir jene als Abscisse, diese als Ordinate eines rechtwinkligen Coordinatensystems (vergl. Fig. 1) auffassen, auf dessen zy-Ebene die zu jedem ihrer Punkte gehörige Lichtstärke als dritte Ordinate errichtet ist. In der Veränderlichen y spricht sich die Abhängigkeit der Lichterscheinung von der gegenseitigen Stellung des Lichtpunktes, des Beugungs- und des Auffangschirmes aus, während z nur von dem Beugungswinkel abhängt.

Der Intensitätsausdruck umfasst sowohl die Fresnel'schen als die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen, welche letztere als Grenzfall für $y = o$ aus ihm hervorgehen.

93. Dem Fraunhofer'schen Grenzfall entsprechen sonach die entlang unserer Abscissenaxe z gereihten Lichtstärken. Für $y = o$ aber ist (32):

$$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, I_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{\sin z}{z}, \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2y}} \cdot U_{\frac{3}{2}} = o.$$

Wir gelangen daher in diesem Fall zu dem Intensitätsausdruck:

$$M^2 = \frac{\pi}{2z}\left(I_{\frac{1}{2}}(z)\right)^2 = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2,$$

welcher zu bekannt ist, als dass hier eine eingehende Discussion desselben erforderlich wäre. Des nothwendigen Zusammenhangs wegen sei nur bemerkt, dass die Minima desselben, welche sämmtlich Null sind, für $z = \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$ (es sind dies die einzigen Punkte der zy-Ebene, in

welchen $U_{\frac{1}{2}}$ und $U_{\frac{3}{2}}$ gleichzeitig verschwinden, und die Lichtstärke somit Null ist) die Maxima aber bei denjenigen Werthen von z eintreten, welche der Gleichung:

$$z^{-\frac{1}{2}} I_{\frac{3}{2}}(z) = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} z = z$$

genügen, und sich mit wachsendem z den Werthen $\frac{2n+1}{2}\pi$ immer mehr nähern. Es ist demnach $M^2_{max} = \cos^2 z$.

In der Tab. IV sind die Werthe von $\sin z/z$ und $(\sin z/z)^2$ oder M^2 für alle ganzzahligen Werthe von z von $z = 0$ bis $z = 50$ angegeben; sie sind aus der Tab. I der Bessel'schen Functionen mit leichter Mühe zu erhalten, und ergaben sich bei Berechnung der letzteren gleichsam als Nebenproducte. Die Tab. IV a enthält noch besonders die Maximalwerthe.

94. Die Lichtstärke in der Mitte des Beugungsbildes, d. i. längs der y-Axe, für $z = 0$, wird ausgedrückt durch:

$$M^2 = \frac{\pi}{2y}\left(U^2_{\frac{1}{2}}(y, 0) + U^2_{\frac{3}{2}}(y, 0)\right).$$

Die numerischen Werthe von $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}(y, 0)$, $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}(y, 0)$, M^2 (Tab. V) sind, nachdem uns Tabellen der Fresnel'schen Integrale (Tab. III) sowie der Functionen $V_{\frac{1}{2}}(y, 0)$ und $V_{\frac{3}{2}}(y, 0)$ (Tab. XXII; vergl. oben 81) zu Gebote stehen, leicht zu berechnen, entweder mittels der Formeln (vergl. 76, 88):

$$U_{\frac{1}{2}}(y, 0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{1}{2}y \int_0^{\frac{1}{2}y} I_{-\frac{1}{2}}\, d\zeta + \sin\tfrac{1}{2}y \int_0^{\frac{1}{2}y} I_{\frac{1}{2}}\, d\zeta\right),$$

$$U_{\frac{3}{2}}(y, 0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sin\tfrac{1}{2}y \int_0^{\frac{1}{2}y} I_{-\frac{1}{2}}\, d\zeta - \cos\tfrac{1}{2}y \int_0^{\frac{1}{2}y} I_{\frac{1}{2}}\, d\zeta\right),$$

$$M^2 = \frac{\pi}{y}\left[\left(\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}y} I_{-\frac{1}{2}}\, d\zeta\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}y} I_{\frac{1}{2}}\, d\zeta\right)^2\right],$$

oder vermöge der Gleichungen:

$$U_{\frac{1}{2}}(y, 0) = V_{\frac{3}{2}}(y, 0) + \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\pi\right), \qquad U_{\frac{3}{2}}(y, 0) = V_{\frac{1}{2}}(y, 0) - \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

Die Tab. V enthält diese Werthe für alle ganzzahligen y von $y = o$ bis $y = 60$. Um für zwischenliegende Argumente die Functionswerthe zu finden, kann man entweder die zu den Fresnel'schen Integralen gehörigen Interpolationstafeln, oder, von der Tab. V selbst oder von der Tab. XXII ausgehend, die oben (in 57 und 78) gegebenen Interpolationsformeln benutzen, oder auch, wenn nur geringere Genauigkeit verlangt wird, die letztgenannte Tabelle linear interpoliren.

95. Längs der y-Axe wird der Ausdruck M^2 zu einem Maximum oder Minimum, wenn:

$$\frac{\partial M^2}{\partial y} = o$$

wird. Es ist aber:

$$\frac{\partial M^2}{\partial y} = -\frac{\pi}{2y^2}\left(U^2_{\frac{1}{2}}(y,o) + U^2_{\frac{3}{2}}y, o)\right) + \frac{\pi}{2y}\left(2U_{\frac{1}{2}}(y,o)\frac{\partial U_{\frac{1}{2}}(y,o)}{\partial y} + 2U_{\frac{3}{2}}(y,o)\cdot\frac{\partial U_{\frac{3}{2}}(y,o)}{\partial y}\right),$$

oder, da (vermöge 51):

$$\frac{\partial U_{\frac{1}{2}}(y,o)}{\partial y} = \tfrac{1}{2}U_{-\frac{1}{2}}(y,o), \qquad \frac{\partial U_{\frac{3}{2}}(y,o)}{\partial y} = \tfrac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(y,o)$$

ist:

$$\frac{\partial M^2}{\partial y} = -\frac{1}{y}M^2 + \frac{\pi}{2y}U_{\frac{1}{2}}(y,o)\left(U_{-\frac{1}{2}}(y,o) + U_{\frac{3}{2}}(y,o)\right),$$

oder endlich, weil (gemäss 52):

$$U_{-\frac{1}{2}}(y,o) + U_{\frac{3}{2}}(y,o) = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{2y}{\pi}}$$

ist:

$$\frac{\partial M^2}{\partial y} = \frac{1}{y}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}(y,o) - M^2\right).$$

Die Maxima und Minima von M^2 finden also statt, wenn:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}(y,o) = M^2$$

ist, also in den Durchschnittspunkten der Curven $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}(y,o)$ und M^2. Hat man der Tab. V einen Werth von y entnommen, welcher der Gleichung:

$$F(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}(y,o) - M^2 = o$$

angenähert entspricht, so ergibt sich eine weitere Annäherung, wenn man die Gleichung:

$$F(y+h) = F(y) + \frac{\partial F}{\partial y} h = o$$

nach h auflöst. Darin ist:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{-\frac{1}{2}}(y, o) - \frac{1}{2y}\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}(y, o) - \frac{\partial M^2}{\partial y}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\left(\frac{1}{y}\sqrt{\frac{2y}{\pi}} - U_{\frac{3}{2}}(y, o)\right) - \frac{3}{2y}\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}(y, o) + \frac{1}{y} M^2$$

$$= \frac{1}{y}\left(\tfrac{1}{2} + M^2\right) - \frac{3}{2y}\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}(y, o) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}(y, o).$$

Die bei den successiven Annäherungen erforderlichen abgeänderten Werthe von:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}(y, o), \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}(y, o), \qquad M^2$$

werden durch eine der vorhin angegebenen Interpolationsmethoden erlangt. Für die Maxima ist $\frac{\partial F}{\partial y}$ negativ, für die Minima positiv.

Auf diese Weise sind die in Tab. V a zusammengestellten Werthe der Maxima und Minima berechnet worden.

96. Zur numerischen Berechnung des allgemeinen Intensitätsausdrucks:

$$M^2 = \frac{\pi}{2y}\left(U^2_{\frac{1}{2}}(y, z) + U^2_{\frac{3}{2}}(y, z)\right)$$

sind die stets convergenten unendlichen Reihen:

$$U_{\frac{1}{2}}(y, z) = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{5}{2}} I_{\frac{5}{2}}(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{9}{2}} I_{\frac{9}{2}}(z) - + \ldots,$$

$$U_{\frac{3}{2}}(y, z) = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{3}{2}} I_{\frac{3}{2}}(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{7}{2}} I_{\frac{7}{2}}(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{11}{2}} I_{\frac{11}{2}}(z) - + \ldots$$

unter Benutzung der Tafel I der Bessel'schen Functionen bequem zu gebrauchen, solange $y \leqq z$, d. i. im Gebiete des geometrischen Schattens. Für $y > z$ bedienten wir uns unter Zuhilfenahme der Tabellen der Fresnel'schen Integrale und ihrer Interpolationstafeln (Tab. III) der in (88) für diesen Fall aufgestellten Formeln.

Es wurden auf diese Weise die Zahlenwerthe von

$$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}(y, z), \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}(y, z), \qquad M^2$$

für $y = 3, 6, 9, \ldots$ bis 30, und für alle ganzzahligen Werthe von z von $z = o$ bis $z = 12$ berechnet, und in den Tab. VI. bis XV. zusammengestellt.

In den Fig. 2 bis 11 ist auf Grund dieser Tabellen der Gang der Intensität M^2 graphisch dargestellt, und zwar ist überall 100 M^2 als Ordinate aufgetragen. Die punktirte Verticale in den Figuren 2 bis 5 gibt die Grenze des geometrischen Schattens ($y = z$) an.

97. Die Lichtstärke M^2 wird bei einem bestimmten Werthe von y zu einem Maximum oder Minimum für diejenigen Werthe von z, welche:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = o$$

machen.

Nun ist

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = \frac{\pi}{y}\left(U_{\frac{1}{2}}\frac{\partial U_{\frac{1}{2}}}{\partial z} + U_{\frac{3}{2}}\frac{\partial U_{\frac{3}{2}}}{\partial z}\right);$$

gemäss (39) aber hat man:

$$\frac{\partial U_{\frac{1}{2}}}{\partial z} = -\frac{z}{y}U_{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{\partial U_{\frac{3}{2}}}{\partial z} = -\frac{z}{y}U_{\frac{5}{2}},$$

folglich:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = -\frac{\pi z}{y^2}U_{\frac{3}{2}}(U_{\frac{1}{2}} + U_{\frac{5}{2}}),$$

oder, weil (zufolge 38):

$$U_{\frac{1}{2}} + U_{\frac{3}{2}} = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}$$

ist:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = -\frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}} z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}}.$$

Die Lichtstärke wird demnach zu einem Maximum oder Minimum, entweder wenn $z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}(z) = o$, oder wenn $y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}}(y, z) = o$ ist.

Da:

$$z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} = -\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}})}{\partial z}$$

und:

$$U_{\frac{3}{2}} = -\frac{y}{z}\frac{\partial U_{\frac{1}{2}}}{\partial z}$$

ist, so kann man auch sagen, dass die Lichtstärke ein Maximum oder Minimum wird, wenn entweder $z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(z)$, oder $U_{\frac{1}{2}}(y, z)$ ein Maximum oder Minimum wird.

98. Der Factor:

$$z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z$$

verschwindet, ausser wenn $z = o$ ist, für $z = \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$, d. i. für diejenigen Werthe von z, für welche im Fraunhofer'schen Grenzfall (auf der Abscissenaxe, Fig. 1) die Intensität Null ist.

Um die zu diesen Argumenten gehörigen Werthe von $\sqrt{\frac{\pi}{2y}} U_{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{\pi}{2y}} U_{\frac{3}{2}}$ und M^2 zu berechnen, wurden, ausgehend von den nächstgelegenen tabellarischen Werthen der U-Functionen (Tab. VI. bis XV.), die Formeln (42):

$$U_{\frac{1}{2}}(y, z + \varepsilon) = U_{\frac{1}{2}} - \frac{h}{2y} U_{\frac{3}{2}} + \left(\frac{h}{2y}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} U_{\frac{5}{2}} - \left(\frac{h}{2y}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} U_{\frac{7}{2}} + - \ldots,$$

$$U_{\frac{3}{2}}(y, z + \varepsilon) = U_{\frac{3}{2}} - \frac{h}{2y} \cdot U_{\frac{5}{2}} + \left(\frac{h}{2y}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} U_{\frac{7}{2}} - \left(\frac{h}{2y}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} U_{\frac{9}{2}} + - \ldots$$

angewendet, wo h sich aus der Gleichung:

$$h = 2\varepsilon z + \varepsilon^2$$

ergibt, und die Coefficienten $U_{\frac{5}{2}}$, $U_{\frac{7}{2}}$, $U_{\frac{9}{2}}$ u. s. f. successiv aus der Gleichung (38):

$$U_{\frac{2n+1}{2}} + U_{\frac{2n+5}{2}} = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{2n+1}{2}} I_{2n+1}$$

gefunden wurden.

99. Die zweite der vorstehenden Reihen wurde auch benutzt, um die Wurzelwerthe der Gleichung $U_{\frac{3}{2}}(y, z) = o$ zu finden, indem man, ausgehend von dem tabellarischen Werthe von $U_{\frac{3}{2}}$, welcher einem Nullwerth am nächsten kommt, die Gleichung:

$$U_{\frac{3}{2}}(y, z + \varepsilon) = o$$

nach h/2y auflöste, und, nachdem h bestimmt war, ε mittels der Gleichung:

$$\varepsilon^2 + 2z\varepsilon - h = o$$

berechnete. Aus der obigen Formel für $U_{\frac{1}{2}}(y, z + \varepsilon)$ wurde alsdann der zugehörige Werth von $U_{\frac{1}{2}}$ ermittelt, der zum Quadrat erhoben und mit $\pi/2y$ multiplicirt die zugehörige maximale oder minimale Lichtstärke liefert.

Die so (nach 98 und 99) berechneten Werthe von:

$$z, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}} \text{ und } M^2$$

wurden jeweils am Fusse der Tab. VI. bis XV. zusammengestellt.

100. Eine anschauliche Uebersicht über die Vertheilung der Maxima und Minima, und überhaupt über den Gang der Intensität im Beugungsbilde gewinnen wir, wenn wir die durch die Gleichungen:

$$z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}(z) = o, \qquad y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}}(y, z) = o$$

ausgedrückten zwei Liniensysteme in der zy-Ebene entwerfen (Fig. 1).

Die der ersteren Gleichung entsprechenden Linien sind Gerade, welche sich in den Punkten $z = \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$ auf der z-Axe senkrecht erheben.

Der zweiten Gleichung entsprechen transcendente Curven, von welchen vermöge der bereits berechneten und in den Tab. VI. bis XV. niedergelegten Wurzelwerthe der Gleichung $U_{\frac{3}{2}} = o$ eine Reihe von Punkten schon bekannt sind.

Sie treffen die z-Axe in den ebenfalls bereits ermittelten Punkten (Tab. IV a), welche der Gleichung:

$$I_{\frac{3}{2}}(z) = o \quad \text{oder} \quad tgz = z$$

Genüge leisten.

Der y-Axe begegnen sie in den Punkten, in welchen $U_{\frac{3}{2}}(y, o) = o$ oder (94):

$$\cos(\tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{4}\pi) = V_{\frac{1}{2}}(y, o)$$

ist. Da $V_{\frac{1}{2}}(y, o)$ immer positiv ist und mit wachsendem y gegen Null convergirt, so erkennt man, dass die Wurzeln dieser Gleichung denjenigen der Gleichung $\cos(\frac{1}{2} y + \frac{1}{4}\pi) = o$, also den Werthen $y = \frac{4m+5}{2}\pi$, immer näher kommen, je grösser y wird, und abwechselnd grösser und kleiner sind als diese. Genau findet man diese Werthe durch Auflösung der vorstehenden transcendenten Gleichung mit Hilfe der Tab. XXII. und der in (78) gegebenen Interpolationsformel, oder auch direct aus der Tab. V., indem man, ausgehend von demjenigen tabellarischen Argumente y, welches einem der Nullwerthe von $U_{\frac{3}{2}}(y, o)$ am nächsten kommt, die Gleichung (57):

$$U_{\frac{3}{2}}(y + h, o) = U_{\frac{3}{2}} + \frac{h}{2} U_{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{2 \cdot 4} U_{-\frac{1}{2}} + \frac{h^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot U_{-\frac{3}{2}} + \ldots = o,$$

wo die Coefficienten $U_{-\frac{1}{2}}$, $U_{-\frac{3}{2}}$... aus der Gleichung:

$$U_{-\frac{1}{2}-p-1} + U_{\frac{1}{2}-p+1} = (-1)^p \cdot \frac{1^{p|2}}{y^{p+1}} \sqrt{\frac{2y}{\pi}}$$

bestimmt werden, nach h auflöst. Es ergeben sich so die Werthe:

$$\begin{aligned} y_1 &= 8{,}393843, \\ y_2 &= 13{,}708882, \\ y_3 &= 20{,}770008, \\ y_4 &= 26{,}392951, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welche auch am Fusse der Tab. V. aufgeführt sind.

101. Da $V_{\frac{1}{2}}(y, z)$ ebenso wie $V_{\frac{3}{2}}(y, z)$ bei unverändertem z und unbegrenzt wachsendem y immer mehr gegen Null rückt[1]), so nähert sich vermöge der Beziehung:

$$U_{\frac{3}{2}}(y, z) = V_{\frac{1}{2}}(y, z) - \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} + \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

die Function $U_{\frac{3}{2}}(y, z)$ um so mehr dem Werthe $-\cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} + \frac{1}{4}\pi\right)$, je grösser y wird. Für hinreichend grosse y kann daher die Gleichung $U_{\frac{3}{2}}(y, z) = o$ durch die andere:

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} + \tfrac{1}{4}\pi\right) = o$$

annähernd ersetzt werden, welche zeigt, dass für $y > z$ (d. i. in demjenigen Gebiete unserer Fig. 1, welches den direct beleuchteten Theilen des Beugungsbildes entspricht) die Zweige der transcendenten Curve $U_{\frac{3}{2}}(y, z) = o$ den Kreislinien:

$$y^2 + z^2 = \frac{4m+5}{2}\pi y,$$

welche von den Punkten $y = (m + \frac{5}{4})\pi$ der y-Axe aus mit den Radien $(m + \frac{5}{4})\pi$ beschrieben sind, um so näher kommen, je grösser y wird.

---

1) Man erkennt dies aus den Gleichungen (90, $y > z$); denn bei wachsendem y werden $2\sigma = y + \frac{z^2}{y} + 2z$ und $2\delta = y + \frac{z^2}{y} - 2z$ immer grösser, und sonach $V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, o)$, $V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o)$, $V_{\frac{3}{2}}(2\sigma, o)$, $V_{\frac{3}{2}}(2\delta, o)$ dem absoluten Werthe nach immer kleiner.

Gestützt auf dieses Verhalten können wir daher die Zeichnung Fig. 1 nach der Richtung der wachsenden y durch elementare Construction angenähert richtig beliebig weit fortsetzen, wie dies in Fig. 17 in kleinerem Massstabe geschehen ist.

102. Weiteren Aufschluss über den Verlauf unserer Curven erhalten wir durch Ermittelung des Winkels, unter welchem die Berührende in jedem ihrer Punkte gegen die Coordinatenaxen geneigt ist.

Durch Differentiation der Gleichung $y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}}(y, z) = o$ erhält man:

$$\frac{\partial(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial y} dy + \frac{\partial(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial z} dz = o,$$

woraus mit Rücksicht darauf, dass:

$$\frac{\partial U_{\frac{3}{2}}}{\partial y} = \frac{1}{2} U_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{y^2} U_{\frac{5}{2}}, \quad \frac{\partial U_{\frac{3}{2}}}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_{\frac{5}{2}}, \quad U_{\frac{3}{2}} = o$$

ist:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \frac{z}{y} U_{\frac{5}{2}}}{U_{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{y^2} U_{\frac{5}{2}}}$$

hervorgeht. Für $z = o$ ergibt sich hieraus, da $U_{\frac{1}{2}}(y, o)$ in den Punkten $y_1, y_2, y_3, \ldots$, in welchen $U_{\frac{3}{2}}(y, o)$ Null ist, nicht verschwindet:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial z}\right]_{z=o} = o,$$

d. h. die Zweige der transcendenten Curve $U_{\frac{3}{2}}(y, z) = o$ schneiden die y-Axe rechtwinkelig.

Da ferner:

$$\frac{\partial(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial z} = -z y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{5}{2}} = -z^{-\frac{3}{2}} I_{\frac{5}{2}} + y^2 z^{-\frac{7}{2}} I_{\frac{9}{2}} - + \ldots,$$

und:

$$\frac{\partial(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z^{-\frac{3}{2}} I_{\frac{3}{2}} - y^2 z^{-\frac{7}{2}} I_{\frac{7}{2}} + y^4 z^{-\frac{11}{2}} I_{\frac{11}{2}} - + \ldots\right)$$

$$= -2yz^{-\frac{7}{2}} I_{\frac{7}{2}} + 4y^3 z^{-\frac{11}{2}} I_{\frac{11}{2}} - + \ldots$$

ist, so hat man für $y = o$:

$$\left[\frac{\partial(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial z}\right]_{y=o} = -z^{-\frac{3}{2}} I_{\frac{5}{2}}, \qquad \left[\frac{\partial(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial y}\right]_{y=o} = o,$$

folglich, da $I_{\frac{3}{2}}$ für diejenigen Werthe von z, welche $I_{\frac{1}{2}} = o$ machen, nicht verschwindet:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{y=o} = o,$$

d. h. die transcendenten Curvenäste stehen senkrecht zur Abscissenaxe (z) in den Punkten, welche der Gleichung $I_{\frac{1}{2}}(z) = o$ genügen.

103. Wird die Gleichung:

$$\frac{\partial U_{\frac{3}{2}}}{\partial z} + \frac{\partial U_{\frac{3}{2}}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = o$$

unter der Voraussetzung, dass $\frac{\partial y}{\partial z} = o$ wird, nochmals nach z differentiirt, so ergibt sich:

$$-\frac{1}{y} U_{\frac{5}{2}} + \frac{z^2}{y^2} U_{\frac{7}{2}} + \left(\tfrac{1}{2} U_{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{y^2} U_{\frac{5}{2}}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = o.$$

Für die Punkte $y_1, y_2, y_3 \ldots$ der y-Axe, wo $z = o$ ist, folgt hieraus

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right]_{z=o} = \frac{2}{y} \cdot \frac{U_{\frac{5}{2}}(y, o)}{U_{\frac{1}{2}}(y, o)}.$$

Da (gemäss 52):

$$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{5}{2}}(y, o) = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}(y, o),$$

und, wie aus den Gleichungen (68):

$$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}(y, o) = \int_o^1 \cos \tfrac{1}{2} y (1 - u^2)\, du, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}(y, o) = \int_o^1 \sin \tfrac{1}{2} y (1 - u^2)\, du$$

erkannt wird, $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}(y, o)$ ebenso wie $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}(y, o)$ stets kleiner als 1 ist, so ist $U_{\frac{5}{2}}(y, o)$ stets positiv, und $[\partial^2 y / \partial z^2]_{z=o}$ hat sonach das nämliche Vorzeichen wie der Werth $U_{\frac{1}{2}}(y, o)$, welcher in den Punkten $y_1, y_2, y_3, \ldots$ abwechselnd negativ und positiv ist[1]). Man sieht also, dass der 1., 3., 5., ... Curvenzweig, da wo sie die y-Axe treffen, nach unten (nach dem Coordinatenanfang zu) concav, der 2., 4., 6., ... nach unten convex sind.

Differentiirt man ebenso die Gleichung:

$$\frac{\partial (y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial y} + \frac{\partial (y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = o$$

1) Der Ausdruck $U_{\frac{1}{2}}(y, o) = V_{\frac{3}{2}}(y, o) + \sin(\frac{1}{2} y + \frac{1}{4}\pi)$ lässt dies nach dem, was über den Gang der Werthe von $V_{\frac{3}{2}}(y, o)$ gelehrt worden, leicht erkennen.

unter der Annahme, dass $\frac{\partial z}{\partial y} = o$ wird, nochmals nach y, so erhält man zunächst:

$$\frac{\partial^2(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial y^2} + \frac{\partial(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = o$$

und daraus, weil (zufolge 102):

$$\frac{\partial(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial z} = -z^{-\frac{3}{2}} I_{\frac{5}{2}} + y^2 z^{-\frac{7}{2}} I_{\frac{9}{2}} - + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2(y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}})}{\partial y^2} = -2z^{-\frac{7}{2}} I_{\frac{7}{2}} + 12y^2 z^{-\frac{11}{2}} I_{\frac{11}{2}} - + \ldots$$

ist, für $y = o$:

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{y=o} = -\frac{2}{z^2} \cdot \frac{I_{\frac{7}{2}}}{I_{\frac{5}{2}}}.$$

Nun ist aber in den Punkten der z-Axe, in welchen sich die Zweige der Curve $y^{-\frac{3}{2}} U_{\frac{3}{2}} = o$ erheben, $I_{\frac{3}{2}} = o$. Aus der Gleichung (20):

$$I_{\frac{7}{2}} = \frac{5}{z} I_{\frac{5}{2}} - I_{\frac{3}{2}}$$

ergibt sich demnach für diese Punkte:

$$I_{\frac{7}{2}} = \frac{5}{z} I_{\frac{5}{2}},$$

und demnach:

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{y=o} = -\frac{10}{z^3}.$$

Der stets negative Werth dieses Ausdrucks zeigt, dass sämmtliche Curvenäste, welche in den Punkten $I_{\frac{3}{2}} = o$ senkrecht von der z-Axe aufsteigen, dem Coordinatenanfang ihre concave Seite zuwenden.

104. Die Entscheidung, welche von den Wurzelwerthen der Gleichungen $I_{\frac{1}{2}} = o$ und $U_{\frac{3}{2}} = o$ Maximis oder Minimis der Lichtstärke entsprechen, ergibt sich aus der Betrachtung des zweiten Differentialquotienten von M^2 nach z. Man hat aber:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2} = -\frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}}\left(z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} \frac{\partial U_{\frac{3}{2}}}{\partial z} + U_{\frac{3}{2}} \frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}})}{\partial z}\right),$$

oder, da:

$$\frac{\partial U_{\frac{3}{2}}}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_{\frac{5}{2}}, \qquad \frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}})}{\partial z} = z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}$$

ist:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2} = \frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{z^{\frac{3}{2}}}{y} I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{5}{2}} - z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}}\right).$$

Daraus folgt, dass über den Geraden $I_{\frac{1}{2}} = o$ Maxima oder Minima liegen, je nachdem:

$$z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}} \quad \text{oder} \quad U_{\frac{3}{2}} \cos z$$

positiv oder negativ ist.

Ueber den Curvenzweigen $U_{\frac{3}{2}} = o$ dagegen liegen Maxima oder Minima, je nachdem:

$$z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{5}{2}} \quad \text{oder} \quad U_{\frac{5}{2}} \sin z$$

negativ oder positiv ist.

105. Der zweite Differentialquotient von M^2 wird Null für diejenigen Werthe von y und z, für welche $I_{\frac{1}{2}}$ und $U_{\frac{3}{2}}$ gleichzeitig verschwinden. In diesem Falle aber wird der dritte Differentialquotient von M^2, nämlich:

$$\frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3} = \frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}}\left(z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}} + \frac{z^{\frac{1}{2}}}{y} I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{5}{2}} + \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{y} I_{-\frac{1}{2}} U_{\frac{5}{2}} - \frac{z^{\frac{5}{2}}}{y^2} I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{7}{2}}\right)$$

nicht Null, sondern nimmt den Werth:

$$\left[\frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3}\right] = 2\pi \frac{z^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{5}{2}}} I_{-\frac{1}{2}} U_{\frac{5}{2}},$$

oder, weil:

$$U_{\frac{1}{2}} + U_{\frac{5}{2}} = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}$$

und daher für $I_{\frac{1}{2}} = o$:

$$U_{\frac{5}{2}} = -U_{\frac{1}{2}}$$

ist, den Werth:

$$\left[\frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3}\right] = -2\pi \frac{z^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{5}{2}}} I_{-\frac{1}{2}} U_{\frac{1}{2}}$$

an, welcher (ausser für $z = o$) von Null nothwendig verschieden, weil (vergl. 97) $z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}$ und $U_{\frac{1}{2}}$ mit $I_{\frac{1}{2}}$ und resp. $U_{\frac{3}{2}}$ nicht gleichzeitig Null sein können (88), sondern sich jetzt gerade in ihrem Maximum oder Minimum befinden. Es ergibt sich sonach, dass über jedem Durchschnittspunkt der beiden Liniensysteme $I_{\frac{1}{2}} = o$ und $U_{\frac{3}{2}} = o$ ein Wendepunkt der Intensitätscurve liegt.

106. Geht man längs einer der Geraden $I_{\frac{1}{2}} = o$ (Fig. 1) über einen ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve $U_{\frac{3}{2}} = o$ weg, so wechselt das Vorzeichen von $U_{\frac{3}{2}}$, nicht aber dasjenige von $I_{-\frac{1}{2}}$. Es wechselt demnach hier auch das Vorzeichen des Ausdrucks:

$$I_{-\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}},$$

welches (gemäss 104) über Maximum und Minimum entscheidet. Befinden sich also über dieser Geraden diesseits ihres Schnittpunktes mit der Curve $U_{\frac{3}{2}} = 0$ Maxima der Lichtstärke, so liegen jenseits Minima, und umgekehrt.

Schreitet man ferner längs einem Stücke der Curve $U_{\frac{3}{2}} = 0$ fort über einen ihrer Schnittpunkte mit einer der Geraden $I_{\frac{1}{2}} = 0$, so wechselt das Vorzeichen von $I_{\frac{1}{2}}$, nicht aber dasjenige von $U_{\frac{5}{2}}$, weil für $I_{\frac{1}{2}} = 0$ die Gleichung $U_{\frac{5}{2}} = -U_{\frac{1}{2}}$ gilt, und $U_{\frac{1}{2}}$ wegen $U_{\frac{3}{2}} = 0$ in diesen Punkten zu einem Maximum oder Minimum wird. In den Schnittpunkten tritt demnach auch ein Zeichenwechsel des Ausdrucks:

$$I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{5}{2}}$$

ein, welcher in diesem Falle (104) durch sein Vorzeichen die Maxima von den Minimis unterscheidet, und folglich ein Uebergang von grössten zu kleinsten Werthen der Lichtstärke, oder umgekehrt; in diesen Durchschnittspunkten also, mag man sie längs der Geraden $I_{\frac{1}{2}} = 0$ oder längs der Curven $U_{\frac{3}{2}} = 0$ überschreiten, springt das Maximum (oder Minimum) der Lichtstärke von der Linie der einen Gattung auf die Linie der anderen Gattung über.

107. Der zweite Differentialquotient von M^2 verschwindet ferner noch, wenn nebst $U_{\frac{3}{2}} = 0$ auch noch $U_{\frac{5}{2}} = 0$ ist, also in den Schnittpunkten der beiden durch diese Gleichungen dargestellten Curven. Da alsdann auch:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2\frac{z}{y} U_{\frac{5}{2}}}{U_{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{y^2} U_{\frac{5}{2}}} = 0$$

ist, so entsprechen diese Punkte denjenigen Maximal- oder Minimalwerthen der Ordinaten der Curvenzweige $U_{\frac{3}{2}} = 0$, welche nicht auf der y-Axe liegen (denn dort ist ja $U_{\frac{5}{2}}(y, 0)$ stets positiv).

Auch diese Punkte sind, weil für $U_{\frac{3}{2}} = 0$ und $U_{\frac{5}{2}} = 0$ der dritte Differentialquotient von M^2 nicht verschwindet, sondern:

$$\left[\frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3}\right] = -\frac{\pi}{y^{\frac{7}{2}}} z^{\frac{5}{2}} I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{7}{2}},$$

wird, Wendepunkte der Intensitätscurve. Da für $I_{\frac{1}{2}} = 0$, d. i. für $z = (n+1)\pi$, $U_{\frac{5}{2}} = -U_{\frac{1}{2}}$, und sonach:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 2\frac{(n+1)\pi y^{-1}}{(n+1)\pi y^{-1})^2 - 1}$$

nicht Null ist, so sieht man, dass keiner dieser letzteren Wendepunkte auf einer der Geraden $I_{\frac{1}{2}} = 0$ liegen, und demnach auch nicht mit einem Wendepunkt der vorigen Art zusammenfallen kann. Da ferner in diesen Punkten $U_{\frac{5}{2}}$ sein Vorzeichen ändert, $I_{\frac{1}{2}}$ dagegen nicht, so erfährt hier der Ausdruck $I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}}$, dessen Vorzeichen das Merkmal für Maximum und Minimum ist, ebenfalls einen Zeichenwechsel. Die Gipfelpunkte der Curvenzweige $U_{\frac{3}{2}} = 0$ bilden also auf diesen Curven selbst die Grenzscheide zwischen Maximis und Minimis der Lichtstärke.

In der Fig. 1 sind zwei solche Gipfelpunkte, auf dem zweiten und auf dem vierten Curvenzweig, wahrzunehmen.

108. Wenn $y<z$ ist, so ist für $z = (n+1)\pi$ (gemäss 90):

$$U_{\frac{3}{2}} = (-1)^n \tfrac{1}{2} \left(V_{\frac{1}{2}}(2\delta, 0) - V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, 0) \right),$$

also niemals Null. Wendepunkte der ersten Art kann es also im Schattengebiet ($y<z$) nicht geben, sondern die Geraden $z = (n+1)\pi$ behalten ihre Eigenschaft als Orte der Intensitätsminima, mit welcher sie sich von der z-Axe erheben, durch den ganzen Schattenraum und auch noch an der Schattengrenze ($y = z$) selbst bei.

Daraus folgt weiter, dass ebendaselbst die Curvenzweige $U_{\frac{3}{2}} = 0$ durchaus Träger von Intensitätsmaximis sind, dass folglich Wendepunkte der zweiten Art weder im Schattengebiet noch an der Schattengrenze vorhanden sind.

Die Wendepunkte der einen und der anderen Art können also nur innerhalb des direct beleuchteten Theils des Beugungsbildes vorkommen.

Da für diesen Theil $y>z$, also längs den Geraden $I_{\frac{1}{2}} = 0$ $y>(n+1)\pi$ ist, so wird hier der obige Ausdruck für $\partial y/\partial z$ negativ, und zeigt sonach, dass die Wendepunkte der ersten Art nur auf absteigenden Aesten der Curve $U_{\frac{3}{2}} = 0$ liegen können.

109. Der zweite Differentialquotient von M^2 (104) wird endlich noch Null in den Punkten $y_1, y_2, y_3, \ldots$ der Ordinatenaxe (100), weil daselbst $z = 0$ und $U_{\frac{3}{2}}(y, 0) = 0$ ist. Da für diese Werthe auch der dritte Differentialquotient (105) verschwindet, nicht aber der vierte:

$$\frac{\partial^4 M^2}{\partial z^4} = \frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}} \left(z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}} - \frac{3z^{\frac{1}{2}}}{y} U_{\frac{3}{2}} [z I_{\frac{1}{2}} - I_{-\frac{1}{2}}] - \frac{3z^{\frac{3}{2}}}{y^2} U_{\frac{7}{2}} [I_{\frac{1}{2}} + z I_{-\frac{1}{2}}] + \frac{z^{\frac{7}{2}}}{y^3} I_{\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}} \right),$$

welcher vielmehr den stets positiven Werth (vergl. 103):

$$\left[\frac{\partial^4 M^2}{\partial z^4}\right] = \frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{3}{y} z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}}\right]_{z=0} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{y^{\frac{5}{2}}} U_{\frac{5}{2}}(y, o)$$

annimmt, so ist die Lichtstärke in allen diesen Punkten ein Minimum.

110. In allen übrigen Punkten der Ordinatenaxe dagegen, wo $U_{\frac{3}{2}}(y, o)$ nicht Null ist, wird die Gleichung:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = o$$

erfüllt, ohne dass gleichzeitig der zweite Differentialquotient von M^2 verschwindet. Derselbe erlangt vielmehr den Werth:

$$\left[\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2}\right]_{z=o} = -\frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}}\left[z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}}\right]_{z=o} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{y^{\frac{3}{2}}} U_{\frac{3}{2}}(y, o),$$

und zeigt, dass die Lichtstärke in der Bildmitte ein Maximum ist von $y = o$ bis $y = y_1$, von $y = y_2$ bis $y = y_3$, von $y = y_4$ bis $y = y_5$ u. s. f., ein Minimum dagegen für die dazwischen liegenden Strecken der y-Axe. In den Punkten $y_1, y_2, y_3 \ldots$ selbst aber ist die Lichtstärke stets Minimum, wie oben gezeigt worden [1]).

Die Maxima und Minima der Intensität längs der y-Axe, welche wir oben (95; Tab. V a) kennen gelernt haben, sind die grössten Maxima und die kleinsten Minima, welche in der Bildmitte vorkommen; sie fallen zwischen die Punkte $y_1, y_2, y_3, \ldots$.

111. Hiemit sind die Orte sämmtlicher Maxima und Minima über die ganze zy-Ebene unzweideutig bestimmt. Um ein anschauliches Bild von ihrer Vertheilung zu geben und den Ueberblick über die verwickelten Gesetze der Erscheinung zu erleichtern, sind in der Fig. 1 diejenigen Stücke der Linien $I_{\frac{1}{2}} = o$ und $U_{\frac{3}{2}} = o$, welche den Minimis der Lichtstärke entsprechen, stärker ausgezogen, als diejenigen, über welchen die Maxima liegen. Denkt man sich eine zur z-Axe parallele Gerade über die Zeichnung weggleitend, so gibt dieselbe durch ihre Schnittpunkte mit diesen Linien die Orte der Maxima, der Minima und der Wendepunkte der Intensität an.

---

1) Hiedurch ist ein Irrthum Gilbert's (l. c. p. 31) berichtigt, welcher angibt, dass an diesen Stellen die Intensität „ni maximum, ni minimum" sei.

112. Denken wir uns in dieser Fig. 1 durch den Coordinatenanfang gerade Linien $y = cz$ gezogen, so lassen sich hinsichtlich der entlang diesen Geraden stattfindenden Intensitäten ähnliche Betrachtungen anstellen, wie bei den Beugungserscheinungen der kreisförmigen Oeffnung (§ 66 und 67 der vorigen Abhandlung), welche deshalb hier nicht wiederholt zu werden brauchen.

Unter diesen Geraden, zu welchen auch die y- und die z-Axe selbst gehören, ist besonders ausgezeichnet die Gerade $y = z$, welche der Grenze des geometrischen Schattens entspricht. Sie ist in Fig. 1 punktirt eingezeichnet.

Entlang der Schattengrenze hat man:

$$M^2 = \frac{\pi}{2z}\left(U^2_{\frac{1}{2}}(z, z) + U^2_{\frac{3}{2}}(z, z)\right),$$

oder, weil für $y = z$:

$$\sigma = 2z, \qquad \delta = 0, \qquad U_{\frac{1}{2}}(0, 0) = 0, \qquad U_{\frac{3}{2}}(0, 0) = 0$$

und daher zufolge (89):

$$U_{\frac{1}{2}}(z, z) = \tfrac{1}{2} U_{\frac{1}{2}}(4z, 0) \cdot \cos z + \tfrac{1}{2} U_{\frac{3}{2}}(4z, 0) \cdot \sin z,$$

$$U_{\frac{3}{2}}(z, z) = -\tfrac{1}{2} U_{\frac{1}{2}}(4z, 0) \cdot \sin z + \tfrac{1}{2} U_{\frac{3}{2}}(4z, 0) \cdot \cos z$$

ist:

$$M^2 = \frac{\pi}{8z}\left(U^2_{\frac{1}{2}}(4z, 0) + U^2_{\frac{3}{2}}(4z, 0)\right).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit demjenigen, welcher die Lichtstärke in der Mitte des Beugungsbildes ausdrückt, nämlich mit (94):

$$M^2 = \frac{\pi}{2y}\left(U^2_{\frac{1}{2}}(y, 0) + U^2_{\frac{3}{2}}(y, 0)\right),$$

so erkennt man, dass die Intensität längs der Schattengrenze dasselbe Gesetz befolgt wie entlang der y-Axe, und ihre Werthe dort für $z = 1, 2, 3, \ldots$ die nämlichen sind, wie hier für $y = 4, 8, 12, \ldots$, folglich in der Tab. V. bereits enthalten sind.

Die Vergleichung dieser beiden Intensitätsausdrücke zeigt ferner, da y dem Quadrate der Spaltbreite proportional ist, dass am Schattenrande die Lichtstärke ebenso gross ist als diejenige, welche bei unveränderter Lage von Lichtpunkt und Bildebene ein Spalt von doppelter Breite in der Mitte des Bildes hervorbringen würde.

VI. Abschnitt.

Beugung durch einen schmalen Streifen.

113. Bezeichnet r die halbe Breite des Streifens, und geht die vom Lichtpunkt auf die Ebene des Streifens gefällte Senkrechte durch dessen Mitte, so hat man die Integrale C und S (4) einerseits von $-\infty$ bis $-r$, andrerseits von $+r$ bis $+\infty$ zu erstrecken. Da die Theilintegrale $\sigma_{\frac{1}{2}}$ und $\sigma'_{\frac{1}{2}}$ (6) für diese Grenzen verschwinden, und die Theilintegrale $\gamma_{\frac{1}{2}}$ und $\gamma'_{\frac{1}{2}}$ von $-\infty$ bis $-r$ genommen offenbar denselben Werth erhalten wie von $+r$ bis $+\infty$, so ergibt sich (12, 33):

$$C = -r\sqrt{\frac{2\pi}{y}}\left(V_{\frac{1}{2}}(y,z)\cdot\sin\tfrac{1}{2}y + V_{\frac{3}{2}}(y,z)\cdot\cos\tfrac{1}{2}y\right),$$

$$S = r\sqrt{\frac{2\pi}{y}}\left(V_{\frac{1}{2}}(y,z)\cdot\cos\tfrac{1}{2}y - V_{\frac{3}{2}}(y,z)\cdot\sin\tfrac{1}{2}y\right),$$

worin y und z die nämliche Bedeutung haben wie bisher (91).

Die Lichtstärke $M^2 = C^2 + S^2$ in irgend einem Punkte des Beugungsbildes ist demnach im gegenwärtigen Falle, wenn wir analog wie vorher die Breite 2r des Streifens gleich 1 annehmen:

$$M^2 = \frac{\pi}{2y}\left(V^2_{\frac{1}{2}}(y,z) + V^2_{\frac{3}{2}}(y,z)\right).$$

114. Da die absoluten Werthe von $V_{\frac{1}{2}}(y,o)$ und $V_{\frac{3}{2}}(y,o)$ mit wachsendem y stetig abnehmen, so kann die Intensität längs der y-Axe:

$$M^2 = \frac{\pi}{2y}\left(V^2_{\frac{1}{2}}(y,o) + V^2_{\frac{3}{2}}(y,o)\right)$$

keine Maxima und Minima besitzen, sondern nimmt mit wachsendem y unaufhörlich ab.

Die numerischen Werthe von $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{1}{2}}(y,o)$, $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{3}{2}}(y,o)$ und M^2 waren, nachdem die Tab. XXII. zu Gebote stand, leicht zu erhalten; sie sind in Tab. XVI. für alle ganzzahligen Werthe des Arguments y von $y = o$ bis $y = 60$ aufgeführt.

Etwa verlangte Zwischenwerthe erhält man, wenn nur geringere Genauigkeit verlangt wird, aus der Tab. XVI. selbst durch lineare Interpolation, und völlig genau durch das oben (78) bereits angegebene Interpolationsverfahren.

115. Da in den Tab. VI. bis XV. die Zahlenwerthe von $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}(y, z)$ und $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}(y, z)$ von $z = o$ bis $z = 12$ für $y = 3, 6, 9 \ldots$ bis 30 bereits vorliegen, so konnten diejenigen von $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{1}{2}}(y, z)$ und $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{3}{2}}(y, z)$ mit Hilfe der Gleichungen:

$$V_{\frac{1}{2}}(y, z) = U_{\frac{3}{2}}(y, z) + \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

$$V_{\frac{3}{2}}(y, z) = U_{\frac{1}{2}}(y, z) - \sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} + \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

leicht gefunden werden. Dieselben sind nebst den zugehörigen Werthen der Intensität:

$$M^2 = \frac{\pi}{2y}\left(V^2_{\frac{1}{2}}(y, z) + V^2_{\frac{3}{2}}(y, z)\right)$$

in den Tab. XVII. bis XX. niedergelegt, jedoch nur für die Werthe $y = 3, 6, 9, 12$. Die Intensitätswerthe sind ausserdem noch in den Fig. 13 bis 16 graphisch dargestellt, und zwar ist in den Fig. 13 und 14 $10\,M^2$, in den Fig. 15 und 16 $100\,M^2$ als Ordinate aufgetragen.

116. Da $U_{\frac{1}{2}}$ und $U_{\frac{3}{2}}$ mit wachsendem z gegen Null rücken (vergl. 96), so nähern sich gleichzeitig, wie aus vorstehenden Gleichungen ersichtlich ist, $V_{\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{3}{2}}$ immer mehr den Ausdrücken:

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} + \tfrac{1}{4}\pi\right), \qquad -\sin\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

und die Lichtstärke selbst dem Werthe:

$$[M^2]_{z=\infty} = \frac{\pi}{2y}.$$

Dieser Ausdruck, dessen jeweiliger Werth am Kopfe der Tab. XVII. bis XX. angeführt ist, gibt aber die volle Lichtstärke an, welche bei Abwesenheit des beugenden Streifens auf der Bildebene herrschen würde.

Die Lichtstärke der ganzen ungehemmten Welle ergibt sich nämlich als Summe der Quadrate der beiden Integrale (vergl. 5, 34):

$$C = \sqrt{2\pi}\int_0^\infty (l\varrho)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(l\varrho)\cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2\,d\varrho = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\sin\left(\frac{l^2}{2k}+\tfrac{1}{4}\pi\right),$$

$$S = \sqrt{2\pi}\int_0^\infty (l\varrho)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(l\varrho)\sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2\,d\varrho = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\cos\left(\frac{l^2}{2k}+\tfrac{1}{4}\pi\right)$$

in folgender Gestalt:

$$[M^2]_\infty = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi r^2}{kr^2},$$

oder, wenn man wie bisher $kr^2 = y$ und 1 statt 2r setzt:

$$[M^2]_\infty = \frac{\pi}{2y}.$$

Die Interferenzstreifen verlieren sich demnach mit wachsendem Beugungswinkel immer mehr in der vollen Beleuchtung.

117. Maxima und Minima der Lichtstärke finden statt, wenn:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = \frac{\pi}{y}\left(V_{\frac{1}{2}}\frac{\partial V_{\frac{1}{2}}}{\partial z} + V_{\frac{3}{2}}\frac{\partial V_{\frac{3}{2}}}{\partial z}\right) = 0$$

ist. Man hat aber (gemäss 40):

$$\frac{\partial V_{\frac{1}{2}}}{\partial z} = -\frac{z}{y}V_{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial V_{\frac{3}{2}}}{\partial z} = -\frac{z}{y}V_{\frac{1}{2}},$$

und demnach:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = -\frac{\pi z}{y^2}V_{\frac{1}{2}}(V_{-\frac{1}{2}} + V_{\frac{3}{2}}),$$

oder, da (zufolge 38):

$$V_{-\frac{1}{2}} + V_{\frac{3}{2}} = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}$$

ist:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = -\frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}} z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} V_{\frac{1}{2}}.$$

Die Lichtstärke wird also zu einem Maximum oder Minimum, entweder wenn $z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} = 0$, oder wenn $V_{\frac{1}{2}} = 0$ ist, oder auch, weil:

$$z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} = -\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}})}{\partial z}, \qquad V_{\frac{1}{2}} = -\frac{y}{z}\frac{\partial V_{\frac{3}{2}}}{\partial z}$$

ist, wenn entweder $z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}$ oder wenn $V_{\frac{3}{2}}$ zu einem Maximum oder Minimum wird.

118. Der ersteren Gleichung:

$$z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} = o, \quad \text{oder} \quad \sin z = o,$$

welche dem gegenwärtigen Fall mit dem vorigen gemeinsam ist, genügen die Werthe $z = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$. Da für dieselben Argumente die Werthe von $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}$ bereits bekannt sind (Tab. VI bis XV), so ergeben sich diejenigen von $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, V_{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, V_{\frac{3}{2}}$ sofort aus den zwischen den U und V bestehenden Beziehungen (115). Sie könnten aber auch unmittelbar aus den Tab. XVII bis XX mittels der Gleichungen:

$$V_{\frac{1}{2}}(y, z+\varepsilon) = V_{-\frac{1}{2}} - \frac{h}{2y} V_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{h}{2y}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} V_{-\frac{3}{2}} - \left(\frac{h}{2y}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} V_{-\frac{5}{2}} + - \ldots,$$

$$V_{\frac{3}{2}}(y, z+\varepsilon) = V_{\frac{3}{2}} - \frac{h}{2y} V_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{h}{2y}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} V_{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{h}{2y}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} V_{-\frac{3}{2}} + - \ldots$$

gefunden werden, wo ebenso wie früher:

$$h = 2\varepsilon z + \varepsilon^2$$

ist, und die Coefficienten der Reihen aus den nächstgelegenen Tabellenwerthen durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung:

$$V_{-\frac{2n+1}{2}} + V_{-\frac{2n-3}{2}} = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{2n+1}{2}} I_{\frac{2n+1}{2}}$$

sich ergeben.

Die erstere der beiden obigen Reihen dient auch dazu, die Wurzelwerthe der Gleichung $V_{\frac{1}{2}} = o$ zu bestimmen, zu welchen dann die zugehörigen Werthe von $V_{\frac{3}{2}}$ mittels der zweiten Reihe gefunden werden.

Die so ermittelten Werthe von z, für welche die Lichtstärke ein Maximum oder Minimum wird, sowie diese Maxima und Minima selbst sind jeweils am Fusse der Tab. XVII bis XX aufgeführt.

119. Zur besseren Uebersicht über die Vertheilung der Maxima und Minima im Beugungsbilde verzeichnen wir wiederum in der zy-Ebene (Fig. 12) nebst den Geraden $I_{\frac{1}{2}} = o$ die transcendenten Curven $V_{\frac{1}{2}} = o$, mit Hilfe der in den eben erwähnten Tabellen angegebenen Wurzelwerthe der letzteren Gleichung.

Da

$$V_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{5}{2}} I_{-\frac{5}{2}} + \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{9}{2}} I_{-\frac{9}{2}} - + \ldots$$

bei unbegrenzt wachsendem y dem ersten Reihenglied:

$$\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos z$$

immer näher kommt, so sind die zur y-Axe parallelen Geraden, deren Abscissen $z = \frac{2m+1}{2}\pi$ der Gleichung $\cos z = 0$ genügen, Asymptoten der Aeste der Curve $V_{\frac{1}{2}} = 0$.

In der Fig. 12 sind diese Asymptoten, welche den ferneren Verlauf der Curvenäste in der Richtung der wachsenden y leicht übersehen lassen, punktirt eingezeichnet.

120. In der Gleichung:

$$V_{\frac{1}{2}} - U_{\frac{3}{2}} = \cos\left(\tfrac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} + \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

verschwindet der Cosinus zur Rechten, so oft:

$$y^2 + z^2 = \frac{4m+1}{2}\pi y$$

wird. Diese Gleichung stellt aber eine Schaar von Kreisen (die nämlichen, welche wir bereits oben (101) kennen lernten) dar, welche von den Punkten $y = (m + \frac{1}{4})\pi$ der y-Axe aus mit den Radien $(m + \frac{1}{4})\pi$ beschrieben sind, und demnach sämmtlich durch den Coordinatenanfang gehen.

Diesen Kreisen entlang ist stets $V_{\frac{1}{2}} = U_{\frac{3}{2}}$, woraus man erkennt, dass jeder Punkt, in welchem das im vorigen Abschnitt betrachtete Curvensystem $U_{\frac{3}{2}} = 0$ von diesen Kreisen getroffen wird, auch auf der Curve $V_{\frac{1}{2}} = 0$ liegt, so dass, wenn das eine Curvensystem gezeichnet ist, Punkte des andern mit Hilfe dieser Kreise leicht constructiv zu finden sind. Dieses Verfahren wurde in der That, nachdem Fig. 1 entworfen war, bei Construction der Fig. 12 mit Vortheil benutzt.

Da $U_{\frac{3}{2}}$, wenn y immer kleiner wird, unbegrenzt abnimmt, so ergibt sich noch, dass die Zweige der Curve $V_{\frac{1}{2}} = 0$ mit abnehmendem y sich denselben Kreisen immer mehr nähern, und daher wie diese sämmtlich durch den Coordinatenanfang gehen.

Aus dem hiemit völlig übersehbaren Verlauf der Curve $V_{\frac{1}{2}} = 0$ lässt sich noch entnehmen, dass $\partial y/\partial z$ für alle ihre Punkte positiv ist.

121. Auf welchen Stücken der Linien $I_{\frac{1}{2}} = 0$ und $V_{\frac{1}{2}} = 0$ Maxima oder Minima liegen, entscheidet sich durch Betrachtung des zweiten Differentialquotienten von M^2 nach z. Derselbe ist:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2} = -\frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}}\left(z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} \frac{\partial V_{\frac{1}{2}}}{\partial z} + V_{\frac{1}{2}} \frac{\partial (z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}})}{\partial z}\right),$$

oder, weil:

$$\frac{\partial V_{\frac{1}{2}}}{\partial z} = -\frac{z}{y} V_{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial (z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}})}{\partial z} = z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}$$

ist:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial z} = \frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{z^{\frac{3}{2}}}{y} I_{\frac{1}{2}} V_{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}} V_{\frac{1}{2}}\right).$$

Ueber den Geraden $I_{\frac{1}{2}} = 0$ liegen demnach Maxima oder Minima, je nachdem:

$$I_{-\frac{1}{2}} V_{\frac{1}{2}}$$

positiv oder negativ ist.

Auf den Curven $V_{\frac{1}{2}}$ dagegen sind Maxima oder Minima vorhanden, wenn:

$$I_{\frac{1}{2}} V_{-\frac{1}{2}}$$

negativ oder positiv ist.

122. In der Mitte des Bildes, d. i. in der Mitte des geometrischen Schattens, ist die Lichtstärke immer ein Maximum; denn für $z = 0$ wird:

$$z^{\frac{3}{2}} I_{\frac{1}{2}} = 0, \qquad z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

und demnach:

$$\left[\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2}\right]_{z=0} = -\frac{1}{y}\sqrt{\frac{2\pi}{y}} \cdot V_{\frac{1}{2}}(y, 0)$$

immer negativ.

Da $V_{\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{3}{2}}$, ausser für $y = \infty$, niemals gleichzeitig verschwinden, wie man aus den Formeln (88) mit Rücksicht auf die Beziehungen (115) leicht erkennt, so kann die Intensität niemals Null werden.

123. Der zweite Differentialquotient von M^2 wird Null in den Durchschnittspunkten der beiden Liniensysteme $I_{\frac{1}{2}} = 0$ und $V_{\frac{1}{2}} = 0$, der dritte dagegen nicht. Dieser nämlich:

$$\frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3} = \frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}}\left(z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} V_{\frac{1}{2}} + \frac{z^{\frac{1}{2}}}{y} I_{\frac{1}{2}} V_{-\frac{1}{2}} + \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{y} I_{-\frac{1}{2}} V_{-\frac{1}{2}} - \frac{z^{\frac{5}{2}}}{y^2} I_{\frac{1}{2}} V_{-\frac{3}{2}}\right)$$

bekommt hier den Werth:

$$\left[\frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3}\right] = \frac{2\pi}{y^{\frac{5}{2}}} z^{\frac{3}{2}} I_{-\frac{1}{2}} V_{-\frac{1}{2}},$$

oder weil:

$$V_{-\frac{1}{2}} + V_{\frac{3}{2}} = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}$$

und demnach für $I_{\frac{1}{2}} = o$:

$$V_{-\frac{1}{2}} = -V_{\frac{3}{2}}$$

ist, den Werth:

$$\left[\frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3}\right] = -\frac{2\pi}{y^{\frac{5}{2}}} z^{\frac{3}{2}} I_{-\frac{1}{2}} V_{\frac{3}{2}},$$

welcher, weil $I_{-\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{3}{2}}$ nicht gleichzeitig mit $I_{\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{1}{2}}$ verschwinden können, nothwendig von Null verschieden ist. Ueber einem Durchschnittspunkt der Linien $I_{\frac{1}{2}} = o$ und $V_{\frac{1}{2}} = o$ liegt also weder ein Maximum noch ein Minimum, sondern ein Wendepunkt der Intensitätscurve.

Ueber jedem der Durchschnittspunkte der beiden Liniensysteme findet ebenso wie im vorigen Fall ein Ueberspringen der Maximal- oder Minimalwerthe der Lichtstärke von der einen Liniengattung auf die andere statt, wovon man sich durch Betrachtungen, die den oben (106) angestellten ganz analog sind, leicht überzeugen kann.

124. Der zweite Differentialquotient von M^2 würde auch noch verschwinden, wenn zugleich $V_{\frac{1}{2}} = o$ und $V_{-\frac{1}{2}} = o$ wäre. Da aber, wenn $V_{\frac{1}{2}} = o$ (und demnach $V_{\frac{3}{2}}$ nicht Null) ist, der Differentialquotient:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2\frac{z}{y} V_{-\frac{1}{2}}}{V_{\frac{3}{2}} + \frac{z^2}{y^2} V_{-\frac{1}{2}}}$$

stets positiv bleibt (120), so kann $V_{-\frac{1}{2}}$ niemals mit $V_{\frac{1}{2}}$ gleichzeitig verschwinden. Wendepunkte zweiter Art, wie im vorigen Fall, gibt es also in diesem Falle nicht.

125. Wenn $y > z$ ist, so wird für $z = n\pi$ (zufolge 90):

$$V_{\frac{1}{2}} = (-1)^n \frac{1}{2} \left(V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o) + V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, o)\right),$$

also niemals Null. Im Schattengebiet können demnach die Zweige der Curve $V_{\frac{1}{2}} = o$ von den Geraden $I_{\frac{1}{2}} = o$ nicht getroffen werden, und ebensowenig an der Schattengrenze ($y = z$) selbst. Sämmtliche Wendepunkte der Lichtstärke befinden sich sonach in dem direct beleuchteten Theile des Beugungsbildes.

Da für $I_{\frac{1}{2}} = o$ oder $z = n\pi$:

$$I_{-\frac{1}{2}}(n\pi) = \frac{(-1)^n}{\pi}\sqrt{\frac{2}{n}}$$

ist, so nimmt hier der Ausdruck $I_{-\frac{1}{3}} V_{\frac{1}{2}}$, der in diesem Falle zwischen Maximum und Minimum entscheidet (121), den stets positiven Werth:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{n}}\left(V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o) + V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, o)\right)$$

an, und zeigt hiemit, dass im Schattengebiet den Geraden $I_{\frac{1}{3}} = o$ durchaus Maxima der Lichtstärke entsprechen.

Weil für $y > z$ und $z = n\pi$ (zufolge 90):

$$V_{\frac{1}{2}} = (-1)^n \tfrac{1}{2}\left(V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o) + V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, o)\right), \qquad V_{\frac{3}{2}} = (-1)^n \tfrac{1}{2}\left(V_{\frac{3}{2}}(2\delta, o) + V_{\frac{3}{2}}(2\sigma, o)\right)$$

ist, so werden diese Intensitätsmaxima ausgedrückt durch:

$$M^2 = \frac{\pi}{8y}\left[\left(V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o) + V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, o)\right)^2 + \left(V_{\frac{3}{2}}(2\delta, o) + V_{\frac{3}{2}}(2\sigma, o)\right)^2\right].$$

Da die absoluten Werthe von $V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o)$ und $V_{\frac{3}{2}}(2\delta, o)$ rasch zunehmen, wenn δ sich der Null nähert, so erkennt man hieraus, dass diese Intensitätsmaxima immer heller werden, je näher sie der Schattengrenze liegen.

Die Intensitätsminima innerhalb des geometrischen Schattens müssen sonach den transscendenten Curvenästen $V_{\frac{1}{2}} = o$ angehören, von welchen je einer zwischen zwei aufeinanderfolgenden der Geraden $I_{\frac{1}{3}} = o$ enthalten ist (119).

Für diese Minima hat man (90):

$$V_{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\left(V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o) + V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, o)\right)\cos z + \tfrac{1}{2}\left(V_{\frac{3}{2}}(2\delta, o) - V_{\frac{3}{2}}(2\sigma, o)\right)\sin z = o$$

und:

$$M^2 = \frac{\pi}{2y}V_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{\pi}{8y}\left[-\left(V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o) - V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, o)\right)\sin z + \tfrac{1}{2}\left(V_{\frac{3}{2}}(2\delta, o) + V_{\frac{3}{2}}(2\sigma, o)\right)\cos z\right]^2$$

oder auch, wenn man $\sin z$ und $\cos z$ aus diesen beiden Gleichungen eliminirt:

$$M^2 = \frac{\pi}{8y} \cdot \frac{V_{\frac{1}{2}}^2(2\delta, o) - V_{\frac{1}{2}}^2(2\sigma, o) + V_{\frac{3}{2}}^2(2\delta, o) - V_{\frac{3}{2}}^2(2\sigma, o)}{\left(V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o) + V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, o)\right)^2 + \left(V_{\frac{3}{2}}(2\delta, o) - V_{\frac{3}{2}}(2\sigma, o)\right)^2}.$$

Da die Curvenäste $V_{\frac{1}{2}} = o$ sich mit wachsendem y den Geraden $\cos z = o$ immer mehr nähern, so sind diese Minima um so näher durch:

$$M^2 = \frac{\pi}{8y}\left(V_{\frac{1}{2}}(2\delta, o) - V_{\frac{1}{2}}(2\sigma, o)\right)^2$$

ausgedrückt, je grösser y wird. Dieser Ausdruck zeigt, dass diese Minima sehr dunkel sind, und zwar um so dunkler, je weniger δ und σ von einander verschieden sind, oder je mehr man sich der Bildmitte nähert.

Durch die Feststellung, dass innerhalb des Schattengebietes die Geraden $I_{\frac{1}{2}} = o$ den Maximis, die Curvenzweige $V_{\frac{1}{2}} = o$ den Minimis der Lichtstärke entsprechen, ist nun zugleich auch die Vertheilung der Maxima und Minima über die ganze zy-Ebene unzweideutig bestimmt. In der Fig. 12, welche mit Fig. 1 vollkommen analog ist, sind diejenigen Stücke der beiden Liniensysteme, über welchen die Minima liegen, durch stärkeres Ausziehen vor denjenigen, welche den Maximis entsprechen, kenntlich gemacht.

VII. Abschnitt.

Beugung an einem geradlinigen Rand.

126. Erstreckt sich der einerseits von einer geraden Linie begrenzte undurchsichtige Schirm andrerseits (nach der Seite der negativen ξ) ins Unendliche, und geht die vom Lichtpunkt auf die Bildebene gefällte Senkrechte durch den Rand des Schirmes, so hat man die Integrale C und S (4, 5) von $\varrho = o$ bis $\varrho = \infty$ auszudehnen, und erhält:

$$C = \int_o^\infty \cos\left(\tfrac{1}{2}k\varrho^2 - l\varrho\right) d\varrho = \int_o^\infty \cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \cos l\varrho\, d\varrho + \int_o^\infty \sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \sin l\varrho\, d\varrho,$$

$$S = \int_o^\infty \sin\left(\tfrac{1}{2}k\varrho^2 - l\varrho\right) d\varrho = \int_o^\infty \sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \cos l\varrho\, d\varrho - \int_o^\infty \cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \sin l\varrho\, d\varrho,$$

wo:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{a+b}{ab}, \qquad l = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\xi}{b}$$

ist. Nun ist aber, wie aus (34) und (64) für $\nu = \frac{1}{2}$ hervorgeht:

$$\int_0^\infty \cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \cos l\varrho\, d\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \sin\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

$$\int_0^\infty \sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \cos l\varrho\, d\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \cos\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

$$\int_0^\infty \sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \sin l\varrho\, d\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}\, U_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right),$$

$$\int_0^\infty \cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \sin l\varrho\, d\varrho = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}\, U_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right).$$

Es ergibt sich daher:

$$C = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}\left(\sin\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right) + U_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right),$$

$$S = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}\left(\cos\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right) - U_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right),$$

und sonach die Lichtstärke:

$$M^2 = \frac{\pi}{2k}\left[\left(\sin\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right) + U_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right) - U_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right)^2\right].$$

Da bei Abwesenheit des Schirmes sich:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \cos l\varrho\, d\varrho = 2\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \sin\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\tfrac{1}{2}k\varrho^2 \cos l\varrho\, d\varrho = 2\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \cos\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

ergibt, so ist die volle Lichtstärke der ungehemmten Welle:

$$C^2 + S^2 = \frac{2\pi}{k}.$$

Beziehen wir daher die Intensität in einem Punkte des Beugungsbildes auf diese volle Lichtstärke als Einheit, so wird unser Intensitätsausdruck:

$$M^2 = \left(\tfrac{1}{2}\sin\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cos\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right) - \tfrac{1}{2}U_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right)^2$$

Diese Formel gilt, sowohl wenn ξ und damit l positiv ist, d. i. ausserhalb des geometrischen Schattens, als auch innerhalb des geometrischen Schattens für negative Werthe von ξ oder l.

127. Will man im letzteren Fall die Intensitätsformel so umändern, dass ξ und l vom Schattenrande in den Schatten hinein ebenfalls positiv zu zählen sind, so hat man zu beachten, dass, da die U-Functionen durch die Gleichungen (54, 77):

$$U_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\, l \Sigma(-1)^p \frac{\left(\frac{l^2}{k}\right)^{2p}}{3^{2p|2}}, \qquad U_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\, l \Sigma(-1)^p \cdot \frac{\left(\frac{l^2}{k}\right)^{2p+1}}{3^{2p+1|2}}$$

definirt sind,

$$U_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{(-l)^2}{k}, o\right) = -U_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right), \qquad U_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{(-l)^2}{k}, o\right) = -U_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)$$

ist. Man hat daher im Schattengebiet:

$$M^2 = \left(\tfrac{1}{2}\sin\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right) - \tfrac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cos\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{2}U_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right)^2$$

oder, weil (36, 76):

$$V_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) = U_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) + \cos\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right), \quad V_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) = U_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right) - \sin\left(\frac{l^2}{2k} + \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

ist, sehr einfach:

$$M^2 = \left(\tfrac{1}{2}V_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}V_{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{l^2}{k}, o\right)\right)^2.$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{l^2}{k} = x$, so hat man jetzt ausserhalb des geometrischen Schattens:

$$M_1^2 = \left(\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi\right) - \tfrac{1}{2}U_{\frac{3}{2}}(x, o)\right)^2$$

$$= \left(\cos\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi\right) - \tfrac{1}{2}V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2 + \left(\sin\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{2}V_{\frac{3}{2}}(x, o)\right)^2,$$

und innerhalb des geometrischen Schattens:

$$M_2^2 = \left(\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi\right) - \tfrac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{2}U_{\frac{3}{2}}(x, o)\right)^2$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}V_{\frac{3}{2}}(x, o)\right)^2.$$

Aus beiden Formeln ergibt sich für $l = o$ oder $x = o$:

$$(M_1^2)_o = (M_2^2)_o = \tfrac{1}{4},$$

d. h. die Intensität am Rande des geometrischen Schattens beträgt ein Viertel der vollen Lichtstärke.

Man erkennt ferner, dass die Intensität nirgends Null werden kann. Für das Schattengebiet erhellt dies unmittelbar, da $V_{\frac{1}{2}}(x, o)$ und $V_{\frac{3}{2}}(x, o)$ niemals verschwinden (78). Ausserhalb des Schattens aber könnte M_1^2 nur dann Null sein, wenn gleichzeitig:

$$V_{\frac{1}{2}}(x, o) = 2\cos(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi), \qquad V_{\frac{3}{2}}(x, o) = -2\sin(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi)$$

und demnach die Bedingung:

$$\left(V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2 + \left(V_{\frac{3}{2}}(x, o)\right)^2 = 4$$

erfüllt wäre, was aber unmöglich ist, weil diese Quadratsumme stets kleiner als 1 bleibt (78).

128. Bezieht man die Intensität, welche ein undurchsichtiger schmaler Streifen in der Mitte seines Beugungsbildes hervorbringt, ebenfalls auf die volle Lichtstärke als Einheit, so beträgt dieselbe (vergl. 114, 116):

$$M_o^2 = \left(V_{\frac{1}{2}}(y, o)\right)^2 + \left(V_{\frac{3}{2}}(y, o)\right)^2.$$

Die Lichtstärke im geometrischen Schatten eines nur einseitig begrenzten Schirmes befolgt sonach das nämliche analytische Gesetz wie diejenige in der Bildmitte eines dunklen Streifens, und zwar hat man:

$$M_2^2 = \tfrac{1}{4} M_o^2,$$

wenn, unter r wie früher die halbe Breite des beugenden Streifens verstanden:

$$x = y, \text{ oder } \frac{l^2}{k} = kr^2, \text{ oder } l = kr,$$

ist, oder, was dasselbe ausdrückt, die Proportion:

$$\xi : r = a + b : a$$

stattfindet. Es ergibt sich also, dass die Lichtstärke, welche in einem Punkte des geometrischen Schattens eines einerseits unbegrenzten Schirmes herrscht, ein Viertel ist von der Lichtstärke, welche ein schmaler Streifen, dessen Schattenrand in jenen Punkt trifft, in der Mitte seines Beugungsbildes hervorbringen würde.

129. Bildet man die Summe der Intensitäten:

$$M_1^2 = \left(\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) + \tfrac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,o)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{2}U_{\frac{3}{2}}(x,o)\right)^2,$$

$$M_2^2 = \left(\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,o)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) + \tfrac{1}{2}U_{\frac{3}{2}}(x,o)\right)^2,$$

welche in zwei Punkten des Beugungsbildes stattfinden, die diesseits und jenseits gleichweit vom Schattenrande entfernt sind, so ergibt sich:

$$M_1^2 + M_2^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(U_{\frac{1}{2}}^2(x,o) + U_{\frac{3}{2}}^2(x,o)\right).$$

Auf die volle Lichtstärke als Einheit bezogen beträgt aber die centrale Lichtstärke für einen Spalt von der Breite 2r (94):

$$M^2 = U_{\frac{1}{2}}^2(y,o) + U_{\frac{3}{2}}^2(y,o).$$

Man erkennt hieraus, dass die Summe der Intensitäten in zwei Punkten, welche zu beiden Seiten gleichweit von der Schattengrenze abstehen, die halbe Lichtstärke der vollen Welle übertrifft um einen Betrag, welcher der halben Lichtstärke in der Mitte des Beugungsbildes eines Spaltes gleichkommt, dessen Ränder ihre geometrischen Schatten in jene beiden Punkte werfen.

Da zufolge (112) die centrale Lichtstärke dieses Spaltes ebensogross ist als diejenige am Schattenrande eines halb so breiten Spaltes, so ergibt sich noch der folgende Satz:

Die Summe der Intensitäten in zwei Punkten des Beugungsbildes, welche beiderseits von der Schattengrenze gleichen Abstand haben, übertrifft die halbe Lichtstärke der vollen Welle um einen Betrag, welcher der halben Intensität an der Schattengrenze eines Spaltes gleich ist, dessen Ränder vom Lichtpunkt aus sich gerade in die Mitte jenes Abstandes projiciren.

130. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) \mp \tfrac{1}{2}U_{\frac{3}{2}}(x,o) = P(x),$$

$$\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) \pm \tfrac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,o) = Q(x),$$

wo das obere Zeichen ausserhalb, das untere innerhalb des geometrischen Schattens gilt, so finden wir, weil (vermöge 51 und 52):

$$\frac{\partial U_{\frac{3}{2}}(x,o)}{\partial x} = \tfrac{1}{2} U_{\frac{1}{2}}(x,o), \qquad \frac{\partial U_{\frac{1}{2}}(x,o)}{\partial x} = \tfrac{1}{2} U_{-\frac{1}{2}}(x,o),$$

$$U_{-\frac{1}{2}}(x,o) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} - U_{\frac{3}{2}}(x,o)$$

ist:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\tfrac{1}{4}\sin(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) \mp \tfrac{1}{4} U_{\frac{1}{2}}(x,o) = -\tfrac{1}{2} Q,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \tfrac{1}{4}\cos(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) \mp \tfrac{1}{4} U_{\frac{3}{2}}(x,o) \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} = \tfrac{1}{2} P \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

Die Lichtstärke wird also in beiden Fällen durch:

$$M^2 = P^2 + Q^2 = P^2 + 4\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2$$

dargestellt.

131. Um die Punkte (ξ) zu finden, in welchen die Intensität zu einem Maximum oder Minimum wird, haben wir:

$$\frac{\partial M^2}{\partial \xi} = \frac{\partial M^2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} = o$$

zu setzen.

Da

$$x = \frac{l^2}{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a\xi^2}{b(a+b)} = \tfrac{1}{2}\pi c^2 \xi^2,$$

ist, wo zur Abkürzung:

$$\frac{4a}{\lambda b(a+b)} = c$$

gesetzt wurde, so hat man:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \pi c^2 \xi = c\sqrt{2\pi x}$$

Ferner ergibt sich:

$$\frac{\partial M^2}{\partial x} = 2P\frac{\partial P}{\partial x} + 2Q\frac{\partial Q}{\partial x} = -PQ + Q\left(P \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\right)$$

$$= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, Q,$$

und sonach:

$$\frac{\partial M^2}{\partial \xi} = \pm cQ = \mp 2c\frac{\partial P}{\partial x}.$$

132. Nun hat man innerhalb des geometrischen Schattens:

$$P = \tfrac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x,o), \qquad Q = -\tfrac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}(x,o).$$

Da $V_{\frac{3}{2}}(z, o)$ stets negativ ist und erst für $x = \infty$ verschwindet, so kann hier:

$$\frac{\partial M^2}{\partial \xi} = -cQ = \frac{c}{2} V_{\frac{3}{2}}(x, o)$$

nicht Null werden, sondern bleibt immer negativ. Im Schattengebiet gibt es also keine Maxima und Minima der Lichtstärke, sondern dieselbe nimmt von dem Werthe $\frac{1}{4}$ bei $\xi = o$ fortwährend ab um sich allmälig in völliger Dunkelheit zu verlieren, was übrigens Alles aus dem obigen Intensitätsausdruck M_2^2 schon unmittelbar ersichtlich ist.

Da der zweite Differentialquotient:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial \xi^2} = -c \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{c}{2} \frac{\partial V_{\frac{3}{2}}(x, o)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4} c^2 \sqrt{2\pi x} \cdot V_{\frac{5}{2}}(x, o)$$

oder (vergl. 71):

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial \xi^2} = \frac{1}{4} c^2 \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \int_o^\infty e^{-\frac{1}{2} yu} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{1+u^2} du$$

hier stets positiv ist, so wendet die Intensitätscurve der Abscissenaxe durchaus die convexe Seite zu.

133. Ausserhalb des geometrischen Schattens wird die Intensität zu einem Maximum oder Minimum, wenn:

$$Q = \sin(\tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4} \pi) + \tfrac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}(x, o)$$

verschwindet, und sonach (131):

$$P = \cos(\tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4} \pi) - \tfrac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)$$

zu einem Maximum oder Minimum wird.

Da $V_{\frac{3}{2}}(x, o)$ immer negativ und dem absoluten Werthe nach kleiner als $1/\sqrt{2}$ ist, so kann Q nur dann verschwinden, wenn $\sin(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \pi)$ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Dies findet nur statt, entweder wenn x zwischen

$$(4n+1)\pi \quad \text{und} \quad (4n+\tfrac{3}{2})\pi,$$

oder wenn x zwischen

$$(4n+\tfrac{7}{2})\pi \quad \text{und} \quad (4n+4)\pi$$

liegt. Zwischen diesen Werthpaaren liegt jeweils nur ein Wurzelwerth der Gleichung $Q = o$, indem diese Function zwischen dem ersten Werth-

paar nur einmal vom Positiven zum Negativen, zwischen dem zweiten vom Negativen zum Positiven übergeht. Dem entsprechend ist:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial \xi^2} = c \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

für jene erste Reihe von Wurzelwerthen negativ, für die letztere positiv. Jenen entsprechen sonach Maxima, diesen Minima der Lichtstärke.

Da $\frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)$ klein ist und sich mit wachsendem x rasch der Null nähert, so liegen die Wurzelwerthe der Gleichung $Q = o$ denjenigen der Gleichung:

$$\sin(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) = o,$$

nämlich den Werthen:

$$x = \tfrac{3}{2}\pi, \quad \tfrac{7}{2}\pi, \quad \tfrac{11}{2}\pi, \ \ldots \ \frac{4n+3}{2}\pi, \ \ldots$$

sehr nahe, und nähern sich denselben um so mehr, je grösser x wird. Die genauen Wurzelwerthe kann man daher ausdrücken für die Maxima durch:

$$x = (4n + \tfrac{3}{2})\pi - \delta,$$

für die Minima durch:

$$x = (4n + \tfrac{7}{2})\pi + \varepsilon,$$

wo δ und ε positive Grössen sind, welche sich mit wachsendem x (oder n) der Null nähern. Die Differenzen je zweier aufeinanderfolgenden Wurzeln sind demnach abwechselnd grösser und kleiner als π, nähern sich aber mit zunehmendem x diesem Werthe immer mehr.

134. Die Maxima und Minima der Lichtstärke selbst sind, da hier Q verschwindet, gegeben durch den Ausdruck:

$$M_m^2 = P^2 = \left(\cos(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2.$$

Da für $x = (4n + \frac{3}{2})\pi$ dieser Ausdruck

$$= \left(1 + \tfrac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2,$$

also > 1, ist, so muss jedes Maximum der Lichtstärke, da es grösser ist als der vorstehende Werth, um so mehr grösser sein als 1. Für $x = (4n + \frac{7}{2})\pi$ dagegen wird jener Ausdruck

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2,$$

also < 1, demnach sind sämmtliche Minima der Lichtstärke kleiner als 1; während also die Maxima die Lichtstärke der vollen Welle überschreiten, bleiben die Minima hinter ihr zurück.

Da, für dieselben Werthe von x, die Maxima kleiner sind als:

$$\left(1 + \tfrac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2,$$

die Minima aber grösser als:

$$\left(1 - \tfrac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2,$$

so können, wenn wir x als Abscisse, die Intensität als Ordinate in einem rechtwinkligen Coordinatensystem ansehen, die Maxima niemals bis zur Curve:

$$y = \left(1 + \tfrac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2$$

emporragen, und die Minima nie bis zur Curve:

$$y = \left(1 - \tfrac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)\right)^2$$

herabsinken. Erstere Curve senkt sich von ihrer grössten Höhe:

$$\left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{8}}\right)^2 = \tfrac{9}{8} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 1{,}832107$$

welche sie bei $x = o$ hat, asymptotisch gegen die Gerade $y = 1$ herab, letztere steigt von ihrem kleinsten Ordinatenwerthe:

$$\left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{8}}\right)^2 = \tfrac{9}{8} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}417893$$

bei $x = o$ ebenso gegen diese Gerade heran. Zwischen diesen beiden Curven, welche nicht zu einander symmetrisch sind, und von denen nur die letztere mit der Intensitätscurve einen einzigen zwischen $x = o$ und deren erstem Maximum gelegenen Durchschnittspunkt gemein hat, bleibt die Intensitätscurve, von diesem Punkte an, stets enthalten.

Da für $x = \infty$ sowohl $V_{\frac{1}{2}}(x, o)$ als $V_{\frac{3}{2}}(x, o)$ verschwinden, so nähert sich die Lichtstärke mit wachsendem x immer mehr der vollen Lichtstärke 1. Die Intensitätscurve erhebt sich demnach von der Höhe $\frac{1}{4}$ bei $x = o$ zuerst über die in der Höhe 1 zur Abscissenaxe parallel gezogene Gerade, und nähert sich ihr unaufhörlich, indem ihre Biegungen abwechselnd über und unter derselben verlaufen und stets zwischen den beiden obigen Curven eingeschlossen bleiben.

135. Die bisherigen Betrachtungen haben bereits, ohne numerische Auswerthungen zu Hilfe zu nehmen, ein deutliches Bild von dem Gange der Lichtstärke geliefert.

Tabellen der Zahlenwerthe der Intensität sind aber mittels des schon vorliegenden numerischen Materials leicht zu entwerfen.

Die bei den vorhergehenden Fällen mehrfach erwähnte und benutzte Tab. XXII der Werthe $\frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}(x, o)$ und $\frac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}(x, o)$ gibt in der Columne M_2^2 die Lichtstärke innerhalb des geometrischen Schattens unmittelbar als Quadratsumme dieser Werthe.

Die Tab. XXI enthält die Intensitäten M_1^2 ausserhalb des geometrischen Schattens nebst den Functionen P und Q, welche die Componenten dieser Intensitäten sind.

In der Tab. XXI a sind die Maxima und Minima der Lichtstärke sowie die Argumente x, für welche sie eintreten, angegeben.

Letztere Werthe, welche der Gleichung:

$$Q = \sin\left(\tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}(x, o) = o$$

genügen, sind leicht zu bestimmen.

Da nämlich (vergl. 133) die Wurzelwerthe dieser Gleichung:

$$x = \frac{4n+3}{2}\pi + \vartheta$$

sind, so hat man zur Bestimmung von ϑ:

$$\sin\left((n+1)\pi + \tfrac{1}{2}\vartheta\right) = -\tfrac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}(x, o)$$

oder:

$$(-1)^n \sin\tfrac{1}{2}\vartheta = \tfrac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}(x, o)$$

oder, da ϑ sehr klein ist, ohne weiteres:

$$(-1)^n \vartheta = V_{\frac{3}{2}}(x, o)$$

wobei der Werth von $V_{\frac{3}{2}}(x, o)$ für $x = \frac{4n+3}{2}\pi$ der Tab. XXII zunächst durch lineare Interpolation entnommen werden kann [1]).

---

1) Für das erste Maximum z. B. hat man in erster Annäherung:

$$x_0 = \tfrac{3}{2}\pi = 4{,}71239.$$

Aus Tab. XXII findet man für $x = 4{,}7$ durch lineare Interpolation:

$$\tfrac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}(x, o) = -0{,}02893,$$

folglich:

$$\vartheta = -0{,}05786;$$

Dieser schon sehr genäherte Werth bedarf nur noch einer kleinen Correctur z, die sich aus der Gleichung:

$$Q + z\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

ergibt, wo Q und:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$$

durch die in (78) dargelegte Interpolationsmethode bestimmt werden.

Der zu dem definitiven Werth $x = x_1 + z$ gehörige Werth von P, dessen Quadrat gleich der verlangten maximalen oder minimalen Lichtstärke ist, würde sich, wenn wir in der Entwickelung bis z^2 gehen, ergeben aus der Gleichung:

$$P(x_1 + z) = P + z\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{k^2}{1 \cdot 2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$

oder da:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\tfrac{1}{2}Q, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ist, aus:

$$P(z_1 + z) = P - \tfrac{1}{2}zQ - \tfrac{1}{4}z^2\frac{\partial Q}{\partial x},$$

oder endlich, weil z aus der Gleichung:

$$z\frac{\partial Q}{\partial x} = -Q$$

bestimmt wurde, aus:

$$P(x_1 + z) = P - \tfrac{1}{4}zQ.$$

Bei der grossen Genauigkeit jedoch, welche durch die zweite Annäherung (x_1) bereits erreicht ist, wird das Glied $\frac{1}{4}zQ$ thatsächlich so klein, dass es auf die sechste Decimale keinen Einfluss übt, und sonach der oben ermittelte Werth $P(x_1)$ schon genügt.

136. Will man die Vertheilung der Maxima und Minima in analoger Weise darstellen, wie dies in den Fig. 1 und 12 für den schmalen Spalt

---

man hat demnach in zweiter Annäherung:

$$x_1 = \tfrac{3}{2}\pi + \vartheta = 4{,}65453,$$

während der genaue Werth $x = 4{,}65449$ ist. Für die höheren Wurzelwerthe wird diese Rechnung, weil die Interpolation schärfer wird, immer genauer.

und Streifen geschehen ist, so erhält man als Maximum- und Minimumlinien Parabeln, entsprechend der Gleichung:

$$\frac{z^2}{y} = K, \quad \text{oder} \quad z^2 = Ky$$

wo unter K die Werthe x der Tab. XXIa zu verstehen sind; ihr gemeinschaftlicher Scheitel ist der Anfangspunkt der Coordinaten, die y-Axe ihre gemeinsame Axe.

Im wirklichen Raume sind die Orte der Maxima und Minima bekanntlich Hyperbeln, deren reelle Axe der Abstand des Lichtpunktes vom Schirmrande ist; sie sind ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{2\pi}{\lambda K}\xi^2 - \frac{b^2}{a} - b = o,$$

worin ξ und b die zusammengehörigen Coordinaten sind.

VIII. Abschnitt.

Experimentelle Darstellung der Minimumlinien $I_{\frac{1}{2}} = o$ und $U_{\frac{1}{2}} = o$.

137. Mikrometrische Messungen zur Bestätigung der Theorie an den Beugungsbildern selbst, wie ich sie in der vorigen Abhandlung für die kreisrunde Oeffnung und das kreisrunde Schirmchen angestellt habe. mussten für die gegenwärtigen Fälle als überflüssig angesehen werden. da solche in ausreichender Anzahl in Fresnel's klassischem Mémoire sur la diffraction de la lumière bereits vorliegen. Mit Recht durfte Fresnel hinsichtlich der von ihm durchgeführten Gegenüberstellung von Theorie und Erfahrung sagen [1]): „En comparant aux observations les résultats déduits de ce principe [2]) par la théorie des interférences, j'ai fait voir qu'il suffisait à l'explication des phénomènes dans ces différentes circonstances, et que l'expression générale de l'intensité de la lumière à laquelle il conduisait, les représentait fidèlement jusque dans leurs aspects les plus bizarres et en apparence les plus irréguliers."

1) Daselbst p. 446.

2) i. e. d'Huyghens.

Eine solche Vergleichung der Beobachtungen mit der Theorie war ja vermöge der von Fresnel geschaffenen analytischen Hilfsmittel bereits vollkommen durchführbar, indem dieselben mit hiezu mehr als hinreichender Genauigkeit die Lichtstärke für jeden Punkt des Beugungsbildes sowie die Lage der Maxima und Minima numerisch zu bestimmen gestatteten. Die grössere Genauigkeit und Leichtigkeit der Rechnung, welche die im folgenden Abschnitt mitgetheilten Tabellen gewähren, bildete auch nicht den Hauptzweck der vorliegenden Untersuchung. Das Ziel, welches erstrebt, und, wie ich glaube, in den vorhergehenden Abschnitten vollständig erreicht worden ist, bestand vielmehr darin, die verwickelten Gesetze der Erscheinungen durch allgemeine Discussion aus dem Intensitätsausdruck abzuleiten, und über die Regeln, welche die anscheinend so regellos und absonderlich wechselnden Formen des Beugungsbildes dennoch beherrschen, eine klare Uebersicht zu gewähren. Es gelang dies insbesondere durch die Betrachtung der Maximum- und Minimumlinien, welche in den Fig. 1, 12 und 17 verzeichnet sind.

138. Dass diese Linien sozusagen als der naturgemässe Ausdruck für die diese Erscheinungen beherrschenden Gesetze anzusehen sind, bekundet sich namentlich auch dadurch, dass sie in nur leicht abgeänderter Gestalt auf den farbigen Grund des Spectrums eingezeichnet wahrgenommen werden können.

Es wird dies erreicht durch folgende Versuchsanordnung. Der Spalt, welcher, von Sonnen- oder electrischem Lichte beleuchtet, als lineare Lichtquelle dient, sowie der Beugungsspalt sind horizontal gestellt; eine hinter letzterem befindliche Linse von kurzer Brennweite entwirft das Beugungsbild auf der Spaltfläche eines Spectroskops, dessen Spalt vertical steht.

Wäre das einfallende Licht homogen, so würde der schmale verticale Streifen, welchen der letztere Spalt aus dem Beugungsbilde quer zu den horizontal liegenden Fransen herausschneidet, im Spectroskop als eine schmale einfarbige verticale Linie erscheinen, welche in den Punkten, die den dunklen Fransen entsprechen, unterbrochen ist. Bei Anwendung von weissem Licht aber werden durch das Prisma alle den verschiedenen Farben entsprechenden Streifchen neben einander gelegt, und bilden so

ein Spectrum, in welchem sich jene Unterbrechungsstellen zu dunklen Linien aneinanderreihen, welche das Spectrum im allgemeinen seiner Längsrichtung nach durchziehen. Dieses Spectrum ist nun gleichsam ein Ausschnitt aus der Fig. 1 oder 17, welcher, wenn λ_A und λ_H die Wellenlängen für die Fraunhofer'schen Linien A und H bezeichnen, von

$$y_A = \frac{2\pi}{\lambda_A} \cdot \frac{a+b}{ab} r^2 \quad \text{bis} \quad y_H = \frac{2\pi}{\lambda_H} \cdot \frac{a+b}{ab} r^2$$

reicht, und jene dunklen Linien stellen die Minimumlinien dieser Figuren dar.

139. Liegt der numerische Werth von y zwischen 0 und 5, so zeigt sich das Spectrum seiner ganzen Länge nach von ununterbrochenen dunklen Streifen durchzogen (Fig. 18). Da die Fransenbreite der Wellenlänge proportional ist, so müssten in einem Gitterspectrum diese Streifen sich als gerade Linien darstellen, welche nach dem violetten Ende des Spectrums convergiren. Im Spectroskop aber erscheinen sie infolge der Dispersion leicht gekrümmt, indem sie der Längsaxe des Spectrums ihre convexe Seite zukehren.

140. Hat man dieses Spectralbild bei ziemlich engem Beugungsspalte hergestellt, so lässt man y nach und nach grösser werden, entweder indem man die Grösse

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

wachsen lässt, z. B. einfach durch Näherrücken der Projectionslinse an den Beugungsspalt (Verkleinerung von b), oder noch besser, indem man diesen allmälig erweitert, d. i. r vergrössert.

Man sieht alsdann zuerst die beiden der Bildmitte, d. i. der Längsaxe des Spectrums, nächsten dunklen Streifen am violetten Ende zu einem centralen dunklen Streifen zusammenfliessen, welcher mit zunehmender Spaltbreite immer mehr gegen das rothe Ende vorrückt (Fig. 19); sodann folgt wieder Helligkeit, dann tritt ein zweiter dunkler Centralstreifen vom violetten Ende her in das Spectrum ein, und so folgen immer mehr solcher dunkler durch helle Zwischenräume getrennter Streifen, welche immer kürzere Strecken des Spectrums einnehmen. An ihrem weniger

brechbaren Ende gehen dieselben gabelförmig auseinander, um sich mit den seitlichen Streifen zu vereinigen, welche, soweit sie dem Gebiete der directen Beleuchtung angehören, in ähnlicher Weise unterbrochen erscheinen, und zwar so, dass ihre dunklen Stücke unter sich und mit denjenigen des Centralstreifens alternirend angeordnet sind. Im geometrischen Schatten, auf beträchtlich dunklerem Grunde, gewahrt man nur ununterbrochene dunkle Streifen.

In der Fig. 20 ist das soeben beschriebene Spectralbild wiedergegeben. Dass dasselbe die Consequenzen der Theorie bestätigt, indem es nichts anderes ist als die den Umständen der Beobachtungsmethode gemäss modificirte Fig. 1 oder 17, fällt in die Augen, und bedarf nach dem bereits Gesagten keiner weiteren Auseinandersetzung.

Dieselbe Methode der spectralen Analyse von Interferenzstreifen wurde übrigens bereits von Righi[1]) angewendet, mit dem unwesentlichen Unterschied, dass derselbe Lichtlinie und Beugungsspalt vertical, den Spectroskopspalt aber horinzontal stellte.

IX. Abschnitt.

Tabellen.

Tab. I. Die Bessel'schen Functionen $I_{\frac{2n+1}{2}}(z)$.

z	$I_{\frac{1}{2}}$	$I_{\frac{3}{2}}$	$I_{\frac{5}{2}}$	$I_{\frac{7}{2}}$	$I_{\frac{9}{2}}$	$I_{\frac{11}{2}}$	$I_{\frac{13}{2}}$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+ 0,671397	+ 0,240298	+ 0,049497	+ 0,007186	+ 0,000807	+ 0,000074	+ 0,000006
2	0,513016	0,491294	0,223925	0,068518	0,015887	0,002973	0,000467
3	+ 0,065008	0,477718	0,412710	0,210132	0,077598	0,022661	0,005493
4	− 0,301921	+ 0,185286	0,440885	0,365820	0,199300	0,082606	0,027866
5	− 0,342168	− 0,169651	+ 0,240377	0,410029	0,333663	0,190564	0,085579
6	− 0,091016	− 0,327930	− 0,072950	+ 0,267139	0,384612	0,309779	0.183316
7	+ 0,198129	− 0,199052	− 0,283437	− 0,003403	0,280034	0,363446	0,291096
8	+ 0,279093	+ 0,075931	− 0,250619	− 0,232568	+ 0,047122	0,285580	0,345551
9	+ 0,109608	+ 0,254504	− 0,024773	− 0,268267	− 0,183879	+ 0,084388	0,287020
10	− 0,137264	+ 0,197983	+ 0,196659	− 0,099653	− 0,266416	− 0,140121	+ 0,112283
11	− 0,240569	− 0,022934	+ 0,234314	+ 0,129440	− 0,151943	− 0,253757	− 0,101814
12	− 0,123589	− 0,204663	+ 0,072423	+ 0,234840	+ 0,064567	− 0,186414	− 0,235447

1) Augusto Righi, Ricerche sperimentali sull' interferenza della luce; Nuovo Cimento (III). 2. p. 161. 1877.

z	$I_{\frac{1}{2}}$	$I_{\frac{3}{2}}$	$I_{\frac{5}{2}}$	$I_{\frac{7}{2}}$	$I_{\frac{9}{2}}$	$I_{\frac{11}{2}}$	$I_{\frac{13}{2}}$
13	+ 0,092980	− 0,193660	− 0,137671	+ 0,140709	+ 0,213437	+ 0,007055	− 0,207468
14	+ 0,211241	− 0,014070	− 0,214256	− 0,062450	+ 0,183031	+ 0,180113	− 0,041513
15	+ 0,133968	+ 0,165437	− 0,100880	− 0,199063	+ 0,007984	+ 0,203854	+ 0,141509
16	− 0,057428	+ 0,187436	+ 0,092573	− 0,158507	− 0,161920	+ 0,067428	+ 0,208276
17	− 0,186045	+ 0,042305	+ 0,193511	+ 0,014610	− 0,187495	− 0,113872	+ 0,113813
18	− 0,141233	− 0,132027	+ 0,119229	+ 0,165146	− 0,055005	− 0,192649	− 0,062725
19	+ 0,027435	− 0,179536	− 0,055782	+ 0,164856	+ 0,116519	− 0,109663	− 0,180008
20	+ 0,162881	− 0,064663	− 0,172580	+ 0,021518	+ 0,180111	+ 0,059532	− 0,147369
21	+ 0,145672	+ 0,102303	− 0,131058	− 0,133507	+ 0,086555	+ 0,170603	+ 0,002808
22	− 0,001506	+ 0,170034	+ 0,024692	− 0,164423	− 0,077008	+ 0,132919	+ 0,143468
23	− 0,140786	+ 0,082527	+ 0,151550	− 0,049581	− 0,166640	− 0,015626	+ 0,159167
24	− 0,147489	− 0,075230	+ 0,138086	+ 0,103998	− 0,107753	− 0,144405	+ 0,041567
25	− 0,021120	− 0,159018	+ 0,002038	+ 0,159426	+ 0,042601	− 0,144089	− 0,106000
26	+ 0,119324	− 0,096639	− 0,130474	+ 0,071548	+ 0,149737	− 0,019716	− 0,158079
27	+ 0,146854	+ 0,050298	− 0,141266	− 0,076458	+ 0,121443	+ 0,116939	− 0,073801
28	+ 0,040849	+ 0,146606	− 0,025141	− 0,151096	− 0,012633	+ 0,147035	+ 0,070397
29	− 0,098326	+ 0,107444	+ 0,109441	− 0,088575	− 0,130821	+ 0,047975	+ 0,149019
30	− 0,143930	− 0,027268	+ 0,141203	+ 0,050802	− 0,129349	− 0,089606	+ 0,096493
31	− 0,057900	− 0,132954	+ 0,045034	+ 0,140218	− 0,013372	− 0,144100	− 0,037760
32	+ 0,077777	− 0,115235	− 0,088581	+ 0,101394	+ 0,110760	− 0,070242	− 0,134906
33	+ 0,138882	+ 0,006053	− 0,138331	− 0,027012	+ 0,132602	+ 0,063176	− 0,111543
34	+ 0,072398	+ 0,118244	− 0,061964	− 0,127357	+ 0,035744	+ 0,136818	+ 0,008521
35	− 0,057748	+ 0,120228	+ 0,068053	− 0,110507	− 0,090154	+ 0,087324	+ 0,117599
36	− 0,131887	+ 0,013353	+ 0,133000	+ 0,005119	− 0,132005	− 0,038120	+ 0,120357
37	− 0,084414	− 0,102682	+ 0,076088	+ 0,112964	− 0,054717	− 0,126274	+ 0,017176
38	+ 0,038360	− 0,122610	− 0,048040	+ 0,116289	+ 0,069461	− 0,099837	− 0,098362
39	+ 0,123138	− 0,030910	− 0,125516	+ 0,014818	+ 0,128176	+ 0,014761	− 0,124012
40	+ 0,094001	+ 0,086489	− 0,087514	− 0,097428	+ 0,070464	+ 0,113283	− 0,039312
41	− 0,019766	+ 0,122549	+ 0,028733	− 0,119045	− 0,049057	+ 0,108276	+ 0,078107
42	− 0,112839	+ 0,046558	+ 0,116164	− 0,032729	− 0,121619	+ 0,006668	+ 0,123365
43	− 0,101207	− 0,069898	+ 0,096331	+ 0,081099	− 0,083128	− 0,098498	+ 0,057931
44	+ 0,002129	− 0,120218	− 0,010326	+ 0,119045	+ 0,029265	− 0,113059	− 0,057530
45	+ 0,101208	− 0,060234	− 0,105223	+ 0,048542	+ 0,112774	− 0,025987	− 0,119127
46	+ 0,106088	+ 0,053148	− 0,102622	− 0,064303	+ 0,092836	+ 0,082467	− 0,073116
47	+ 0,014382	+ 0,115797	− 0,006991	− 0,116541	− 0,010367	+ 0,114556	+ 0,037178
48	− 0,088476	+ 0,071879	+ 0,092968	− 0,062195	− 0,102038	+ 0,043062	+ 0,111907
49	− 0,108712	− 0,036481	+ 0,106479	+ 0,047346	− 0,099715	− 0,065662	+ 0,084974
50	− 0,029606	− 0,109477	+ 0,023037	+ 0,111781	− 0,007388	− 0,113110	− 0,017496

z	$I_{\frac{15}{2}}$	$I_{\frac{17}{2}}$	$I_{\frac{19}{2}}$	$I_{\frac{21}{2}}$	$I_{\frac{23}{2}}$	$I_{\frac{25}{2}}$	$I_{\frac{27}{2}}$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0
2	0,000063	0,000008	0,000001	0	0	0	0
3	0,001140	0,000207	0,000034	0,000005	0,000001	0	0
4	0,007957	0,001974	0,000434	0,000086	0,000015	0,000002	0
5	0,031941	0,010243	0,002887	0,000727	0,000165	0,000034	0,000007
6	0,087406	0,035199	0,012324	0,003827	0,001069	0,000272	0,000063
7	0,177161	0,088535	0,037852	0,014205	0,004763	0,001446	0,000402
8	0,275940	0,171837	0,089213	0,040045	0,015904	0,005680	0,001846
9	0,330196	0,263308	0,167162	0,089590	0,041882	0,017442	0,006568
10	0,286089	0,316850	0,252556	0,163007	0,089759	0,043438	0,018837
11	+ 0,133432	0,283766	0,305116	0,243253	0,159277	0,089780	0,044768
12	− 0,068653	+ 0,149630	0,280630	0,294700	0,235095	0,155899	0,089695

z	$I_{1,5}$	$I_{1,7}$	$I_{1,9}$	$I_{2,1}$	$I_{2,3}$	$I_{2,5}$	$I_{2,7}$
13	— 0,214523	— 0,040059	+ 0,162139	0,277030	0,285372	0,227859	0,152818
14	— 0,218661	— 0,192766	— 0,015412	0,171849	0,273186	0,276957	0,221379
15	— 0,081213	— 0,222722	— 0,171205	+ 0,005862	0,179412	0,269236	0,269315
16	+ 0,101797	— 0,112842	— 0,221691	— 0,150416	+ 0,024269	0,185304	0,265267
17	+ 0,200906	+ 0,063457	— 0,137449	— 0,217076	— 0,130704	+ 0,040241	0,189882
18	+ 0,147348	+ 0,185515	+ 0,027861	— 0,156106	— 0,209985	— 0,112207	+ 0,054141
19	— 0,013500	+ 0,169350	+ 0,165024	— 0,004326	— 0,169805	— 0,201228	— 0,094968
20	— 0,155322	+ 0,030877	+ 0,181568	+ 0,141612	— 0,032875	— 0,179418	— 0,191398

z	$I_{2,9}$	$I_{3,1}$	$I_{3,3}$	$I_{3,5}$	$I_{3,7}$	$I_{3,9}$	$I_{4,1}$
5	+ 0,000001	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0
6	0,000014	0,000003	0,000001	0	0	0	0
7	0,000103	0,000024	0,000005	0,000001	0	0	0
8	0,000551	0,000152	0,000039	0,000009	0,000002	0	0
9	0,002261	0,000718	0,000212	0,000058	0,000015	0,000004	0,000001
10	0,007421	0,002683	0,000898	0,000280	0,000082	0,000022	0,000006
11	0,020106	0,008237	0,003108	0,001086	0,000355	0,000109	0,000032
12	0,045914	0,021263	0,009017	0,003532	0,001288	0,000440	0,000141
13	0,089532	0,046907	0,022324	0,009760	0,003955	0,001495	0,000530
14	0,149989	0,089312	0,047774	0,023297	0,010469	0,004371	0,001706
15	0,215531	0,147378	0,089050	0,048533	0,024193	0,011143	0,004779
16	0,262335	0,210215	0,144957	0,088758	0,049201	0,025020	0,011786
17	0,261336	0,255927	0,205354	0,142701	0,088443	0,049792	0,025786
18	0,193419	0,257478	0,250016	0,200884	0,140592	0,088111	0,050316
19	+ 0,066273	0,196122	0,253715	0,244541	0,196755	0,138614	0,087769
20	— 0,078969	+ 0,076893	+ 0,198153	+ 0,250059	+ 0,239451	+ 0,192925	+ 0,136753

z	$I_{4,3}$	$I_{4,5}$	$I_{4,7}$	$I_{4,9}$	$I_{5,1}$	$I_{5,3}$	$I_{5,5}$
10	+ 0,000001	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0
11	0,000009	0,000002	0	0	0	0	0
12	0,000043	0,000012	0,000003	0,000001	0	0	0
13	0,000177	0,000056	0,000017	0,000005	0,000001	0	0
14	0,000626	0,000217	0,000071	0,000022	0,000007	0,000002	0
15	0,001921	0,000727	0,000260	0,000088	0,000029	0,000009	0,000003
16	0,005181	0,002138	0,000832	0,000307	0,000108	0,000036	0,000011
17	0,012398	0,005574	0,002357	0,000941	0,000357	0,000129	0,000044
18	0,026497	0,012982	0,005958	0,002576	0,001054	0,000409	0,000151
19	0,050781	0,027157	0,013539	0,006333	0,002795	0,001168	0,000464
20	+ 0,087418	+ 0,051196	+ 0,027773	+ 0,014070	+ 0,006699	+ 0,003013	+ 0,001286

z	$I_{5,7}$	$I_{5,9}$	$I_{6,1}$	$I_{6,3}$	$I_{6,5}$	$I_{6,7}$	$I_{6,9}$
15	+ 0,000001	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0
16	0,000004	0,000001	0	0	0	0	0
17	0,000015	0,000005	0,000001	0	0	0	0
18	0,000054	0,000018	0,000006	0,000002	0,000001	0	0
19	0,000176	0,000064	0,000022	0,000007	0,000002	0,000001	0
20	+ 0,000522	+ 0,000202	+ 0,000075	+ 0,000027	+ 0,000009	+ 0,000003	+ 0,000001

Tab. II. Die Bessel'schen Functionen $I_{-\frac{2n+1}{2}}(z)$.

z	$I_{-\frac{1}{2}}$	$I_{-\frac{3}{2}}$	$I_{-\frac{5}{2}}$	$I_{-\frac{7}{2}}$	$I_{-\frac{9}{2}}$	$I_{-\frac{11}{2}}$	$I_{-\frac{13}{2}}$
0	+ ∞	− ∞	+ ∞	− ∞	+ ∞	− ∞	+ ∞
1	+ 0,431099	− 1,102496	+ 2,876387	− 13,27944	+ 90,07972	− 797,4381	+ 8681,738
2	− 0,234786	− 0,395623	+ 0,828221	− 1,674928	+ 5,034029	− 20,97820	+ 110,3461
3	− 0,456049	+ 0,087008	+ 0,369041	− 0,702076	+ 1,269136	− 3,105333	+ 10,11708
4	− 0,260766	+ 0,367112	− 0,014568	− 0,348902	+ 0,625147	− 1,057678	+ 2,283448
5	+ 0,101218	+ 0,321925	− 0,294372	− 0,027552	+ 0,332945	− 0,571750	+ 0,924903
6	+ 0,312761	+ 0,038889	− 0,332205	+ 0,237949	+ 0,054598	− 0,319846	+ 0,531787
7	+ 0,227356	− 0,230608	− 0,128524	+ 0,322411	− 0,193887	− 0,073127	+ 0,308802
8	− 0,041045	− 0,273962	+ 0,143781	+ 0,184099	− 0,304868	+ 0,158877	+ 0,086412
9	− 0,242326	− 0,082683	+ 0,269886	− 0,067254	− 0,217577	+ 0,284832	− 0,130550
10	− 0,211709	+ 0,158435	+ 0,164179	− 0,240524	+ 0,004188	+ 0,236755	− 0,264618
11	+ 0,001064	+ 0,240472	− 0,066647	− 0,210178	+ 0,200397	+ 0,046217	− 0,246614
12	+ 0,194364	+ 0,107392	− 0,221212	− 0,015220	+ 0,230091	− 0,157348	− 0,085855
13	+ 0,200812	− 0,108427	− 0,175790	+ 0,176039	+ 0,081000	− 0,232116	+ 0,115406
14	+ 0,029158	− 0,213323	+ 0,016554	+ 0,207411	− 0,120260	− 0,130102	+ 0,222482
15	− 0,156506	− 0,123534	+ 0,181212	+ 0,063130	− 0,210673	+ 0,063274	+ 0,164272
16	− 0,191025	+ 0,069367	+ 0,178019	− 0,124998	− 0,123323	+ 0,194373	− 0,010308
17	− 0,053248	+ 0,189178	+ 0,019864	− 0,195020	+ 0,060438	+ 0,163023	− 0,165924
18	+ 0,124181	+ 0,134334	− 0,146570	− 0,093620	+ 0,182978	+ 0,002131	− 0,184280
19	+ 0,180980	− 0,036960	− 0,175144	+ 0,083050	+ 0,144546	− 0,151520	− 0,056824
20	+ 0,072807	− 0,166521	− 0,047829	+ 0,178478	− 0,014639	− 0,171891	+ 0,109179
21	− 0,095367	− 0,141131	+ 0,115528	+ 0,113625	− 0,153403	− 0,047880	+ 0,178483
22	− 0,170103	+ 0,009238	+ 0,168843	− 0,047611	− 0,153694	+ 0,110486	+ 0,098451
23	− 0,088648	+ 0,144640	+ 0,069782	− 0,159810	− 0,021144	+ 0,168084	− 0,059244
24	+ 0,069085	+ 0,144611	− 0,087161	− 0,126452	+ 0,124043	+ 0,079936	− 0,160681
25	+ 0,158173	+ 0,014793	− 0,159948	+ 0,017196	+ 0,155133	− 0,073044	− 0,122994
26	+ 0,101229	− 0,123217	− 0,087011	+ 0,139950	+ 0,049333	− 0,157027	+ 0,017102
27	− 0,044859	− 0,145193	+ 0,060991	+ 0,133898	− 0,095706	− 0,101996	+ 0,137260
28	− 0,145147	− 0,035665	+ 0,148969	+ 0,009064	− 0,151235	+ 0,039548	+ 0,135698
29	− 0,110835	+ 0,102148	+ 0,100268	− 0,119436	− 0,071438	+ 0,141606	+ 0,017726
30	+ 0,022470	+ 0,143181	− 0,036788	− 0,137049	+ 0,068766	+ 0,116419	− 0,111453
31	+ 0,131087	+ 0,053672	− 0,136281	− 0,031691	+ 0,143437	− 0,009951	− 0,139905
32	+ 0,117665	− 0,081454	− 0,110029	+ 0,098646	+ 0,088450	− 0,123523	− 0,045989
33	− 0,001844	− 0,138826	+ 0,014465	+ 0,136634	− 0,043448	− 0,124785	+ 0,085043
34	− 0,116115	− 0,068982	+ 0,122202	+ 0,051012	− 0,132704	− 0,015884	+ 0,137843
35	− 0,121878	+ 0,061230	+ 0,116630	− 0,077891	− 0,101062	+ 0,103879	+ 0,068414
36	− 0,017017	+ 0,132360	+ 0,005987	− 0,133192	+ 0,019912	+ 0,128214	− 0,059088
37	+ 0,100400	+ 0,081700	− 0,107025	− 0,067238	+ 0,119745	+ 0,038110	− 0,131075
38	+ 0,123619	− 0,041613	− 0,120334	+ 0,057447	+ 0,109751	− 0,083440	− 0,085598
39	+ 0,034067	− 0,124012	− 0,024528	+ 0,127156	+ 0,001705	− 0,127550	+ 0,034271
40	− 0,084139	− 0,091898	+ 0,091031	+ 0,080519	− 0,105122	− 0,056866	+ 0,120760
41	− 0,123031	+ 0,022766	+ 0,121365	− 0,037567	− 0,114951	+ 0,062800	+ 0,098102
42	− 0,049245	+ 0,114011	+ 0,041101	− 0,118904	− 0,021284	+ 0,120424	− 0,010256
43	+ 0,067544	+ 0,099636	− 0,074495	− 0,090974	+ 0,089305	+ 0,072282	− 0,107796
44	+ 0,120267	− 0,004863	− 0,119958	+ 0,018494	+ 0,117016	− 0,042429	− 0,106408
45	+ 0,062483	− 0,102596	− 0,055643	+ 0,108779	+ 0,038744	− 0,116528	− 0,010259
46	− 0,050842	− 0,104983	+ 0,057689	+ 0,098712	− 0,072710	− 0,084486	+ 0,092913
47	− 0,115491	− 0,011925	+ 0,116253	− 0,000443	− 0,116187	+ 0,022691	+ 0,110876
48	− 0,073722	+ 0,090012	+ 0,068096	− 0,082918	− 0,056004	+ 0,093419	+ 0,034596
49	+ 0,034263	+ 0,108013	− 0,040876	− 0,103842	+ 0,055710	+ 0,093609	− 0,076725
50	+ 0,108885	+ 0,027428	− 0,110530	− 0,016375	+ 0,112823	− 0,003933	− 0,111958

Tab. III. Die Fresnel'schen Integrale.

z	$\frac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\,dz$	$\frac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz$	z	$\frac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\,dz$	$\frac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz$	z	$\frac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\,dz$	$\frac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz$
0	0	0	15	0,569335	0,575803	34	0,537026	0,557490
0,1	0,252061	0,008404	15,5	0,524009	0,598183	34,5	0,504881	0,567709
0,2	0,355400	0,023788	16	0,474310	0,596126	35	0,472012	0,561313
0,3	0,433103	0,043422	16,5	0,432343	0,570890	35,5	0,446415	0,540094
0,4	0,496612	0,066518	17	0,407985	0,529259	36	0,434212	0,509417
0,5	0,550247	0,092366	17,5	0,406589	0,481750	36,5	0,438182	0,476871
0,6	0,596157	0,120465	18	0,427837	0,439989	37	0,457140	0,450396
0,7	0,635582	0,150396	18,5	0,465971	0,413893	37,5	0,486272	0,436345
0,8	0,669309	0,181782	19	0,511332	0,409336	38	0,518359	0,437971
0,9	0,697885	0,214277	19,5	0,552774	0,426853	38,5	0,545560	0,454670
1	0,721706	0,247558	20	0,580389	0,461646	39	0,561321	0,482187
1,5	0,779084	0,415348	20,5	0,587849	0,504875	39,5	0,561957	0,513690
2	0,753302	0,562849	21	0,573842	0,545885	40	0,547503	0,541464
2,5	0,670986	0,665787	21,5	0,542266	0,574811	40,5	0,521665	0,558799
3	0,561020	0,711685	22	0,501167	0,584939	41	0,490870	0,561608
3,5	0,452047	0,700180	22,5	0,460707	0,574246	41,5	0,462670	0,549384
4	0,368193	0,642119	23	0,430662	0,545782	42	0,443897	0,525282
4,5	0,325249	0,556489	23,5	0,418080	0,506824	42,5	0,439006	0,495309
5	0,328457	0,465942	24	0,425635	0,467029	43	0,449025	0,466829
5,5	0,372439	0,391834	24,5	0,451078	0,436051	43,5	0,471341	0,446755
6	0,443274	0,349852	25	0,487880	0,421217	44	0,500382	0,439878
6,5	0,522202	0,347099	25,5	0,526896	0,425797	44,5	0,529002	0,447720
7	0,590116	0,381195	26	0,558628	0,448300	45	0,550239	0,468209
7,5	0,631845	0,441485	26,5	0,575524	0,482927	45,5	0,559004	0,496215
8	0,639301	0,512010	27	0,573766	0,521054	46	0,553301	0,524837
8,5	0,612868	0,575457	27,5	0,554127	0,553369	46,5	0,534676	0,547099
9	0,560804	0,617214	28	0,521695	0,572142	47	0,507802	0,557650
9,5	0,496895	0,628573	28,5	0,484566	0,573060	47,5	0,479313	0,554044
10	0,436964	0,608436	29	0,451832	0,556212	48	0,456160	0,537309
10,5	0,395087	0,563176	29,5	0,431358	0,525995	48,5	0,443930	0,511657
11	0,380390	0,504784	30	0,427908	0,489969	49	0,445486	0,483428
11,5	0,395149	0,447809	30,5	0,442034	0,456974	49,5	0,460311	0,459523
12	0,434557	0,405810	31	0,470019	0,434973	50	0,484658	0,445722
12,5	0,488146	0,388217	31,5	0,504844	0,429129			
13	0,542511	0,398268	32	0,537944	0,440605			
13,5	0,584583	0,432489	32,5	0,561307	0,466343			
14	0,604721	0,481770	33	0,569407	0,499873			
14,5	0,598871	0,533736	33,5	0,560508	0,532930			

Tab. III a. Maxima und Minima der Fresnel'schen Integrale.

$z=\frac{2n+1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\int_0^z I_{-\frac{1}{2}}\,dz$	$z=n\pi$	$\frac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz$	$z=\frac{2n+1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\int_z^z I_{-\frac{1}{2}}\,dz$	$z=n\pi$	$\frac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz$
1,570796	0,779893	3,141593	0,713972	26,703538	0,577121	28,274334	0,574957
4,712389	0,321056	6,283185	0,343415	29,845130	0,427036	31,415927	0,428877
7,853982	0,640807	9,424778	0,628940	32,986723	0,569413	34,557519	0,567822
10,995574	0,380389	12,566371	0,387969	36,128316	0,433666	37,699112	0,435059
14,137167	0,605721	15,707963	0,600361	39,269908	0,563631	40,840704	0,562398
17,278760	0,404260	18,849556	0,408301	42,411501	0,438767	43,982297	0,439868
20,420352	0,588128	21,991149	0,584942	45,553093	0,559088	47,123890	0,558096
23,561945	0,417922	25,132741	0,420516	48,694686	0,442848	50,265482	0,443747

Tab. III b. Interpolationstafel für $\frac{1}{2}\int_0^z \mathrm{I}_{-\frac{1}{2}}\,dz$.

z	a	b	c	d	e	f
1	+ 215550	— 221737	+ 46969	— 20852	+ 20887	— 16244 *
2	— 117393	— 113580	+ 37273	+ 2157	— 413	— 447 **
3	— 228024	+ 2750	+ 36643	— 3075	— 1209	+ 57
4	— 130383	+ 83629	+ 14422	— 7284	— 327	+ 204
5	+ 50609	+ 83012	— 13885	— 5886	+ 835	+ 154
6	+ 156381	+ 16238	— 26785	— 205	+ 1260	— 21
7	+ 113678	— 53592	— 16298	+ 4927	+ 645	— 166
8	— 20522	— 69132	+ 6288	+ 5453	— 433	— 165
9	— 121163	— 24036	+ 21022	+ 1392	— 1051	— 27
10	— 105854	+ 36962	+ 16366	— 3449	— 733	+ 125
11	+ 532	+ 60130	— 1911	— 4916	+ 181	+ 157
12	+ 97182	+ 28873	— 16971	— 2033	+ 868	+ 55
13	+ 100406	— 25176	— 16064	+ 2390	+ 756	— 87
14	+ 14579	— 53071	— 1163	+ 4415	— 5	— 145
15	— 78253	— 32188	+ 13743	+ 2439	— 712	— 72
16	— 95513	+ 15849	+ 15573	— 1557	— 752	+ 59
17	— 26624	+ 46903	+ 3514	— 3943	— 128	+ 131
18	+ 62091	+ 34446	— 10978	— 2707	+ 575	+ 84
19	+ 90490	— 8049	— 14930	+ 865	+ 733	— 33
20	+ 36403	— 41175	— 5377	+ 3488	+ 233	— 117
21	— 47683	— 35850	+ 8512	+ 2878	— 451	— 92
22	— 85051	+ 1343	+ 14148	— 272	— 702	+ 14
23	— 44324	+ 35678	+ 6867	— 3041	— 316	+ 103
24	+ 34542	+ 36513	— 6262	— 2971	+ 336	+ 96
25	+ 79087	+ 4489	— 13236	— 241	+ 661	+ 4
26	+ 50614	— 30318	— 8044	+ 2599	+ 381	— 89
27	— 22429	— 36506	+ 4188	+ 2998	— 231	— 98
28	— 72574	— 9564	+ 12206	+ 687	— 613	— 19
29	— 55417	+ 25059	+ 8945	— 2162	— 431	+ 73
30	+ 11235	+ 35889	— 2271	— 2968	+ 133	+ 98
31	+ 65543	+ 13947	— 11071	— 1071	+ 559	+ 33
32	+ 58833	— 19904	— 9596	+ 1732	+ 468	— 60
33	— 922	— 34713	+ 504	+ 2886	— 43	— 96
34	— 58058	— 17673	+ 9847	+ 1399	— 500	— 44
35	— 60939	+ 14872	+ 10013	— 1310	— 492	+ 46
36	— 8508	+ 33031	+ 1112	— 2758	— 40	+ 92
37	+ 50200	+ 20764	— 8552	— 1671	+ 436	+ 54
38	+ 61810	— 9997	— 10212	+ 899	+ 505	— 32
39	+ 17034	— 30894	— 2574	+ 2589	+ 115	— 87
40	— 42069	— 23237	+ 7204	+ 1890	— 369	— 61
41	— 61516	+ 5317	+ 10208	— 505	— 507	+ 19
42	— 24622	+ 28356	+ 3878	— 2384	— 182	+ 80
43	+ 33772	+ 25105	— 5823	— 2057	+ 300	+ 67
44	+ 60133	— 874	— 10015	+ 130	+ 500	— 6
45	+ 31241	— 25476	— 5018	+ 2150	+ 241	— 72
46	— 25421	— 26384	+ 4428	+ 2173	— 231	— 71
47	— 57746	— 3286	+ 9647	+ 223	— 483	— 6
48	— 36861	+ 22311	+ 5988	— 1852	— 292	+ 62
49	+ 17131	+ 27091	— 3039	— 2241	+ 161	+ 74
50	+ 54442	+ 7129	— 9120	— 548	+ 458	+ 17

* $g = +12679$ ** $g = +162$.

Tab. III c. Interpolationstafel für $\frac{1}{2}\int_0^z I_{\frac{1}{2}}\,dz$.

z	a′	b′	c′	d′	e′	f′
1	+ 335698	+ 23850	— 49912	+ 5981	— 1312	+ 1685
2	+ 256508	— 90760	— 24953	+ 7651	+ 548	— 131
3	+ 32504	— 116721	+ 7702	+ 7709	— 582	— 193
4	— 150960	— 55757	+ 29413	+ 2499	— 1352	— 44
5	— 171084	+ 33859	+ 25972	— 3951	— 1041	+ 138
6	— 45508	+ 80087	+ 3083	— 6566	+ 55	+ 199
7	+ 99065	+ 53301	— 18965	— 3657	+ 1002	+ 94
8	+ 139546	— 14622	— 22558	+ 1894	+ 1043	— 79
9	+ 54804	— 62104	— 6806	+ 5283	+ 218	— 173
10	— 68632	— 51211	+ 13117	+ 3888	— 716	— 114
11	— 120284	+ 3000	+ 19915	— 698	— 965	+ 36
12	— 61794	+ 49879	+ 8896	— 4305	— 368	+ 145
13	+ 46490	+ 49309	— 9001	— 3906	+ 503	+ 122
14	+ 105620	+ 5404	— 17710	— 132	+ 877	— 6
15	+ 66984	— 40243	— 10257	+ 3506	+ 462	— 120
16	— 28714	— 47308	+ 5767	+ 3833	— 333	— 123
17	— 93023	— 11944	+ 15725	+ 760	— 789	— 18
18	— 70617	+ 32026	+ 11167	— 2813	— 524	+ 98
19	+ 13717	+ 45064	— 3075	— 3702	+ 165	+ 121
20	+ 81440	+ 17184	— 13851	— 1255	+ 701	+ 36
21	+ 72836	— 24709	— 11740	+ 2193	+ 563	— 77
22	— 753	— 42517	+ 770	+ 3525	— 70	— 116
23	— 70393	— 21397	+ 12037	+ 1648	— 614	— 50
24	— 73745	+ 18039	+ 12035	— 1625	— 586	+ 58
25	— 10560	+ 39649	+ 1231	— 3310	— 35	+ 110
26	+ 59662	+ 24734	— 10257	— 1959	+ 526	+ 62
27	+ 73427	— 11895	— 12087	+ 1101	+ 594	— 40
28	+ 20424	— 36469	— 2969	+ 3061	+ 126	— 102
29	— 49163	— 27285	+ 8505	+ 2197	— 439	— 70
30	— 71965	+ 6217	+ 11922	— 617	— 590	+ 24
31	— 28950	+ 33005	+ 4469	— 2783	— 205	+ 94
32	+ 38889	+ 29112	— 6783	— 2370	+ 353	+ 77
33	+ 69441	— 987	— 11561	+ 170	+ 576	— 9
34	+ 36199	— 29295	— 5745	+ 2481	+ 272	— 84
35	— 28874	— 30263	+ 5100	+ 2483	— 269	— 81
36	— 65944	— 3796	+ 11024	+ 240	— 552	— 5
37	— 42207	+ 25385	+ 6805	— 2159	— 328	+ 73
38	+ 19180	+ 30779	— 3466	— 2540	+ 186	+ 84
39	+ 61569	+ 8122	— 10329	— 610	+ 519	+ 18
40	+ 47001	— 21328	— 7654	+ 1824	+ 373	— 62
41	— 9883	— 30697	+ 1896	+ 2545	— 107	— 84
42	— 56419	— 11975	+ 9497	+ 941	— 479	— 29
43	— 50604	+ 17180	+ 8300	— 1479	— 408	+ 51
44	+ 1065	+ 30061	— 405	— 2501	+ 32	+ 83
45	+ 50604	+ 15340	— 8547	— 1230	+ 432	+ 40
46	+ 53044	— 12999	— 8745	+ 1130	+ 432	— 39
47	+ 7191	— 28911	— 993	+ 2413	+ 39	— 80
48	— 44238	— 18200	+ 7499	+ 1477	— 38	— 48
49	— 54356	+ 8843	+ 8998	— 782	— 446	+ 28
50	— 14803	+ 27295	+ 2285	— 2285	— 105	+ 76

Tab. IV.

z	$\frac{\sin z}{z}$	$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$	z	$\frac{\sin z}{z}$	$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$
0	+ 1	1	26	+ 0,029329	0,000860
1	+ 0,841471	0,708073	27	+ 0,035421	0,001255
2	+ 0,454649	0,206705	28	+ 0,009675	0,000094
3	+ 0,047040	0,002213	29	− 0,022884	0,000524
4	− 0,189201	0,035797	30	− 0,032934	0,001085
5	− 0,191785	0,036781	31	− 0,013033	0,000170
6	− 0,046569	0,002169	32	+ 0,017232	0,000297
7	+ 0,093855	0,008809	33	+ 0,030300	0,000918
8	+ 0,123670	0,015294	34	+ 0,015561	0,000242
9	+ 0,045791	0,002097	35	− 0,012234	0,000150
10	− 0,054402	0,002960	36	− 0,027549	0,000759
11	− 0,090908	0,008264	37	− 0,017393	0,000303
12	− 0,044714	0,001999	38	+ 0,007799	0,000061
13	+ 0,032321	0,001045	39	+ 0,024713	0,000611
14	+ 0,070758	0,005007	40	+ 0,018628	0,000347
15	+ 0,043353	0,001879	41	− 0,003869	0,000015
16	− 0,017994	0,000324	42	− 0,021822	0,000476
17	− 0,056553	0,003198	43	− 0,019344	0,000374
18	− 0,041722	0,001741	44	+ 0,000402	0,000000
19	+ 0,007888	0,000062	45	+ 0,018909	0,000358
20	+ 0,045647	0,002084	46	+ 0,019604	0,000384
21	+ 0,039841	0,001587	47	+ 0,002629	0,000007
22	− 0,000402	0,000000	48	− 0,016005	0,000256
23	− 0,036792	0,001354	49	− 0,019464	0,000379
24	− 0,037732	0,001424	50	− 0,005248	0,000028
25	− 0,005294	0,000028			

Tab. IVa. Maxima und Minima.

z	$\frac{\sin z}{z}$	$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$
0	1	1
4,493409	− 0,217234	0,047190
7,725252	+ 0,128375	0,016480
10,904122	− 0,091325	0,008340
14,066194	+ 0,070913	0,005029
17,220755	− 0,057972	0,003361
20,371303	+ 0,049030	0,002404
23,519453	− 0,042480	0,001805
26,666054	+ 0,037475	0,001404
29,811599	− 0,033525	0,001124
32,956389	+ 0,030329	0,000920
36,100622	− 0,027690	0,000767
39,244432	+ 0,025473	0,000649
42,387913	− 0,023585	0,000556
45,531134	+ 0,021958	0,000482
48,674144	− 0,020540	0,000422
51,816982	+ 0,019295	0,000372

Tab. V.

y	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}(y,o)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}(y,o)$	M^2	y	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}(y,o)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}(y,o)$	M^2
0	+1	0	1				
1	0,934384	+0,323905	0,977990	31	−0,123903	+0,220766	0,064089
2	0,749798	0,593492	0,914430	32	0,196098	0,136088	0,056974
3	0,480369	0,765194	0,816276	33	0,219075	+0,028774	0,048822
4	+0,175750	0,814623	0,694499	34	0,188795	−0,074961	0,041263
5	−0,110261	0,741108	0,561399	35	0,114083	0,150517	0,035670
6	0,329219	0,567111	0,430000	36	−0,014156	0,180741	0,032868
7	0,448139	0,333027	0,311735	37	+0,086263	0,159812	0,032981
8	0,455343	+0,088400	0,215152	38	0,163003	0,094332	0,035468
9	0,361903	−0,118539	0,145026	39	0,198215	−0,001410	0,039291
10	0,198210	0,250619	0,102097	40	0,184489	+0,095698	0,043194
11	−0,006690	0,288825	0,083465	41	0,126365	0,173327	0,046010
12	+0,167756	0,235250	0,083485	42	+0,038948	0,213082	0,046921
13	0,287405	−0,111413	0,095014	43	−0,055968	0,206133	0,045623
14	0,329383	+0,047520	0,110752	44	0,135294	0,155109	0,042363
15	0,289751	0,201198	0,124436	45	0,180225	+0,073202	0,037839
16	0,183246	0,313279	0,131723	46	0,180666	−0,019241	0,033011
17	+0,038922	0,359296	0,130608	47	0,137474	0,099771	0,028853
18	−0,107200	0,331493	0,121380	48	−0,062010	0,149290	0,026133
19	0,220693	0,239689	0,106156	49	+0,026813	0,156580	0,025236
20	0,276500	+0,108121	0,088142	50	0,107243	0,120841	0,026104
21	0,264288	−0,030844	0,070800	51	0,159997	−0,051678	0,028270
22	0,190115	0,144587	0,057049	52	0,172854	+0,033421	0,030995
23	−0,074308	0,207839	0,048719	53	0,143472	0,113462	0,033458
24	+0,053892	0,208258	0,046276	54	+0,079766	0,169071	0,034948
25	0,163535	0,148793	0,048883	55	−0,002199	0,187150	0,035030
26	0,229295	−0,046392	0,054728	56	0,082233	0,163922	0,033633
27	0,237210	+0,072514	0,061527	57	0,140979	0,105670	0,031041
28	0,187556	0,178590	0,067072	58	0,164571	+0,027050	0,027815
29	+0,094276	0,246628	0,069721	59	0,147894	−0,052604	0,024640
30	−0,018795	+0,261363	0,068664	60	−0,095671	−0,114037	0,022157

Es ist $U_{\frac{1}{2}}(y,o) = o$ für: $y = 8{,}393843;\ 13{,}708882;\ 20{,}770008;\ 26{,}392951.$

Tab. V a. Maxima und Minima von $M^2 = \frac{\pi}{2y}\left(U^2_{\frac{1}{2}}(y,o) + U^2_{\frac{3}{2}}(y,o)\right)$.

y	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}(y,o)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}(y,o)$	M^2	
0	1	0	1	Max.
11,478857	+0,081566	−0,273704	0,081567	Min.
16,370562	0,132321	+0,338840	0,132321	Max.
23,938778	0,046267	−0,210063	0,046267	Min.
29,223013	0,069809	+0,254824	0,069809	Max.
36,450734	0,032576	−0,177525	0,032576	Min.
41,915772	0,046929	+0,211488	0,046929	Max.
48,982145	0,025236	−0,156841	0,025236	Min.
54,556138	+0,035181	+0,184236	0,035181	Max.

Tab. VI. $y = 3$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	+ 0,480369	+ 0,765194	0,816276	Max.
1	0,360012	0,681802	0,594462	
2	+ 0,074869	0,467239	0,223917	
3	− 0,199275	0,209246	0,083494	
4	0,308080	+ 0,002009	0,094918	
5	0,218195	− 0,098875	0,057385	
6	− 0,026336	0,096365	0,009980	
7	+ 0,122184	− 0,038009	0,016374	
8	0,139303	+ 0,018869	0,019761	
9	+ 0,045844	0,039678	0,003676	
10	− 0,062297	+ 0,024449	0,004479	
11	0,097793	− 0,003505	0,009576	
12	− 0,046239	− 0,019903	0,002534	
$\pi =$ 3,141593	− 0,227083	+ 0,174953	0,082175	Min.
4,012733	− 0,308107	0	0,094930	Max.
$2\pi =$ 6,283185	+ 0,025774	− 0,082872	0,007532	Min.
7,613048	+ 0,149321	0	0,022297	Max.
$3\pi =$ 9,424778	− 0,004524	+ 0,036555	0,001357	Min.
10,865508	− 0,098662	0	0,009734	Max.
$4\pi =$ 12,566371	+ 0,001291	− 0,019998	0,000402	Min.

Tab. VII. $y = 6$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	− 0,329219	+ 0,567111	0,430000	Max.
1	0,371999	0,461216	0,351103	
2	0,452726	+ 0,197344	0,243905	
3	0,468506	− 0,094428	0,228415	
4	0,348659	0,281975	0,201073	
5	− 0,118898	0,301908	0,105285	
6	+ 0,109936	0,184906	0,046276	
7	0,220300	− 0,024589	0,049137	
8	0,172191	+ 0,085108	0,036893	
9	+ 0,028386	0,102287	0,011268	
10	− 0,096468	+ 0,049008	0,011708	
11	0,120673	− 0,017597	0,014872	
12	− 0,048354	− 0,049397	0,004778	
2,655951	− 0,476462	0	0,227016	Min.
$\pi =$ 3,141593	− 0,460358	− 0,129767	0,228769	Max.
$2\pi =$ 6,283185	+ 0,156923	− 0,139270	0,044021	Min.
7,172727	+ 0,222767	0	0,049625	Max.
$3\pi =$ 9,424778	− 0,033336	+ 0,085254	0,008380	Min.
10,705266	− 0,125513	0	0,015753	Max.
$4\pi =$ 12,566371	+ 0,008398	− 0,046164	0,002202	Min.

Tab. VIII. $y = 9$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	− 0,361903	− 0,118539	0,145026	Min.
1	0,353304	0,189501	0,160734	
2	0,307244	0,351193	0,217736	
3	− 0,187785	0,484559	0,270060	
4	+ 0,005653	0,482554	0,232890	
5	0,210772	0,320880	0,147389	
6	0,330109	− 0,072656	0,114251	
7	0,297983	+ 0,140532	0,108543	
8	+ 0,134178	0,225532	0,068868	
9	− 0,061589	0,170512	0,032868	
10	0,174681	+ 0,041701	0,032252	
11	0,152554	− 0,067987	0,027895	
12	− 0,035964	− 0,099361	0,011166	
$\pi =$ 3,141593	− 0,164130	− 0,494173	0,271146	Max.
$2\pi =$ 6,283185	+ 0,337347	− 0,003524	0,113816	Min.
6,298182	+ 0,337366	0	0,113816	Max.
$3\pi =$ 9,424778	− 0,124867	+ 0,119293	0,029823	Min.
10,324472	− 0,182173	0	0,033187	Max.
$4\pi =$ 12,566371	+ 0,035216	− 0,081397	0,007859	Min.

Tab. IX. $y = 12$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	+ 0,167756	− 0,235250	0,083485	Min.
1	0,178231	0,266355	0,102711	
2	0,215527	0,321521	0,149828	
3	0,283786	0,317311	0,181221	
4	0,360613	− 0,194424	0,167843	
5	0,392272	+ 0,027473	0,154632	
6	0,324386	0,252054	0,168757	
7	+ 0,149272	0,365919	0,156179	
8	− 0,071244	0,313592	0,103416	
9	0,233349	+ 0,134322	0,072494	
10	0,256987	− 0,064216	0,070166	
11	− 0,142253	0,175709	0,051110	
12	+ 0,027778	− 0,159252	0,026133	
$\pi =$ 3,141593	+ 0,295115	− 0,307656	0,181745	Max.
4,886874	+ 0,392914	0	0,154382	Min.
$2\pi =$ 6,283185	+ 0,284260	+ 0,299566	0,170543	Max.
$3\pi =$ 9,424778	− 0,262484	+ 0,045280	0,070948	Min.
9,649593	− 0,266479	0	0,071011	Max.
$4\pi =$ 12,566371	+ 0,105614	− 0,106076	0,022406	Min.

Tab. X. $y = 15$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	+ 0,289751	+ 0,201198	0,124436	Max.
1	0,283410	0,180102	0,112758	
2	0,267517	0,143852	0,092258	
3	0,244064	0,148242	0,081543	
4	0,201618	0,223007	0,090382	
5	+ 0,117395	0,334189	0,125464	
6	− 0,020023	0,397859	0,158693	
7	0,184450	0,338868	0,148854	
8	0,310224	+ 0,151291	0,119128	
9	0,326833	− 0,086668	0,114331	
10	0,210432	0,257720	0,110701	
11	− 0,012435	0,280402	0,078780	
12	+ 0,163009	− 0,160762	0,052416	
$\pi =$ 3,141593	+ 0,239679	+ 0,154586	0,081343	Min.
$2\pi =$ 6,283185	− 0,066122	+ 0,395517	0,160806	Max.
8,754610	− 0,336458	0	0,113204	Min.
$3\pi =$ 9,424778	− 0,292354	− 0,173884	0,115706	Max.
$4\pi =$ 12,566371	+ 0,214554	− 0,061003	0,049755	Min.

Tab. XI. $y = 18$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	− 0,107200	+ 0,331493	0,121380	Max.
1	0,116001	0,302853	0,105176	
2	0,138371	0,239080	0,076306	
3	0,167277	0,185890	0,062537	
4	0,201124	0,168709	0,068913	
5	0,243093	0,165241	0,086399	
6	0,288377	0,121287	0,097872	
7	0,312091	+ 0,000083	0,097401	
8	0,275567	− 0,174865	0,106515	
9	− 0,154574	0,321709	0,127390	
10	+ 0,029702	0,351341	0,124323	
11	0,206000	0,232313	0,096405	
12	+ 0,287976	− 0,020607	0,083355	
$\pi =$ 3,141593	− 0,171709	+ 0,181240	0,062332	Min.
$2\pi =$ 6,283185	− 0,298876	+ 0,095109	0,098372	Max.
7,000524	− 0,312091	0	0,097401	Min.
$3\pi =$ 9,424778	− 0,080831	− 0,352356	0,130688	Max.
12,093412	+ 0,288618	0	0,083301	Min.
$4\pi =$ 12,566371	+ 0,272299	+ 0,097817	0,083715	Max.

Tab. XII. $y = 21$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	— 0,264288	— 0,030844	0,070800	Min.
1	0,263211	0,059015	0,072763	
2	0,256538	0,123150	0,080978	
3	0,237993	0,179979	0,089033	
4	0,205632	0,200978	0,082677	
5	0,162961	0,195814	0,064899	
6	0,111738	0,199592	0,052322	
7	— 0,045236	0,233987	0,056796	
8	+ 0,046688	0,277023	0,078922	
9	0,160350	0,271512	0,099431	
10	0,263815	— 0,170403	0,098636	
11	0,304107	+ 0,015653	0,092726	
12	+ 0,239676	+ 0,209399	0,101292	
$\pi = 3{,}141593$	— 0,234210	— 0,185344	0,089207	Max.
$2\pi = 6{,}283185$	— 0,094949	— 0,206258	0,051557	Min.
$3\pi = 9{,}424778$	+ 0,208402	— 0,241299	0,101657	Max.
10,924173	+ 0,304417	0	0,092670	Min.
$4\pi = 12{,}566371$	+ 0,156917	+ 0,283202	0,104826	Max.

Tab. XIII. $y = 24$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	+ 0,053892	— 0,208258	0,046276	Min.
1	0,058424	0,226243	0,054599	
2	0,073812	0,261975	0,074079	
3	0,102262	0,276727	0,087035	
4	0,140781	0,244933	0,079812	
5	0,180315	0,175571	0,063339	
6	0,211625	0,102151	0,055220	
7	0,231541	0,050419	0,056153	
8	0,241406	— 0,013703	0,058465	
9	0,237585	+ 0,039773	0,058029	
10	0,204586	0,131493	0,059146	
11	+ 0,122602	0,239957	0,072611	
12	— 0,010935	+ 0,302906	0,091872	
$\pi = 3{,}141593$	+ 0,107264	— 0,275246	0,087266	Max.
$2\pi = 6{,}283185$	+ 0,218385	— 0,084903	0,054900	Min.
8,320914	+ 0,242170	0	0,058646	Max.
$3\pi = 9{,}424778$	+ 0,228380	+ 0,074135	0,057654	Min.
$4\pi = 12{,}566371$	— 0,098304	+ 0,293514	0,095814	Max.

Tab. XIV. $y = 27$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	+ 0,237210	+ 0,072514	0,061527	Max.
1	0,235988	0,059869	0,059275	
2	0,233383	0,037477	0,055872	
3	0,230191	0,037686	0,054408	
4	0,222907	0,079571	0,056019	
5	0,203729	0,150003	0,064006	
6	0,166118	0,212948	0,072942	
7	0,110792	0,238762	0,069282	
8	+ 0,045488	0,227077	0,053633	
9	− 0,021983	0,202212	0,041373	
10	0,089763	0,185047	0,042300	
11	0,158774	0,167750	0,053349	
12	− 0,221118	+ 0,117177	0,062624	
$\pi = 3{,}141593$	+ 0,229558	+ 0,041017	0,054377	Min.
$2\pi = 6{,}283185$	+ 0,152002	+ 0,224672	0,073582	Max.
$3\pi = 9{,}424778$	− 0,050639	+ 0,193643	0,040062	Min.
$4\pi = 12{,}566371$	− 0,244665	+ 0,062651	0,063786	Max.

Tab. XV. $y = 30$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,U_{\frac{3}{2}}$	M^2	
0	− 0,018795	+ 0,261363	0,068664	Max.
1	0,023017	0,245691	0,060894	
2	0,034390	0,212368	0,046283	
3	0,050927	0,189678	0,038571	
4	0,073038	0,193658	0,042838	
5	0,103499	0,211696	0,055527	
6	0,142834	0,211666	0,065204	
7	0,184805	0,169129	0,062757	
8	0,217323	+ 0,088459	0,055054	
9	0,229268	− 0,000930	0,052565	
10	0,217119	0,069782	0,052010	
11	0,184503	0,112438	0,046684	
12	− 0,134977	− 0,146052	0,039550	
$\pi = 3{,}141593$	− 0,053657	+ 0,188580	0,038442	Min.
$2\pi = 6{,}283185$	− 0,154910	+ 0,204361	0,065760	Max.
8,988746	− 0,229270	0	0,052565	Min.
$3\pi = 9{,}424778$	− 0,226942	− 0,033693	0,052638	Max.
$4\pi = 12{,}566371$	− 0,098598	− 0,168028	0,037955	Min.

Tab. XVI.

y	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{1}{2}}(y,o)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{3}{2}}(y,o)$	M_1^2	y	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{1}{2}}(y,o)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{3}{2}}(y,o)$	M_1^2
0	$+\infty$	$-\infty$	∞				
1	0,676763	0,268233	0,529957	31	$+$ 0,032160	$-$ 0,001025	0,001035
2	0,404763	0,116100	0,177312	32	0,031161	0,000963	0,000972
3	0,291006	0,066206	0,089068	33	0,030222	0,000906	0,000914
4	0,227301	0,042772	0,053495	34	0,029338	0,000854	0,000861
5	0,186395	0,029936	0,035639	35	0,028504	0,000807	0,000813
6	0,157874	0,022096	0,025413	36	0,027715	0,000764	0,000769
7	0,136853	0,016960	0,019016	37	0,026969	0,000723	0,000728
8	0,120723	0,013410	0,014754	38	0,026262	0,000686	0,000690
9	0,107961	0,010861	0,011774	39	0,025592	0,000651	0,000655
10	0,097616	0,008968	0,009609	40	0,024954	0,000619	0,000623
11	0,089066	0,007526	0,007989	41	0,024348	0,000590	0,000593
12	0,081875	0,006403	0,006704	42	0,023770	0,000562	0,000565
13	0,075753	0,005511	0,005769	43	0,023219	0,000537	0,000539
14	0,070475	0,004792	0,004990	44	0,022693	0,000513	0,000515
15	0,065880	0,004203	0,004358	45	0,022190	0,000491	0,000493
16	0,061844	0,003716	0,003838	46	0,021709	0,000469	0,000472
17	0,058270	0,003308	0,003406	47	0,021248	0,000450	0,000452
18	0,055085	0,002964	0,003043	48	0,020807	0,000431	0,000433
19	0,052229	0,002675	0,002735	49	0,020383	0,000414	0,000416
20	0,049652	0,002417	0,002471	50	0,019976	0,000398	0,000399
21	0,047317	0,002199	0,002244	51	0,019585	0,000382	0,000384
22	0,045191	0,002008	0,002046	52	0,019210	0,000368	0,000369
23	0,043247	0,001842	0,001874	53	0,018848	0,000354	0,000355
24	0,041462	0,001695	0,001726	54	0,018500	0,000341	0,000342
25	0,039818	0,001565	0,001588	55	0,018167	0,000329	0,000330
26	0,038299	0,001449	0,001469	56	0,017840	0,000317	0,000318
27	0,036891	0,001345	0,001363	57	0,017528	0,000306	0,000307
28	0,035583	0,001253	0,001268	58	0,017226	0,000296	0,000297
29	0,034364	0,001169	0,001182	59	0,016935	0,000286	0,000287
30	$+$ 0,033226	$-$ 0,001094	0,001105	60	$+$ 0,016653	$-$ 0,000277	0,000277

Tab. XVII. $y = 3$; $\frac{\pi}{2y} = 0{,}523599$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{1}{2}}$	M_1^2	
0	− 0,066206	+ 0,291006	0,089068	Max.
1	− 0,100324	+ 0,123510	0,025319	
2	− 0,061454	− 0,243405	0,063023	
3	+ 0,235062	− 0,369503	0,191786	
4	+ 0,394837	+ 0,173783	0,186097	
5	− 0,339816	+ 0,614433	0,493002	
6	− 0,683636	− 0,398944	0,626515	
7	+ 0,741513	− 0,412215	0,719763	
8	− 0,132918	+ 0,689312	0,492819	
9	+ 0,101820	− 0,681755	0,475157	
10	− 0,136343	+ 0,744252	0,572500	
11	+ 0,224042	− 0,651595	0,474771	
12	− 0,707499	+ 0,273923	0,575589	
1,355045	− 0,108747	0	0,011826	Min.
$\pi =$ 3,141593	+ 0,286287	− 0,334998	0,194184	Max.
3,770983	+ 0,420556	0	0,176867	Min.
5,703746	− 0,800801	0	0,641282	Max.
$2\pi =$ 6,283185	− 0,358374	− 0,696084	0,612967	Min.
7,241928	+ 0,862690	0	0,744234	Max.
8,449143	− 0,616682	0	0,380297	Min.
$3\pi =$ 9,424778	+ 0,706199	− 0,099356	0,508588	Max.
9,469022	+ 0,713138	0	0,508566	Min.
10,436026	− 0,813071	0	0,661084	Max.
11,302479	+ 0,633737	0	0,401623	Min.
12,097095	− 0,761689	0	0,580171	Max.
$4\pi =$ 12,566371	+ 0,235775	− 0,704553	0,551985	Min.

Tab. XXVIII. $y = 6$; $\frac{\pi}{2y} = 0{,}261799$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{1}{2}}$	M_1^2	
0	− 0,022096	+ 0,157874	0,025413	Max.
1	− 0,031878	+ 0,078963	0,007251	
2	− 0,028608	− 0,088878	0,008718	
3	+ 0,035164	− 0,184515	0,035284	
4	+ 0,121341	− 0,079739	0,021082	
5	+ 0,087144	+ 0,166436	0,035295	
6	− 0,136361	+ 0,263577	0,088067	
7	− 0,291308	− 0,032136	0,085893	
8	+ 0,018031	− 0,402780	0,162557	
9	+ 0,486823	− 0,124946	0,252608	
10	+ 0,125000	+ 0,510258	0,275988	
11	− 0,614013	+ 0,118108	0,390961	
12	− 0,008773	− 0,559527	0,313148	
1,483481	− 0,035690	0	0,001274	Min.
$\pi =$ 3,141593	+ 0,048513	− 0,183151	0,035898	Max.
4,344992	+ 0,131075	0	0,017181	Min.
$2\pi =$ 6,283185	− 0,207287	+ 0,220104	0,091414	Max.
6,927621	− 0,292654	0	0,085646	Min.
9,178517	+ 0,503939	0	0,253955	Max.
$3\pi =$ 9,424778	+ 0,468922	+ 0,182907	0,253343	Min.
11,120300	− 0,627169	0	0,393341	Max.
$4\pi =$ 12,566371	+ 0,491805	− 0,213846	0,287602	Min.

Tab. XIX. $y = 9$; $\frac{\pi}{2y} = 0{,}174533$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,V_{\frac{1}{2}}$	M_1^2	
0	− 0,010861	+ 0,107961	0,011774	Max.
1	− 0,015380	+ 0,056142	0,003388	
2	− 0,014754	− 0,052894	0,003015	
3	+ 0,011693	− 0,117488	0,013940	
4	+ 0,051058	− 0,067257	0,007130	
5	+ 0,051515	+ 0,065345	0,006924	
6	− 0,021932	+ 0,152288	0,023673	
7	− 0,114868	+ 0,076598	0,019062	
8	− 0,096105	− 0,123040	0,024375	
9	+ 0,085823	− 0,220387	0,055936	
10	+ 0,238107	− 0,022638	0,057207	
11	+ 0,068917	+ 0,286249	0,086688	
12	− 0,311131	+ 0,214989	0,143023	
1,524682	− 0,017363	0	0,000301	Min.
$\pi =$ 3,141593	+ 0,017389	− 0,117897	0,014202	Max.
4,533669	+ 0,059757	0	0,003571	Min.
$2\pi =$ 6,283185	− 0,051341	+ 0,149626	0,025024	Max.
7,410200	− 0,127813	0	0,016336	Min.
$3\pi =$ 9,424778	+ 0,173489	− 0,173140	0,060076	Max.
10,068659	+ 0,238976	0	0,057110	Min.
12,474517	− 0,384354	0	0,147728	Max.
$4\pi =$ 12,566371	− 0,381260	− 0,048516	0,147713	Min.

Tab. XX. $y = 12$; $\frac{\pi}{2y} = 0{,}130900$.

z	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, V_{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, V_{\frac{1}{2}}$	M_1^2	
0	− 0,006403	+ 0,081875	0,006704	Max.
1	− 0,008986	+ 0,043241	0,001951	
2	− 0,008828	− 0,037682	0,001498	
3	+ 0,005576	− 0,086013	0,007429	
4	+ 0,027643	− 0,052894	0,003562	
5	+ 0,030602	+ 0,037210	0,002321	
6	− 0,004264	+ 0,100764	0,010172	
7	− 0,054332	+ 0,066846	0,007420	
8	− 0,061373	− 0,048074	0,006078	
9	+ 0,009436	− 0,133922	0,018024	
10	+ 0,104472	− 0,079952	0,017307	
11	+ 0,101520	+ 0,091639	0,018704	
12	− 0,050834	+ 0,193905	0,040183	
1,542621	− 0,010174	0	0,000104	Min.
$\pi =$ 3,141593	+ 0,008708	− 0,086588	0,007573	Max.
4,610332	+ 0,033561	0	0,001126	Min.
$2\pi =$ 6,283185	− 0,019094	+ 0,102396	0,010850	Max.
7,616310	− 0,067426	0	0,004546	Min.
$3\pi =$ 9,424778	+ 0,053439	− 0,131050	0,020030	Max.
10,495338	+ 0,122268	0	0,014950	Min.
$4\pi =$ 12,566371	− 0,153614	+ 0,146314	0,045005	Max.

Tab. XXI.

x	$\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2}U_{\frac{3}{2}}(x,o)$	$\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi) + \frac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,o)$	M_1^2	x	$\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2}U_{\frac{3}{2}}(x,o)$	$\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi) + \frac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,o)$	M_1^2
0	+ 0,353553	+ 0,353553	0,250000				
1	+ 0,011550	0,852540	0,726958	16	− 0,901154	+ 0,590768	1,161085
2	− 0,441321	0,911559	1,025704	17	1,086150	+ 0,133487	1,197541
3	0,856398	0,709607	1,236959	18	1,028914	− 0,357871	1,180348
4	1,118591	+ 0,314583	1,350207	19	0,742790	0,762898	1,133738
5	1,155877	− 0,170071	1,364976	20	− 0,297218	0,982307	1,053266
6	0,954092	0,621836	1,296972	21	+ 0,199280	0,962314	0,970400
7	0,558573	0,928121	1,173413	22	0,625667	0,707729	0,892339
8	− 0,063277	1,012468	1,029096	23	0,878043	− 0,280815	0,849817
9	+ 0,412952	0,853272	0,898603	24	0,895076	+ 0,213968	0,846944
10	0,755493	0,488797	0,809692	25	0,673022	0,655532	0,882681
11	0,882151	− 0,007745	0,778250	26	+ 0,266652	0,935818	0,946857
12	0,763370	+ 0,472518	0,806007	27	− 0,224163	0,986245	1,022928
13	+ 0,429476	0,834737	0,880034	28	0,678894	0,794509	1,092141
14	− 0,036669	0,990497	0,982412	29	0,985867	+ 0,407590	1,138064
15	− 0,519949	+ 0,901880	1,083735	30	− 1,069605	− 0,079747	1,150414

x	$\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,0)$	$\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi) + \frac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,0)$	M_1^2	x	$\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,0)$	$\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi) + \frac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,0)$	M_1^2
31	— 0,909301	— 0,548153	1,127300	56	— 0,925485	— 0,490053	1,096675
32	0,543912	0,882919	1,075386	57	0,583753	0,848320	1,060414
33	— 0,062623	1,002054	1,008034	58	— 0,112034	0,999116	1,010784
34	+ 0,416995	0,876368	0,941905	59	+ 0,374288	0,905514	0,960047
35	0,777766	0,536609	0,892868	60	0,756255	— 0,590427	0,920525
36	0,931602	— 0,065940	0,872230	62	0,881892	+ 0,360308	0,907555
37	0,841069	+ 0,420420	0,884150	64	+ 0,150136	0,979026	0,981033
38	0,528555	0,803413	0,924842	66	— 0,765489	+ 0,696915	1,071664
39	+ 0,070786	0,989285	0,983695	68	1,022495	— 0,226621	1,096859
40	— 0,419955	0,932545	1,046001	70	— 0,383890	0,942457	1,035596
41	0,823321	0,647099	1,096595	72	+ 0,563821	— 0,792429	0,945837
42	1,040364	+ 0,202849	1,123506	74	0,949929	+ 0,085492	0,909674
43	1,017762	— 0,291426	1,120768	76	+ 0,420039	0,884303	0,958424
44	0,760872	0,714694	1,089714	78	— 0,538110	0,869474	1,045547
45	— 0,332420	0,963317	1,038501	80	1,043053	+ 0,054722	1,090955
46	+ 0,162859	0,976408	0,979896	82	— 0,630028	— 0,810853	1,054418
47	0,603863	0,750755	0,928283	84	+ 0,321737	0,931428	0,971073
48	0,882772	— 0,341593	0,895972	86	0,937676	— 0,196128	0,917704
49	0,931449	+ 0,150909	0,890370	88	+ 0,651968	+ 0,719031	0,942068
50	0,738121	0,606177	0,912274	90	— 0,272258	0,972672	1,021941
51	+ 0,350262	0,912757	0,955808	92	0,984835	+ 0,331614	1,079867
52	— 0,137031	0,995593	1,009983	94	— 0,830201	— 0,614745	1,067144
53	0,604321	0,834413	1,061449	96	+ 0,049884	0,996312	0,995126
54	0,927067	+ 0,468687	1,097762	98	0,846669	— 0,462265	0,930538
55	— 1,053689	— 0,012037	1,110385	100	+ 0,827979	+ 0,496409	0,931970

Tab. XXIa. Maxima und Minima.

x	$\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2}U_{\frac{1}{2}}(x,0)$	M_1^2
4,654494	— 1,170478	1,370019
11,015453	+ 0,882181	0,778243
17,268115	— 1,095112	1,199271
23,568747	+ 0,918238	0,843160
29,840313	— 1,072790	1,150879
36,131949	+ 0,933777	0,871941
42,408635	— 1,061161	1,126062
48,697020	+ 0,942902	0,889064
54,975923	— 1,053752	1,110393
61,262714	+ 0,949070	0,900734
67,542809	— 1,048510	1,099374
73,828682	+ 0,953595	0,909344
80,109502	— 1,044552	1,091088
86,394790	+ 0,957097	0,916034
92,676091	— 1,041426	1,084568
98,960977	+ 0,959909	0,921425

Tab. XXII.

x	$\frac{1}{2}V_{\frac{1}{4}}(x,0)$	$\frac{1}{2}V_{\frac{3}{4}}(x,0)$	M_2^2	x	$\frac{1}{2}V_{\frac{1}{4}}(x,0)$	$\frac{1}{2}V_{\frac{3}{4}}(x,0)$	M_2^2
0	+ 0,353553	− 0,353553	0,250000				
1	0,269989	0,107010	0,084345	41	+ 0,062195	− 0,001507	0,003871
2	0,228363	0,065502	0,056440	42	0,061457	0,001454	0,003779
3	0,201082	0,045748	0,042527	43	0,060742	0,001404	0,003692
4	0,181360	0,034127	0,034056	44	0,060051	0,001357	0,003608
5	0,166276	0,026704	0,028361	45	0,059384	0,001313	0,003528
6	0,154275	0,021593	0,024267	46	0,058739	0,001270	0,003452
7	0,144449	0,017901	0,021186	47	0,058114	0,001230	0,003379
8	0,136221	0,015132	0,018785	48	0,057508	0,001192	0,003309
9	0,129211	0,012999	0,016864	49	0,056921	0,001156	0,003241
10	0,123149	0,011314	0,015294	50	0,056352	0,001122	0,003177
11	0,117847	0,009958	0,013987	51	0,055799	0,001089	0,003115
12	0,113150	0,008848	0,012881	52	0,055263	0,001058	0,003055
13	0,108963	0,007927	0,011936	53	0,054742	0,001028	0,002998
14	0,105199	0,007152	0,011118	54	0,054234	0,001000	0,002942
15	0,101791	0,006494	0,010404	55	0,053750	0,000973	0,002890
16	0,098688	0,005930	0,009775	56	0,053260	0,000948	0,002838
17	0,095848	0,005442	0,009216	57	0,052793	0,000923	0,002788
18	0,093236	0,005016	0,008718	58	0,052337	0,000899	0,002740
19	0,090823	0,004651	0,008270	59	0,051893	0,000876	0,002694
20	0,088585	0,004313	0,007866	60	0,051461	0,000855	0,002649
21	0,086503	0,004020	0,007499	62	0,050627	0,000814	0,002564
22	0,084563	0,003758	0,007165	64	0,049832	0,000776	0,002484
23	0,082743	0,003524	0,006859	66	0,049073	0,000742	0,002409
24	0,081033	0,003313	0,006577	68	0,048348	0,000709	0,002338
25	0,079425	0,003122	0,006318	70	0,047654	0,000679	0,002271
26	0,077909	0,002947	0,006078	72	0,046989	0,000651	0,002208
27	0,076474	0,002789	0,005856	74	0,046351	0,000625	0,002149
28	0,075116	0,002644	0,005649	76	0,045738	0,000601	0,002092
29	0,073827	0,002512	0,005457	78	0,045149	0,000578	0,002039
30	0,072602	0,002390	0,005277	80	0,044582	0,000556	0,001988
31	0,071435	0,002277	0,005108	82	0,044036	0,000536	0,001939
32	0,070323	0,002173	0,004950	84	0,043510	0,000517	0,001893
33	0,069261	0,002076	0,004801	86	0,043002	0,000499	0,001849
34	0,068246	0,001987	0,004661	88	0,042511	0,000482	0,001807
35	0,067274	0,001904	0,004529	90	0,042037	0,000466	0,001767
36	0,066341	0,001827	0,004404	92	0,041578	0,000451	0,001729
37	0,065446	0,001754	0,004286	94	0,041134	0,000437	0,001692
38	0,064586	0,001686	0,004174	96	0,040704	0,000423	0,001657
39	0,063759	0,001623	0,004068	98	0,040287	0,000411	0,001623
40	+ 0,062963	− 0,001563	0,003967	100	+ 0,039882	− 0,000398	0,001591

Inhalt.

Seite

Vorwort 531

I. Abschnitt. Aufstellung und Entwickelung der Integrale 534

II. Abschnitt. Die Bessel'sche Function $I_{\pm\frac{2n+1}{2}}(z)$ 544

III. Abschnitt. Die Functionen U_ν und V_ν 555

IV. Abschnitt. Die Fresnel'schen Integrale 590

V. Abschnitt. Beugung durch einen engen Spalt 605

VI. Abschnitt. Beugung durch einen schmalen Streifen 622

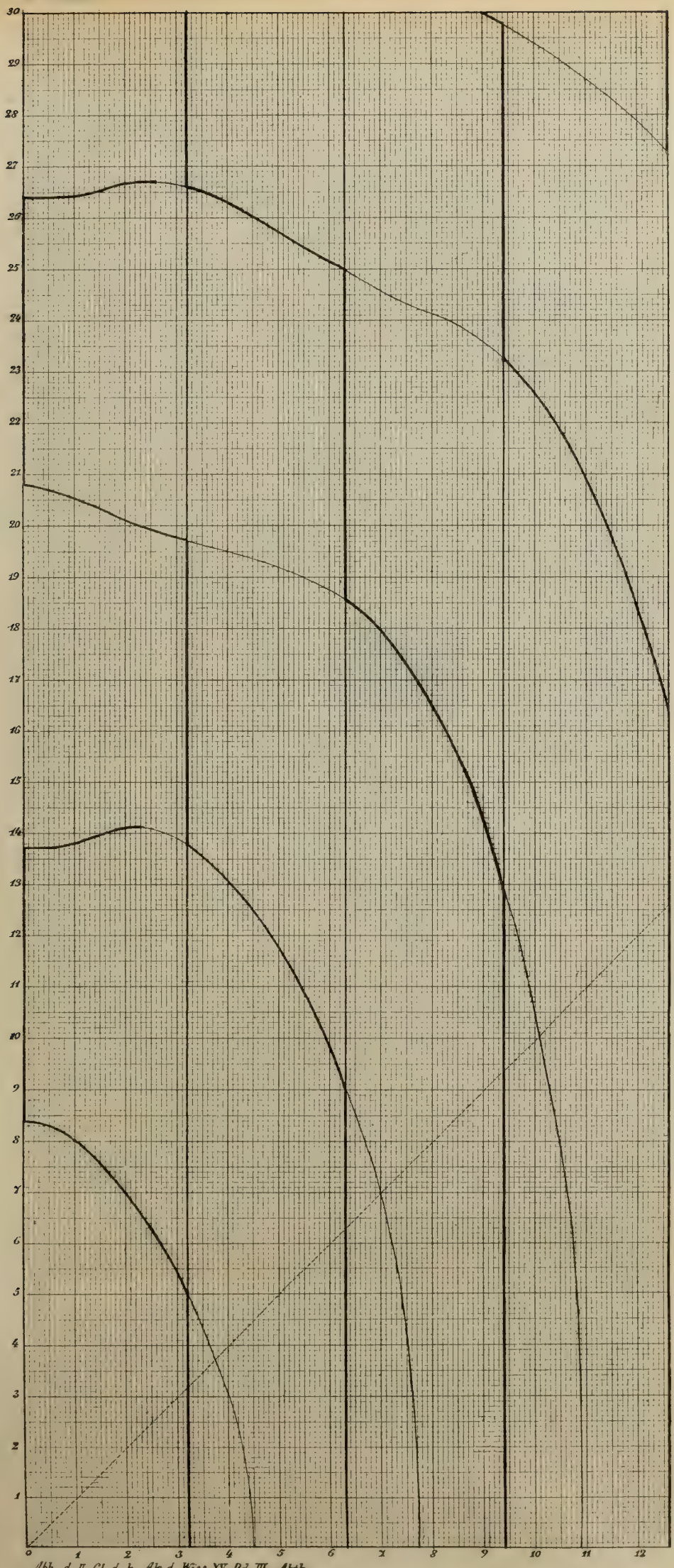
VII. Abschnitt. Beugung an einem geradlinigen Rand 630

VIII. Abschnitt. Experimentelle Darstellung der Minimumlinien $I_{\frac{1}{2}} = 0$ und $U_{\frac{3}{2}} = 0$. 641

IX. Abschnitt. Tabellen 644

Fig. 1.

E. Lommel.



BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

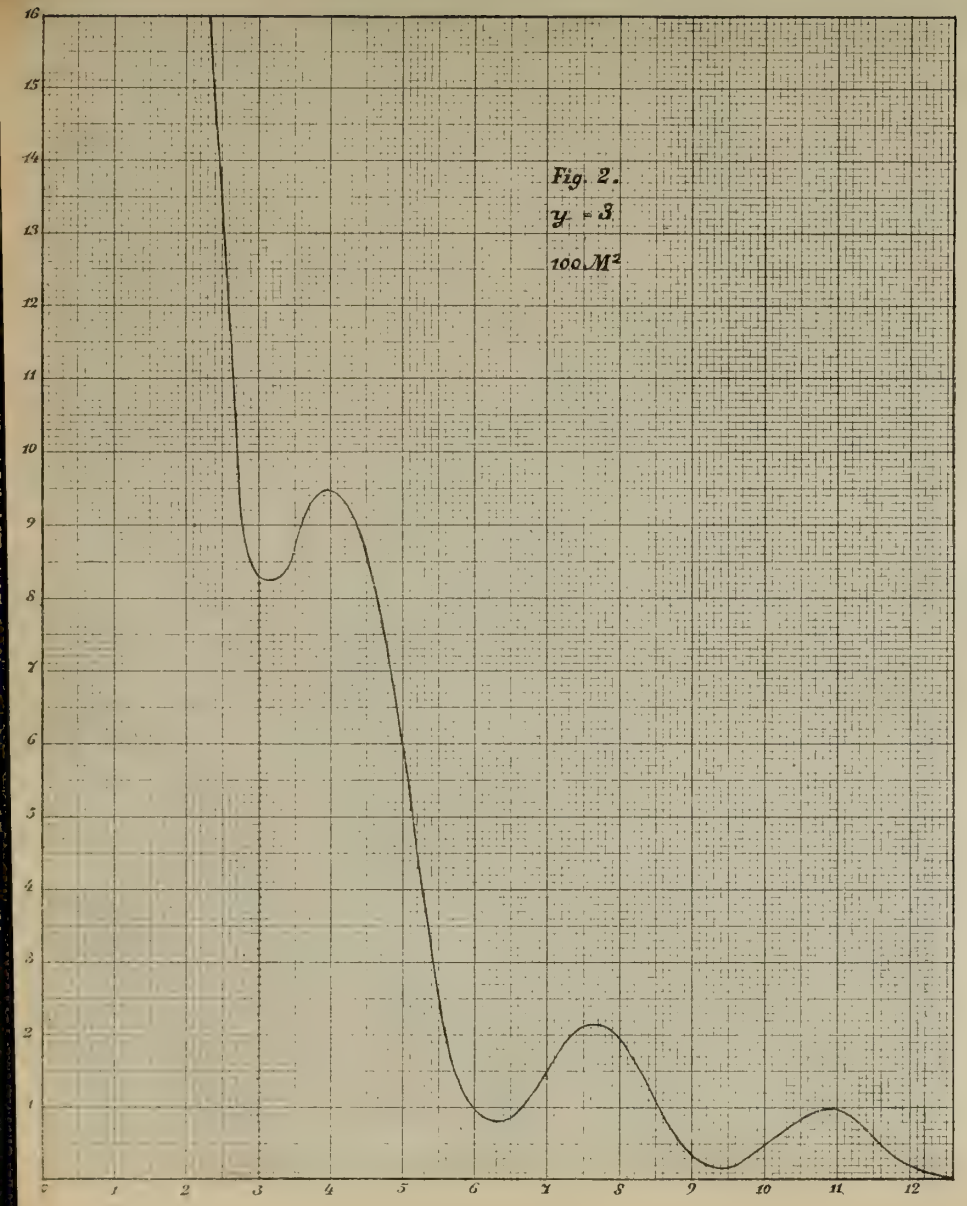


Fig. 2.
y = 3
100 M²

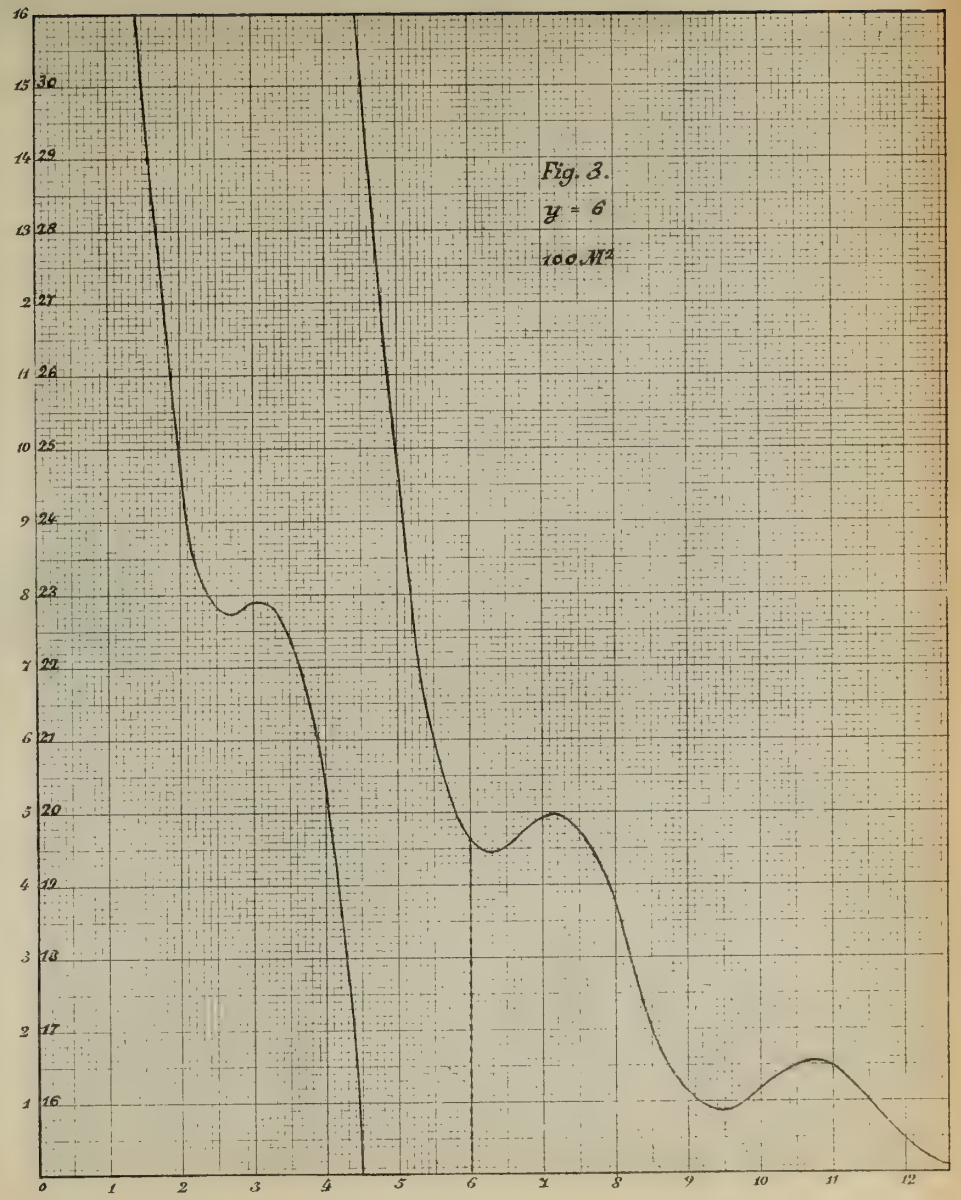


Fig. 3.
y = 6
100 M²

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

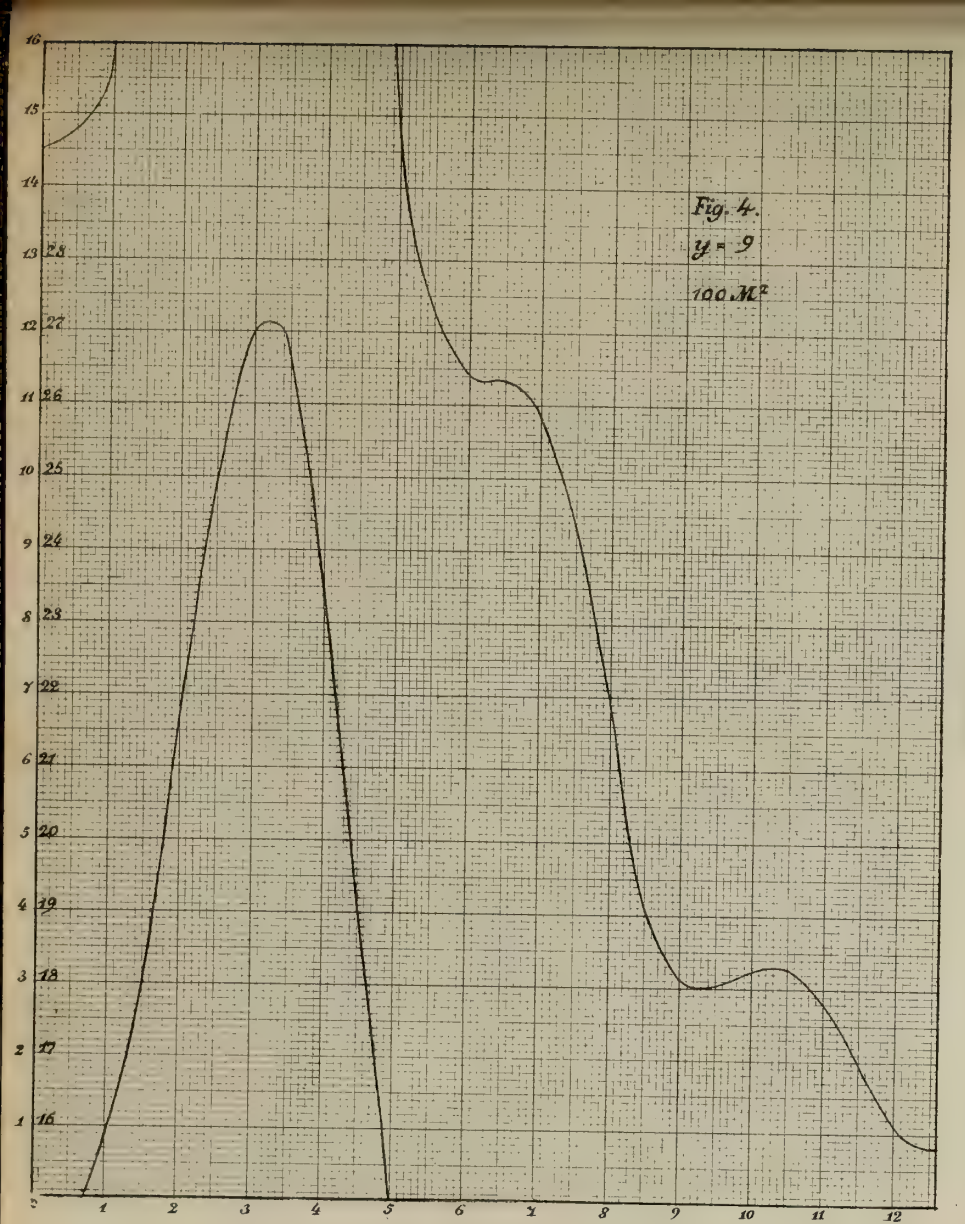


Fig. 4.
y = 9
100 M²

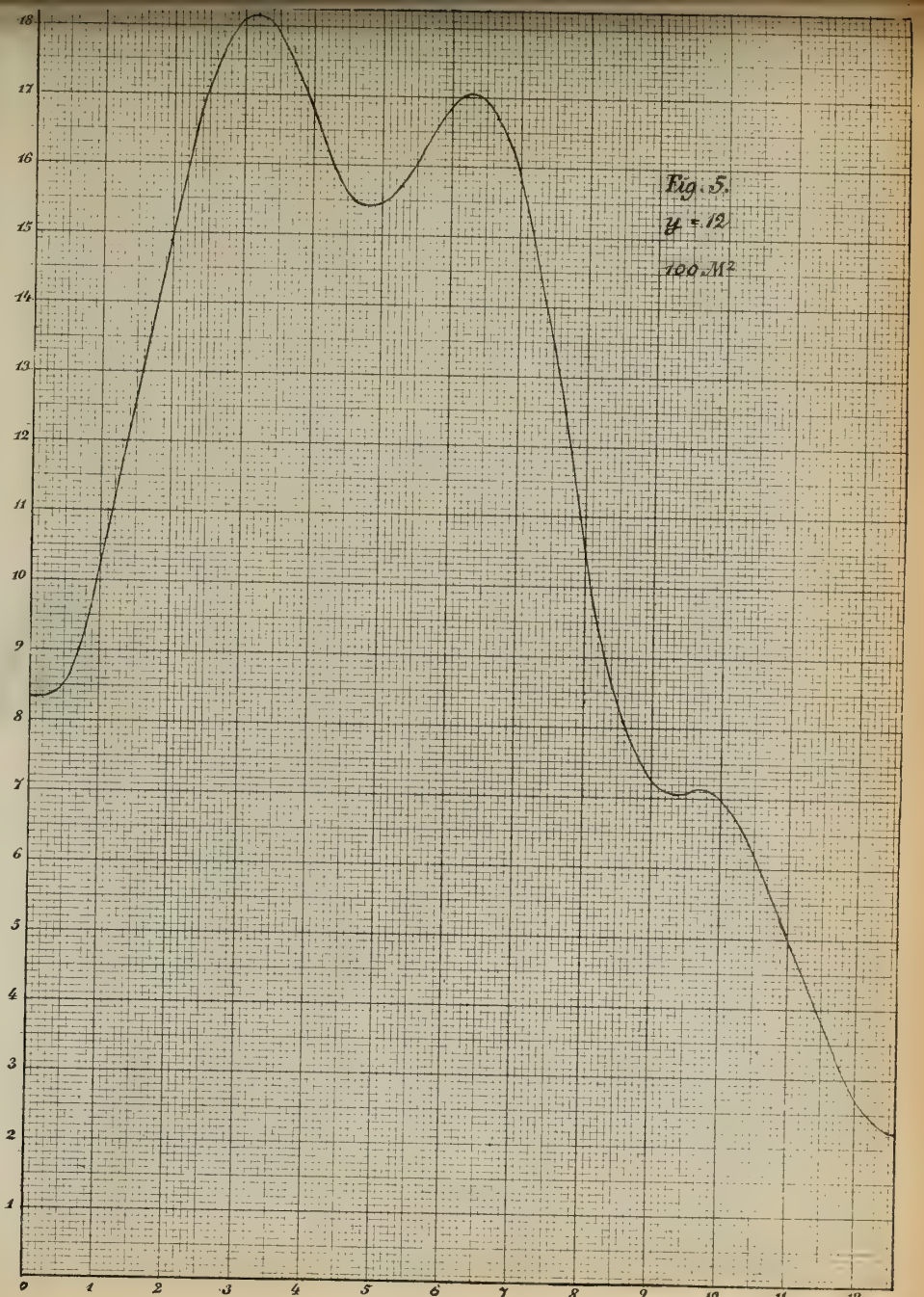


Fig. 5.
y = 12
100 M²

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

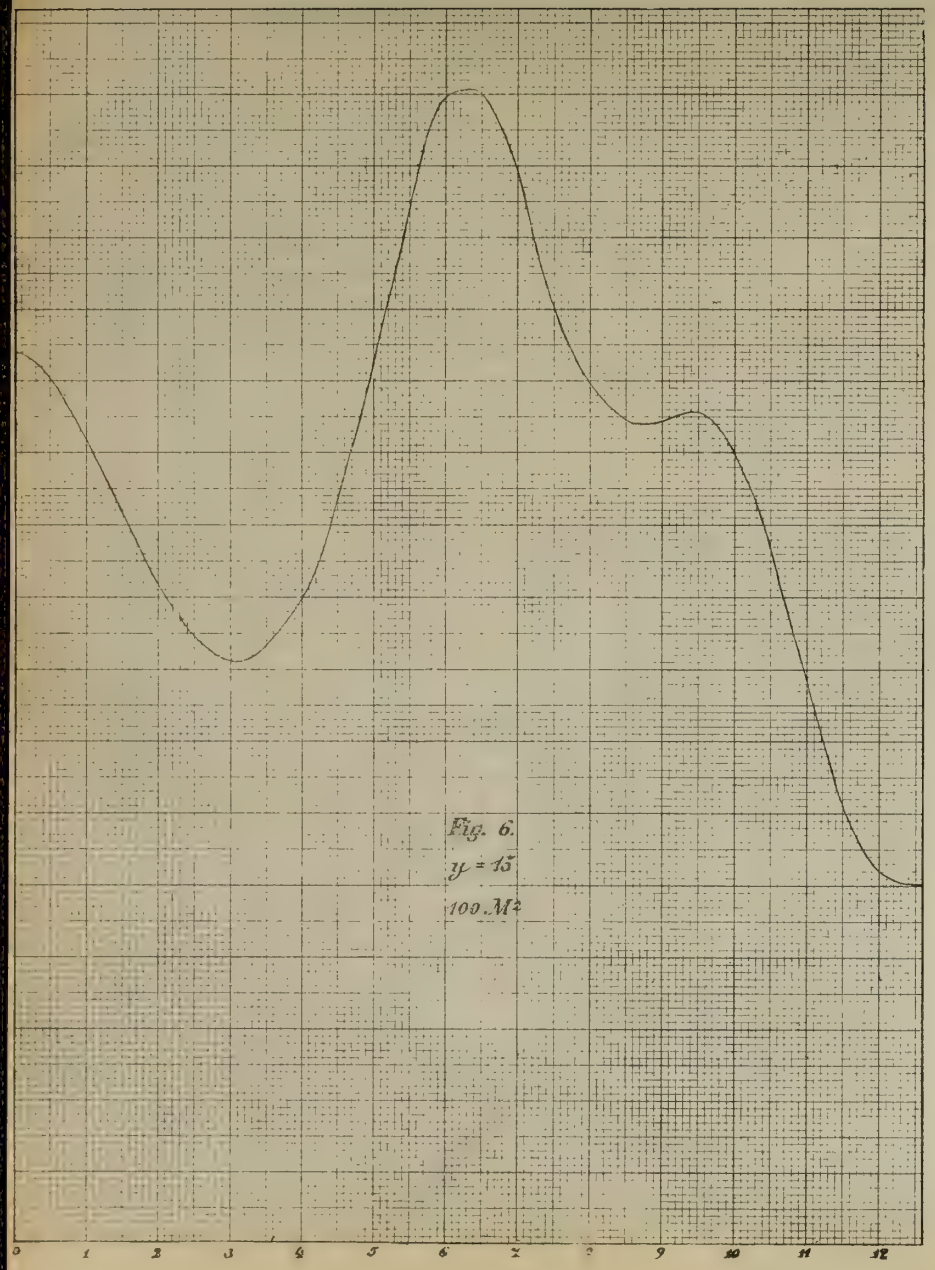


Fig. 6.
$y = 15$
100 M^2

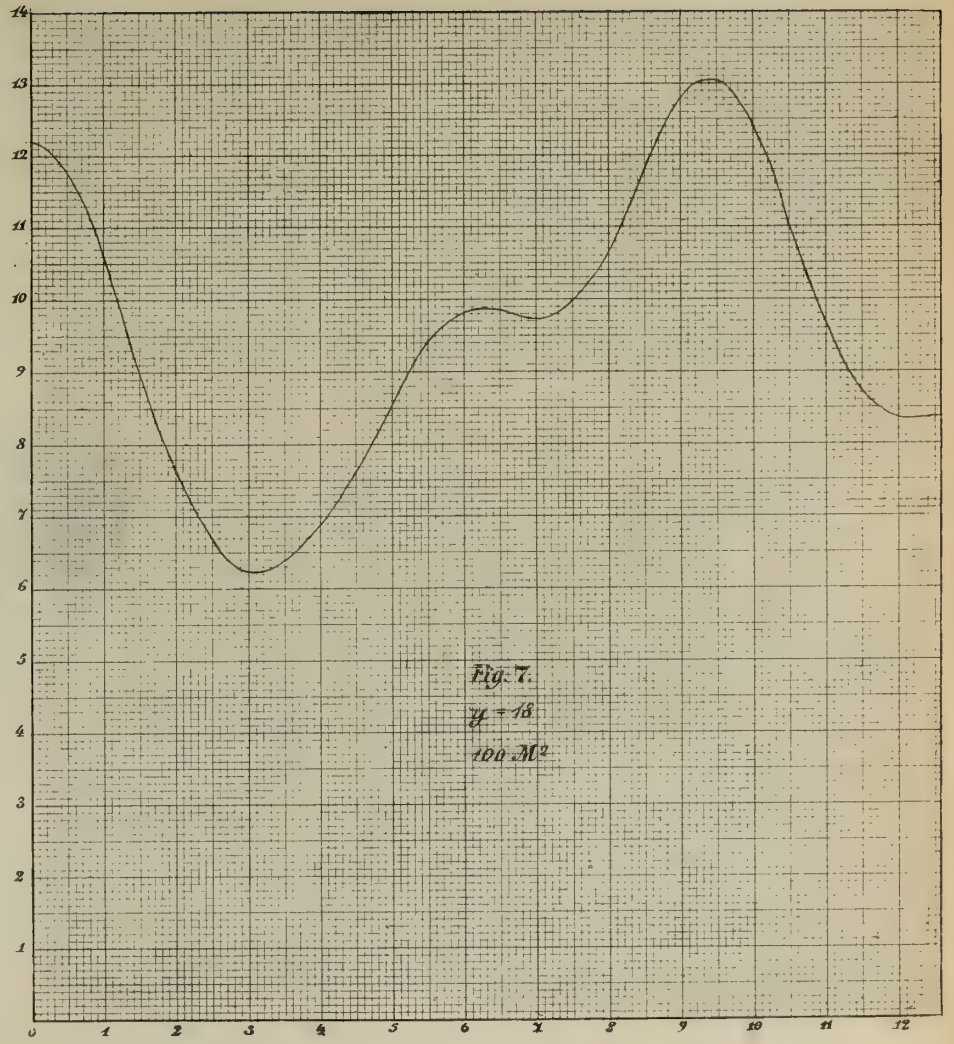


Fig. 7.
$y = 18$
100 M^2

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

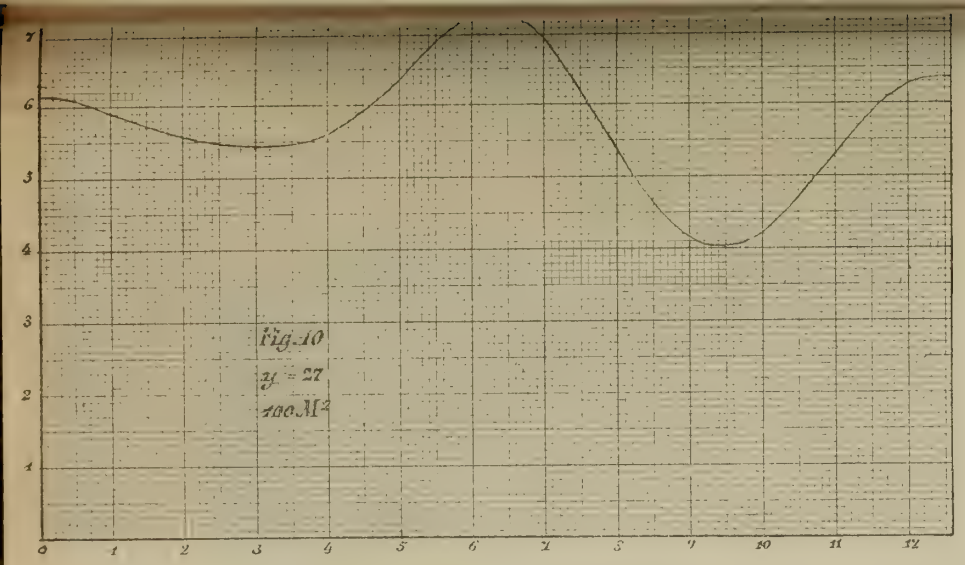


Fig. 10
y = 27
100 M²

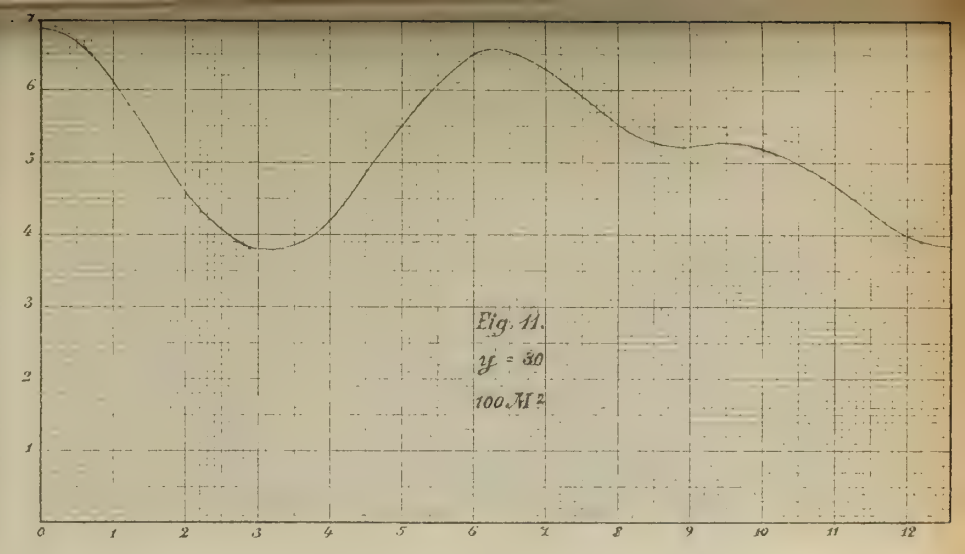


Fig. 11.
y = 30
100 M²

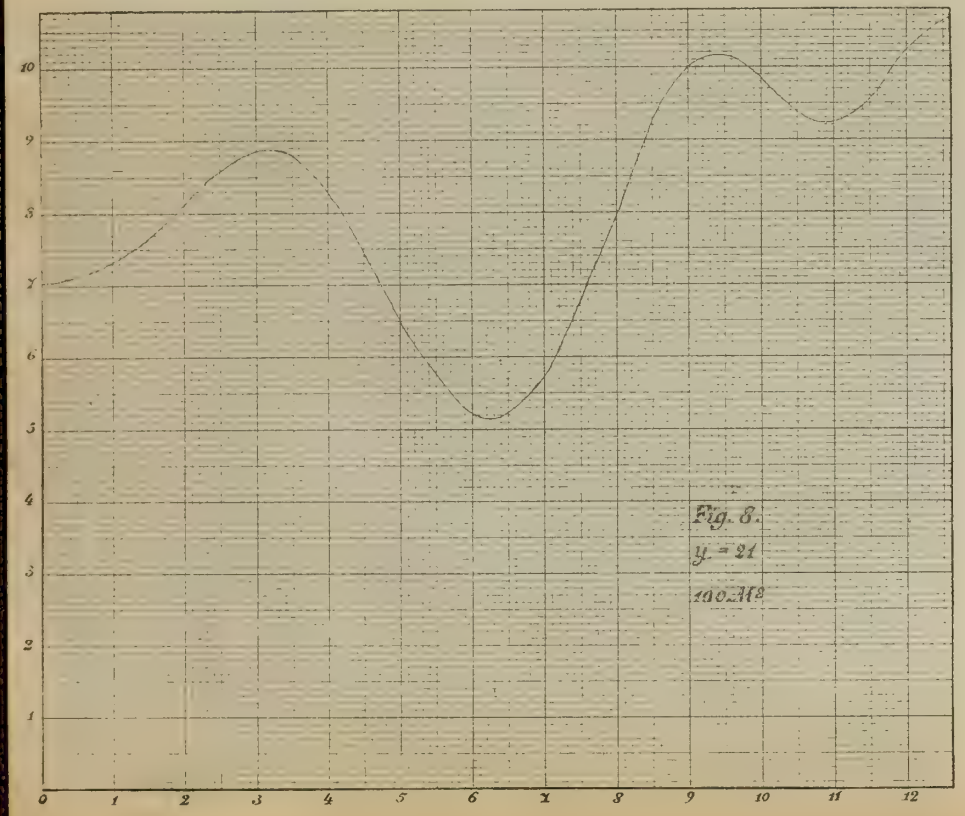


Fig. 8.
y = 21
100 M²

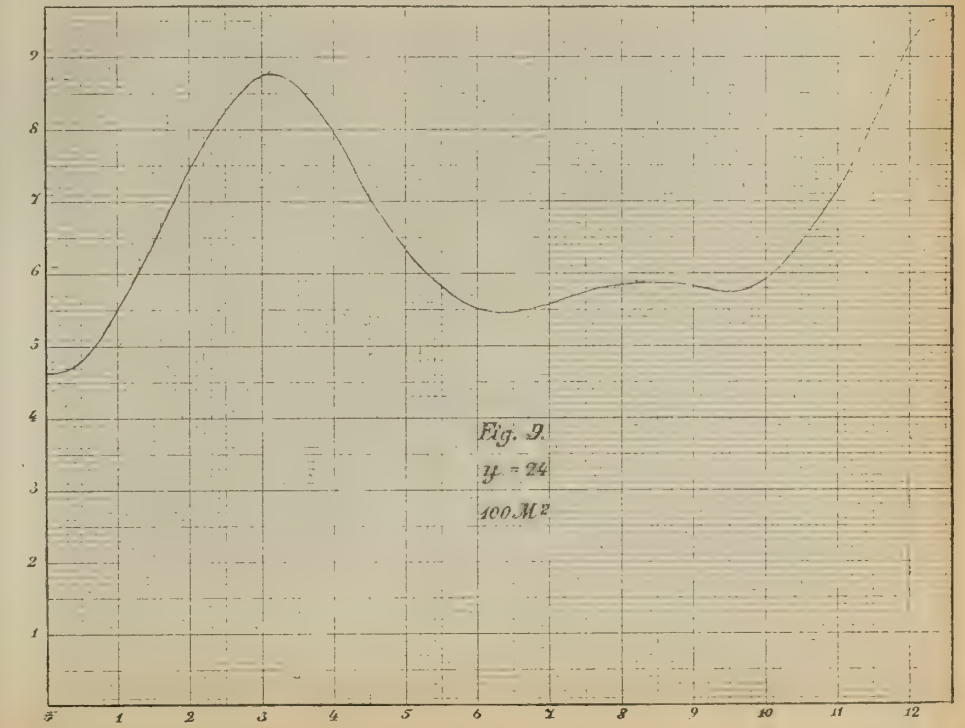
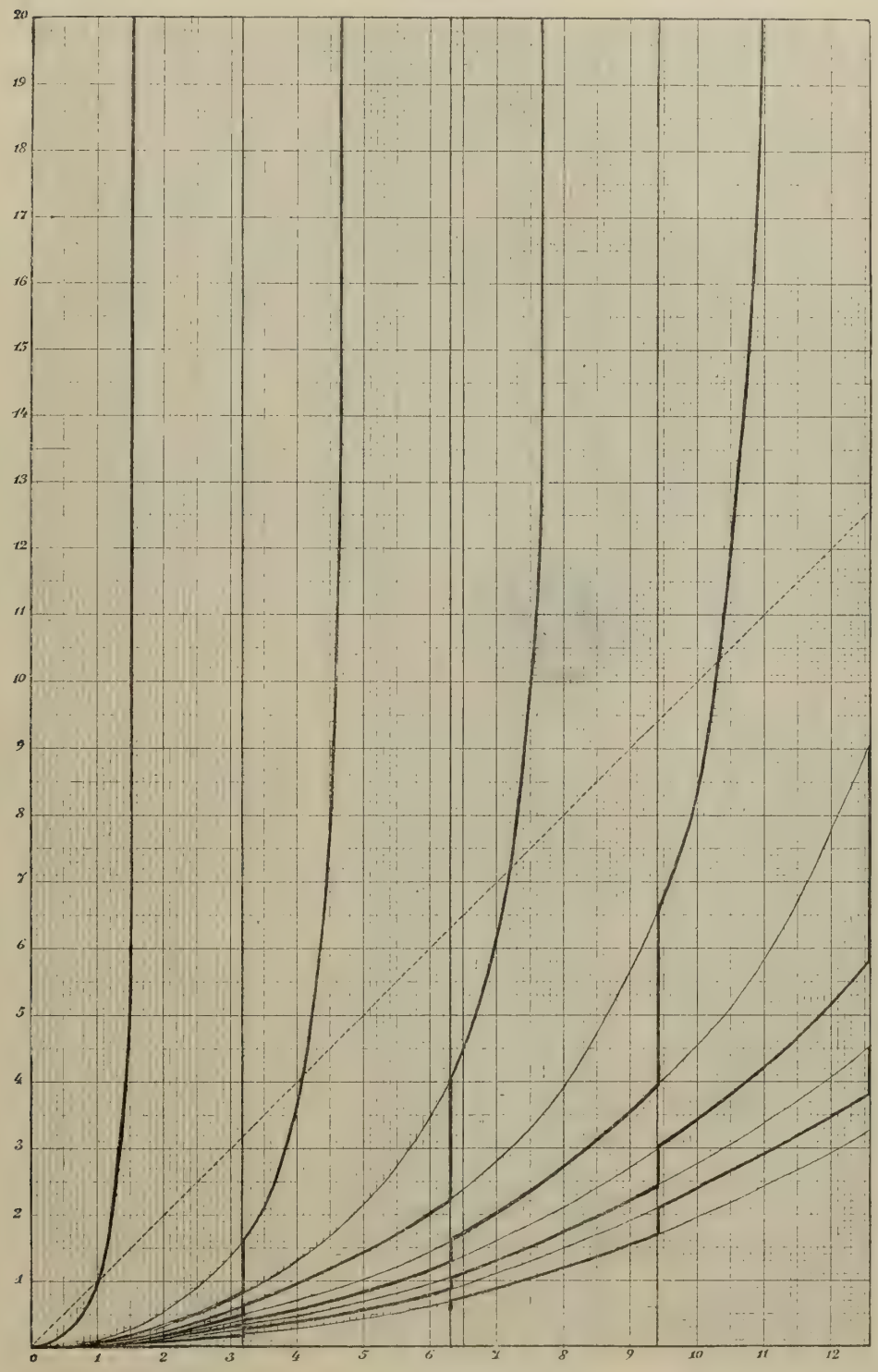


Fig. 9.
y = 24
100 M²

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig: 12.



NATURAL HISTORY.

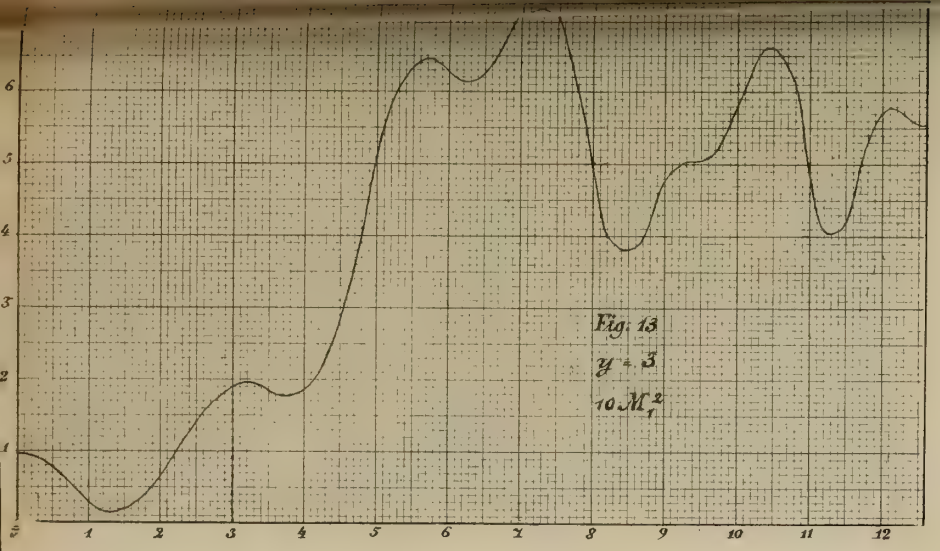


Fig. 13
y = 3
10 M₁²

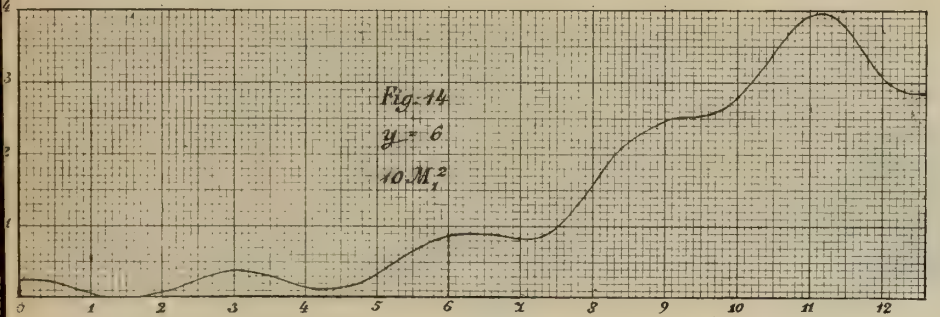


Fig. 14
y = 6
10 M₁²

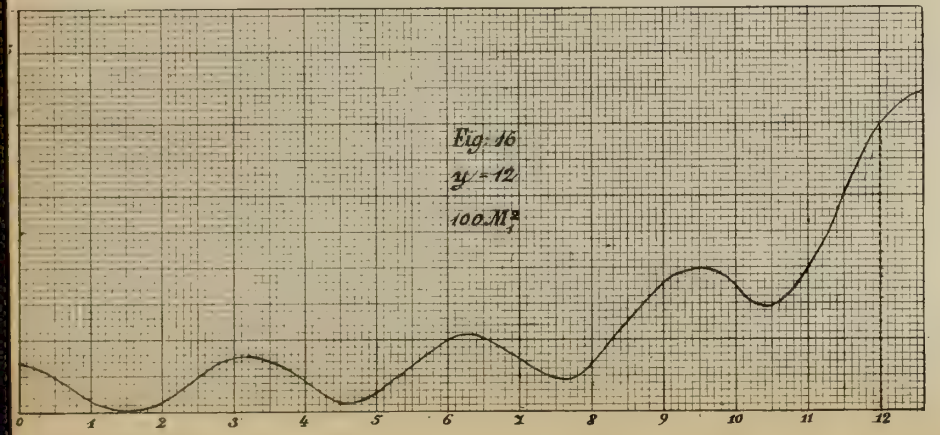


Fig. 16
y = 12
100 M₁²

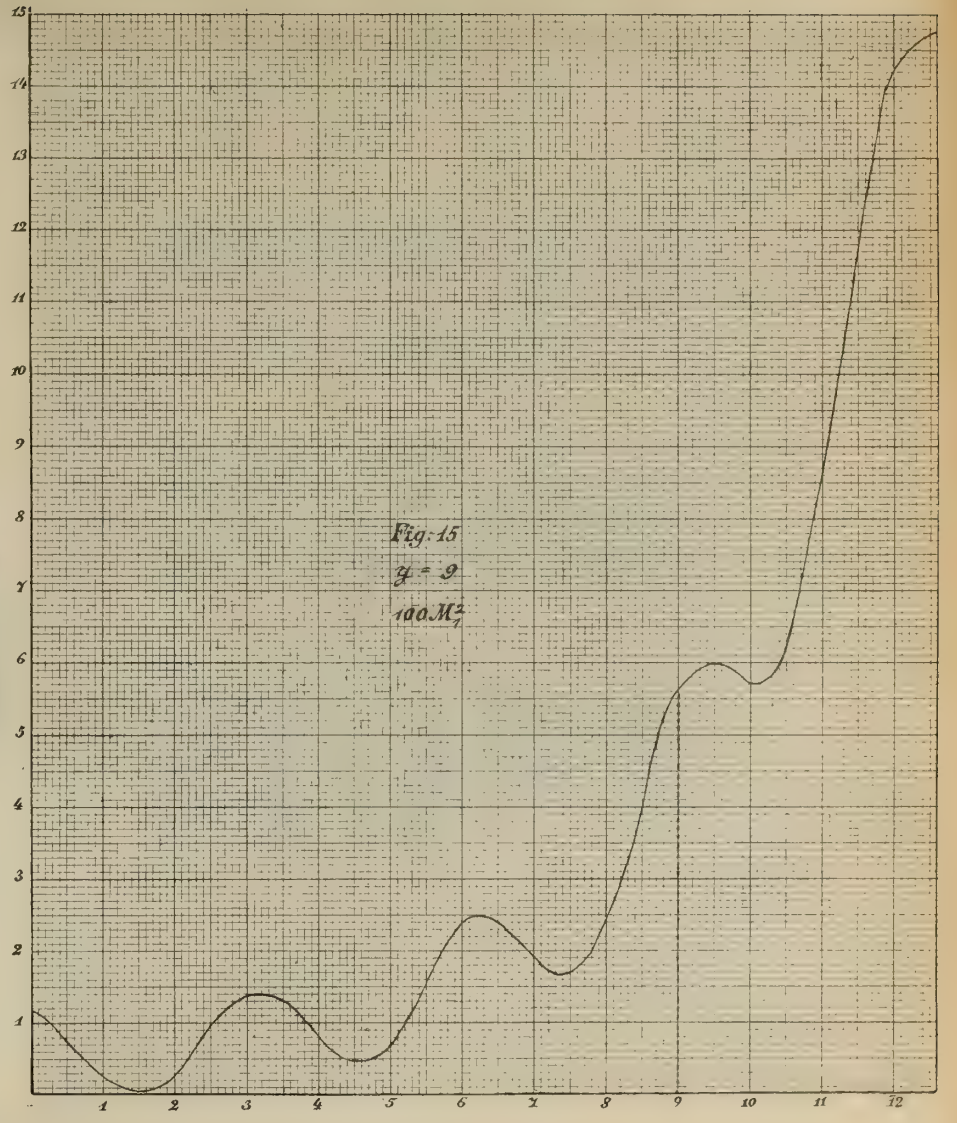


Fig. 15
y = 9
100 M₁²

NATURAL HISTORY

Fig. 17.

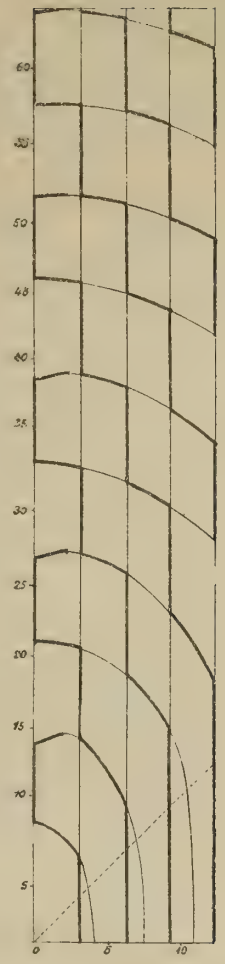


Fig. 18.

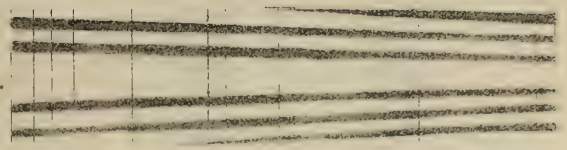


Fig. 19.

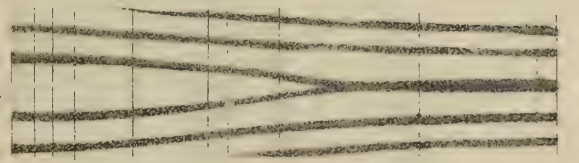
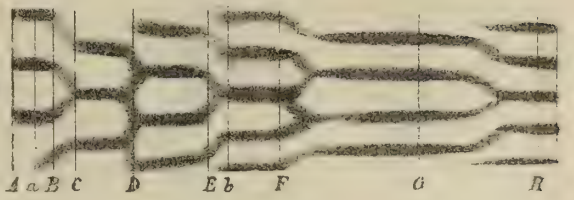


Fig. 20.



BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

Ueber den

Einfluss dioptrischer Fehler des Auges

auf das

Resultat astronomischer Messungen.

Von

H. Seeliger.

In einer Zeit, wo die astronomischen Messungen einen hohen Grad von Feinheit erlangt haben und wo man bestrebt ist nicht nur die zufälligen Beobachtungsfehler durch Vervollkommnung der instrumentalen Hülfsmittel auf das äusserste Mass von Kleinheit zurückzuführen, sondern auch die persönlichen und in systematischer Weise auftretenden Fehler eingehend zu studieren, dürfte es nicht unangemessen sein, den Einfluss der Fehler des dioptrischen Apparates des Auges auf astronomische Messungen zu untersuchen. Die folgenden Blätter enthalten eine Beleuchtung der Sachlage für Augen, deren Hornhaut mit „Astigmatismus“ behaftet ist, ein Fall, der häufig genug vorkommt. Dass aus dieser Fehlerquelle systematisch wirkende Fehler entstehen können, hat bereits Herr Abbe in einer sehr lesenswerthen und wichtigen Note[1]) bemerkt. Dort wird auch auf den Einfluss der Abweichungen der angewandten Oculare von einer vollkommenen Gestalt, welcher in ähnlicher Weise wirkt, aufmerksam gemacht. In der folgenden Untersuchung beschränke ich mich indess strenge auf das in der Ueberschrift genannte Thema. Dieselbe ist in vier Abschnitte getheilt. Im ersten werden einige dioptrische Ueberlegungen in einer Form ausgeführt, wie sie weiterhin verwendet werden. Der zweite Abschnitt enthält die Grundlage der Theorie der Abbildung in einem astigmatischen Auge und deren Anwendung unter Anderm auf die Messungen mit einem Höheninstrumente. Im dritten und vierten Abschnitt wird schliesslich das Heliometer und das Fadenmikrometer behandelt.

1) Ueber mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzungsberichte der Jenäischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft 1878.

§ 1.

Es sollen zunächst einige Festsetzungen über die dioptrische Wirkung astronomischer Fernröhre getroffen werden. Hierbei werden wir uns kurz fassen können, weil die anzuführenden Formeln sich leicht aus der allgemein bekannten Gauss'schen Theorie der Cardinalpunkte eines Linsensystems ableiten lassen.

Das Objectiv mit der Brennweite f, darf als unendlich dünn betrachtet werden. Die beiden Hauptebenen desselben fallen also zusammen. Für das Ocular wird diese Annahme nicht erlaubt sein. Die Entfernung seiner beiden Hauptebenen sei H und zwar positiv gezählt, wenn die erste Hauptebene näher beim Objectiv steht als die zweite. Die Hauptbrennweite des Oculares sei φ. Ferner werde eine Ebene A senkrecht zur optischen Axe des Systems und in einer Entfernung e vom zweiten Hauptpunkte des Oculares (negativ in der Richtung zum Objectiv hin gezählt) gelegt. In diese Ebene wird später die Hornhaut des beobachtenden Auges gelegt werden. Die Strahlen eines Sternes, also eines unendlich entfernten Objectes, werden nach erfolgter Brechung im Fernrohr aus der Ebene A eine Figur herausschneiden, welche bestimmt werden soll. Die Richtung nach dem Sterne bilde mit der optischen Axe des Objectives den Winkel x. Ist x sehr klein, so wird die genannte Figur offenbar ein Kreis sein. Die Entfernung seines Mittelpunktes von der Axe sei z und sein Radius δ. Die Stellung des Oculars werde durch die Entfernung ξ seiner ersten Hauptebene vom Brennpunkte des Objectives angegeben. z ist die Entfernung von der Axe, in welcher derjenige Strahl nach seiner Brechung die Ebene A schneidet, der vor der Brechung durch den optischen Mittelpunkt des Objectives geht und es werde positiv gezählt, wenn es auf derselben Seite der Ebene liegt, welche senkrecht zu der Ebene, in welcher der Lichtstrahl bleibt, und durch die optische Axe gelegt wird. Es findet sich dann leicht:

$$z = -\operatorname{tg} x \cdot \left\{ (f + \xi)\left(1 - \frac{e}{\varphi}\right) + e \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Für praktische Zwecke wird es meistens genügen $\xi = \varphi$ zu setzen, in welchem Fall:

wird.

$$z = -\operatorname{tg} x \cdot \left\{ f \cdot \frac{\varphi - e}{\varphi} + \varphi \right\}$$

Bringt man noch ein rechtwinkliges Coordinatensystem in Anwendung, dessen ξ-Axe in der optischen Axe und dessen $\eta\zeta$-Ebene senkrecht darauf liegt und ist π der Winkel zwischen der $\xi\zeta$-Ebene und der Ebene, welche durch die ξ-Axe und die Richtung nach dem Sterne geht, so sind die Coordinaten des Mitelpunktes des genannten Kreises:

$$\left.\begin{aligned}\eta &= z\sin\pi\\ \zeta &= z\cos\pi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Zur Bestimmung von δ wird man in bekannter Weise so verfahren: Man verfolge einen Strahl, welcher vom Rande des Objectives zum Brennpunkte desselben geht. Derselbe wird nach der Brechung im Ocular die Ebene A in einem Punkte schneiden, der um δ von der Systemaxe absteht. Ist also d der Radius der freien Objectivöffnung, so wird:

$$\delta = \frac{d}{f}\cdot\left\{\xi + e\left(\frac{\varphi-\xi}{\varphi}\right)\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Ist $e = \varphi$ so ergibt sich hieraus die bekannte Formel, welche die Vergrösserung des Fernrohres bestimmt.

Es soll nun die analoge Aufgabe für das Heliometer behandelt werden. Die Ebene A wird hier von den austretenden Strahlen in einem Halbkreise geschnitten, dessen Radius wieder (sehr nahe) durch die Formel (3) bestimmt wird.

In der Rotationsaxe des Heliometers liege die optische Axe des Oculares, während sich die Heliometerhälften senkrecht dagegen bewegen sollen. Es werde nun die X-Axe eines Coordinatensystemes in die optische Axe des Oculares gelegt und der Anfang der Zählung der x-Coordinaten in die Ebene A, negativ in der Richtung zum Objectiv. Die Y- und Z-Axe seien beliebig in einer dazu senkrechten Ebene gelegen. Sind dann X_0 Y_0 Z_0 die Coordinaten des Mittelpunktes M der betreffenden Objectivhälfte, welche einen Stern im Punkte S, dessen Coordinaten x y z seien, abbildet, so wird $x - X_0 = f$ die Brennweite des Objectives. Um nun die Coordinaten η_0 ζ_0 des Mittelpunktes des genannten Halbkreises zu finden, haben wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes zu suchen zwischen dem durch die Punkte M und S gehenden Strahl nach seiner Brechung im Ocular und der Ebene A. Zu diesem Zwecke hat man

bekanntlich folgende Construction auszuführen: Der Strahl MS schneide die erste Hauptebene des Oculares im Punkte p′. Man ziehe hierauf durch p′ eine Parallele zur optischen Axe, welche die zweite Hauptebene in p″ schneidet. Durch p″ ziehe man eine Parallele zu der Verbindungsgeraden zwischen S′ und dem ersten Hauptpunkte, so schneidet diese die Ebene A in dem gesuchten Punkte. S′ ist hierbei der Durchschnittspunkt des Strahles MS mit der ersten Brennebene des Oculares. Uebersetzt man diese Construction in analytische Zeichen, bezeichnet mit η_o ζ_o die gesuchten Coordinaten, während die übrigen Buchstaben die frühere Bedeutung haben, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \eta_o &= y\left\{1+\frac{\xi+e}{f}-\frac{e(f+\xi)}{f\varphi}\right\}-\frac{Y_0}{f}\left\{\xi+e-\frac{\xi e}{\varphi}\right\} \\ \zeta_o &= z\left\{1+\frac{\xi+e}{f}-\frac{e(f+\xi)}{f\varphi}\right\}-\frac{Z_0}{f}\left\{\xi+e-\frac{\xi e}{\varphi}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Ist weiter π der Winkel, den die Schnittlinie des Heliometerobjectives (von welcher angenommen wird, dass sie immer durch die Rotationsaxe gehe) mit der Z-Axe bildet, so wird die Gleichung der geradlinigen Begrenzung des auf A erzeugten hellen Halbkreises sein:

$$(\eta-\eta_o)\cos\pi-(\zeta-\zeta_o)\sin\pi=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

denn diese ist offenbar parallel der Schnittlinie und geht jedenfalls durch den Punkt η_o, ζ_o.

Da von den Fehlern der Linsen abgesehen werden soll, scheinen die aus dem Oculare tretenden Strahlen von einem Punkte zu kommen. Da dieser virtuelle Vereinigungspunkt im Folgenden vorkommt, so soll seine Lage bestimmt werden. Das zuletzt erwähnte Coordinatensystem soll jetzt und im Folgenden stets angewandt werden. Es liege also die X-Axe in der optischen Axe des Oculares, der Anfang in der Ebene A und die positive Richtung gehe vom Objective fort. Es seien ferner stets x y z die Coordinaten des vom Objective entworfenen Sternbildes, x_1 y_1 z_1 die Coordinaten des virtuellen Vereinigungspunktes der aus dem Oculare austretenden Strahlen. Dann findet sich aus den Grundregeln der Gauss'schen Theorie:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 &= e + \frac{\varphi\xi}{\varphi - \xi} \\ y_1 &= -y \cdot \frac{x_1 + e}{\xi} = y \cdot \frac{\varphi}{\varphi - \xi} \\ z_1 &= -z \cdot \frac{x_1 + e}{\xi} = z \cdot \frac{\varphi}{\varphi - \xi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass die in diesem Paragraphen eingeführten Bezeichnungen im Folgenden stets beibehalten werden sollen.

§ 2.

Wird das Bild eines Sternes durch ein Fernrohr beobachtet, so tritt an die Stelle der Ebene A die Hornhaut des menschlichen Auges und die auf dieselbe auffallenden Strahlen erzeugen auf der Netzhaut das Bild, welches wahrgenommen wird. Das menschliche Auge ist aber in optischer Beziehung ein durchaus nicht vollkommener Apparat und die Bilder auf der Netzhaut entsprechen also auch nicht ganz den abgebildeten Gegenständen. Ein fehlerfreies Auge kann man im Grossen und Ganzen ersetzen[1]) durch eine Kugelfläche, welche die lichtbrechende Substanz des Glaskörpers umschliesst. Die Strahlen eines leuchtenden Punktes werden in einem solchen Apparat (nur kleine Einfallswinkel vorausgesetzt, welche Einschränkung im Folgenden durchweg beibehalten werden soll) wieder in einem Punkte vereinigt. Diese Wirkung tritt nun aber erfahrungsgemäss nur in Ausnahmefällen strenge ein, vielmehr werden die Strahlen eines Punktes in der Regel nirgends im Auge wieder in einem Punkte vereinigt. Diese Unvollkommenheit des Auges wird als Astigmatismus bezeichnet. Derselbe besteht also darin, dass Strahlenbündel, welche auf verschiedene Theile der Hornhaut auffallen, sich in verschiedenen Punkten vereinigen. Der Hauptsache nach wird man nun, wie aus den Erfahrungen der Ophthalmologen hervorzugehen scheint, den Einflusss des Astigmatismus überblicken können, wenn man das schematische Auge bestehen lässt aus dem lichtbrechenden Medium, welches vorne (an Stelle der Hornhaut) begrenzt wird von einer von der Kugel verschiedenen

1) Vergl. Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, 1. Auflage pg. 69.

Oberfläche. Wir haben also die Brechung von Strahlen an einer beliebigen Grenzfläche zu verfolgen. Da ferner durch die Bewegung der Augen immer erreicht wird, dass die gebrochenen Strahlen auf den sogenannten gelben Fleck, also immer auf denselben Theil der Netzhaut, auffallen, so wird es vollständig gerechtfertigt sein, die Netzhaut als das Stück einer Ebene zu betrachten, welche mit dem Augapfel fest verbunden ist.

Auf diesen Voraussetzungen beruht die folgende Untersuchung. Dieselben dürften gegenwärtig, wo diese Fragen zum ersten Male besprochen werden, ausreichend sein, weil eben der Astigmatismus der Hornhaut der bei weitem am häufigsten vorkommende Fehler ist. Modifikationen der hier gegebenen Behandlung können aber sehr wohl nothwendig werden.

Die nun zu behandelnde Aufgabe, die Brechung eines Lichtstrahles beim Uebergang in ein anderes von einer beliebigen Fläche begrenztes Medium zu verfolgen, ist schon öfter behandelt worden. Ich habe darauf verzichtet auf fremde Darstellungen zurückzugreifen, weil sich mir ohne Schwierigkeiten die Grundgleichungen in einer Form darboten, die mir für den angestrebten Zweck nichts zu wünschen zu lassen scheinen. Als specieller Fall ergeben sich aus ihnen Formeln, welche Reusch in seiner verdienstvollen Schrift: „Theorie der Cylinderlinsen“ [1]) abgeleitet hat. Ein daselbst angewendeter Kunstgriff, hat auch hier durch Einführung der Gleichung (4) Verwendung gefunden.

Fällt ein Strahl E auf ein Element der Trennungsfläche zweier Medien, der mit der Normalen der Fläche den Winkel β bildet, so wird der in derselben Ebene gelegene gebrochene Strahl G mit der Normalen den Winkel α bilden und es ist

$$\sin\beta = n \sin\alpha$$

wenn n den Brechungsexponenten bedeutet. Man lege der Betrachtung ein beliebiges rechtwinkeliges Coordinatensystem X, Y, Z zu Grunde. Ferner werde um den Punkt, in welchem der auffallende Strahl die Fläche trifft, als Mittelpunkt eine Kugel mit beliebigem Radius gelegt und ausserdem in denselben ein dem früheren parallel gerichtetes Coordinatensystem X_o Y_o Z_o. Jede Richtung wird dann durch einen Punkt der Kugel repräsentirt, nämlich

1) Leipzig 1868.

den Durchschnittspunkt beider. Dieser Punkt werde mit demselben Buchstaben bezeichnet, wie die betreffende Richtung, so dass z. B. X_0 der Punkt ist, in welchem die X_0-Axe die Kugel schneidet. Nennt man nun weiter $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ die Winkel, welche die Normale, der einfallende und gebrochene Strahl mit der Z_0-Axe bildet, ψ, ψ_1, ψ_2 die Winkel, welche die Projectionen dieser drei Richtungen auf die $Y_0 X_0$-Ebene mit der X_0-Axe bilden und σ den Winkel bei N in dem sphärischen Dreiecke $N E Z_0$, so ergiebt sich:

$$\sin\beta \sin\sigma = \sin\gamma_1 \sin(\psi_1 - \psi)$$
$$\sin\alpha \sin\sigma = \sin\gamma_2 \sin(\psi_2 - \psi)$$

woraus

$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma_1 \sin(\psi_1 - \psi)}{\sin\gamma_2 \sin(\psi_2 - \psi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Sind weiter $x_0\ y_0\ z_0$ die Coordinaten des Kugelmittelpunktes also der Eintrittsstelle des Strahles, ferner $x_1\ y_1\ z_1$ und $x_2\ y_2\ z_2$ die Coordinaten eines Punktes des einfallenden resp. des gebrochenen Strahles, welcher von der Grenzfläche um die Strecke ϱ_1 resp. ϱ_2 absteht, so ist

$$x_1 - x_0 = \varrho_1 \sin\gamma_1 \cos\psi_1 \qquad x_2 - x_0 = \varrho_2 \sin\gamma_2 \cos\psi_2$$
$$y_1 - y_0 = \varrho_1 \sin\gamma_1 \sin\psi_1 \qquad y_2 - y_0 = \varrho_2 \sin\gamma_2 \sin\psi_2$$
$$z_1 - z_0 = \varrho_1 \sin\gamma_1 \qquad z_2 - z_0 = \varrho_2 \sin\gamma_2$$

Wenn nun noch $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Trennungsfläche ist, so findet man für die Richtungswinkel der Normalen im Punkte $x_0\ y_0\ z_0$:

$$\sin\gamma \cos\psi = C \cdot \varphi'(x_0)$$
$$\sin\gamma \sin\psi = C \cdot \varphi'(y_0)$$
$$\cos\gamma \qquad = C \cdot \varphi'(z_0)$$
$$C^2 = \frac{1}{\varphi'^2(x_0) + \varphi'^2(y_0) + \varphi'^2(z_0)}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich (1) schreiben:

$$n = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{(y_1 - y_0)\varphi'(x_0) - (x_1 - x_0)\varphi'(y_0)}{(y_2 - y_0)\varphi'(x_0) - (x_2 - x_0)\varphi'(y_0)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Vertauschen wir hierin überall die y mit z, so muss (2) offenbar ungeändert bleiben. Es muss also auch:

$$n = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{(z_1 - z_0)\varphi'(x_0) - (x_1 - x_0)\varphi'(z_0)}{(z_2 - z_0)\varphi'(x_0) - (x_2 - x_0)\varphi'(z_0)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Etwas einfacher kann man die beiden letzten Gleichungen schreiben, wenn man die völlig willkührlichen Strecken ϱ_1, ϱ_2 so wählt, dass:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dann ergiebt sich also:

$$\left.\begin{aligned}(x_2 - x_1)\,\varphi'(y_0) &= (y_2 - y_1)\,\varphi'(x_0)\\ (x_2 - x_1)\,\varphi'(z_0) &= (z_2 - z_1)\,\varphi'(x_0)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) und (5) bestimmen den gebrochenen Strahl, wenn der einfallende gegeben ist. Die Gleichungen des ersteren sind:

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_0}$$

Ich werde nun, wie es auch sonst bei ähnlichen Untersuchungen zu geschehen pflegt[1]), annehmen, dass nur sehr wenig gegen die X-Axe geneigte Strahlen in Betracht zu ziehen seien, wenn man unter der X-Axe die Sehrichtung des Auges versteht. Dann wird es in erster Annäherung erlaubt sein, die Quadrate von y und z gegenüber den in Frage kommenden x-Coordinaten zu vernachlässigen. Legt man ferner das Coordinatensystem so, dass der Anfang in die Fläche zu liegen kommt, so wird man sich bei der nicht bedeutenden Krümmung der Hornhaut erlauben dürfen, $x_0 = 0$ zu setzen. Für die Praxis werden diese Annahmen schon desshalb ausreichend sein, weil bei stärkeren Vergrösserungen, die doch meistens bei Präcisionsbeobachtungen in Anwendung kommen, der auf die Hornhaut auffallende Lichtkegel sehr schmal sein wird. Es kommt also nur ein kleines und zwar nahe immer dasselbe Stück der Hornhaut zur Verwendung. Jetzt reducirt sich aber die Gleichung (4) auf

$$x_2 = n\,x_1$$

Die Gleichungen (5) werden jetzt:

$$y_2 - y_1 = (n - 1) \cdot x_1 \cdot \frac{\varphi'(y_0)}{\varphi'(x_0)}$$

$$z_2 - z_1 = (n - 1) \cdot x_1 \cdot \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi'(x_0)}$$

---

1) So auch bei Reusch a. a. O.

und der gebrochene Strahl wird bestimmt durch:

$$y - y_0 = x\left\{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\varphi'(y_0)}{\varphi'(x_0)} + \frac{y_1 - y_0}{n x_1}\right\}$$

$$z - z_0 = x\left\{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\varphi'(z_0)}{\varphi'(x_0)} + \frac{z_1 - z_0}{n x_1}\right\}$$

Es wäre aber unnöthig, diese Formeln, so einfach sie auch sind, anzuwenden. Der kleine Theil der Fläche $\varphi = 0$, welcher bei astronomischen Beobachtungen in Frage kommen kann, wird nämlich sachgemäss durch das Stück einer Fläche vom 2. Grade zu ersetzen sein. Man wird dadurch wenigstens unter gewöhnlichen Umständen keine neuen Ungenauigkeiten einführen, weil ohnehin schon die zweiten Potenzen von y und z vernachlässigt worden sind und ausserdem $x_0 = 0$ gesetzt worden ist. Man wird also setzen dürfen, da $\varphi = 0$ werden muss für $x = y = z = 0$:

$$\varphi = a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + 2a_{02}xz + 2a_{03}x + a_{11}y^2 + 2a_{12}yz + 2a_{13}y + \\ + a_{22}z^2 + 2a_{23}z$$

Für $x_0 = 0$ wird hieraus:

$$\varphi'(x_0) = 2a_{01}y_0 + 2a_{02}z_0 + 2a_{03}$$
$$\varphi'(y_0) = 2a_{11}y_0 + 2a_{12}z_0 + 2a_{13}$$
$$\varphi'(z_0) = 2a_{12}y_0 + 2a_{22}z_0 + 2a_{23}$$

Man hat nun die Quotienten $\frac{\varphi'(y_0)}{\varphi'(x_0)}$ und $\frac{\varphi'(z_0)}{\varphi'(x_0)}$ zu entwickeln und die Glieder zweiter Ordnung fortzulassen. Hierbei soll indessen die auf durchaus plausiblen Annahmen beruhende Bedingung festgehalten werden, dass a_{03} nicht unendlich klein sei. Das Resultat der einfachen Rechnung lässt sich dann so zusammenfassen. Man setze:

$$\left.\begin{array}{l|l} (n-1)\cdot\frac{a_{13}}{a_{03}} = \alpha & (n-1)\cdot\frac{a_{23}}{a_{03}} = \alpha' \\ (n-1)\cdot\frac{a_{11}a_{03} - a_{01}a_{13}}{a^2_{03}} = \beta & (n-1)\cdot\frac{a_{12}a_{03} - a_{01}a_{23}}{a^2_{03}} = \beta' \\ (n-1)\cdot\frac{a_{12}a_{03} - a_{02}a_{13}}{a^2_{03}} = \gamma & (n-1)\cdot\frac{a_{22}a_{03} - a_{02}a_{03}}{a^2_{03}} = \gamma' \end{array}\right\} \quad (6)$$

Dann werden die Gleichungen des gebrochenen Strahles:

$$\left.\begin{aligned} n(y - y_0) &= x\left\{\alpha + \frac{y_1}{x_1} + \left(\beta - \frac{1}{x_1}\right) y_0 + \gamma z_0\right\} \\ n(z - z_0) &= x\left\{\alpha' + \frac{z_1}{x_1} + \beta' y_0 + \left(\gamma' - \frac{1}{x_1}\right) z_0\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Giebt man hier dem x einen bestimmten Werth C, so sind y und z die Coordinaten des Durchschnittes der diesem x entsprechenden zur yz-Ebene parallelen Ebene mit dem gebrochenen Strahl.

Zur Bestimmung dieser Coordinaten setze man also:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{y_1 + \alpha x_1}{n x_1} \cdot C & \quad m' &= \frac{z_1 + \alpha' x_1}{n x_1} C \\ p &= 1 + \frac{\beta x_1 - 1}{n x_1} C & \quad p' &= \frac{\beta' \cdot C}{n} \\ q &= \frac{\gamma \cdot C}{n} & \quad q' &= 1 + \frac{\gamma' x_1 - 1}{n x_1} C \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned} y &= m + p\, y_0 + q\, z_0 \\ z &= m' + p' y_0 + q' z_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dieses sind die höchst einfachen Grundgleichungen, welche den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegen.

Es gehe nun von einem leuchtenden Punkte $x_1\ y_1\ z_1$ ein schmales Strahlenbündel aus. Da sämmtliche Strahlen nur wenig gegen die X-Axe geneigt sein sollen, so werden dieselben die Hornhaut innerhalb eines Kreises treffen, dessen Radius δ und dessen Mittelpunktcoordinaten η_0, ζ_0 in § 1 bestimmt worden sind. Nach der Brechung werden sämmtliche Strahlen innerhalb einer Fläche liegen, deren Durchschnitt mit der Ebene $x = C$, als welche von nun ab die Netzhaut verstanden werden soll, eine Ellipse ist. In der That haben wir aus (9) y_0 und z_0 zu eliminiren mit Hülfe der Gleichung:

$$(y_0 - \eta_0)^2 + (z_0 - \zeta_0)^2 = \delta^2$$

woraus als Gleichung der genannten Ellipse hervorgeht:

$$\left.\begin{aligned}(p'q-pq')^2\delta^2 &= [(p'y-pz)-(mp'-m'p)-(p'q-pq')\zeta_o]^2\\ &+[(q'y-qz)-(mq'-m'q)+(p'q-pq')\zeta_o]^2\end{aligned}\right\} (9_a)$$

Die Coordinaten $\eta_1\ \zeta_1$ des Mittelpunktes dieser Ellipse lassen sich ohne weiteres hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned}\eta_1 &= m+(p\eta_0+q\zeta_0)\\ \zeta_1 &= m'+(p'\eta_0+q'\zeta_0)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Nach bekannten Regeln findet sich, wenn a und b die beiden halben Hauptaxen der Ellipse (9_a) bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}ab &= \pm(pq'-p'q)\delta^2\\ a^2+b^2 &= \delta^2\{p^2+q^2+p'^2+q'^2\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Ihr Flächeninhalt ist also $=o$ wenn:

$$pq'-p'q=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Dieses findet statt, wenn sich die Ellipse auf eine gerade Linie zusammenzieht. In der That zerfällt jetzt die Gleichung der Ellipse in die beiden Gleichungen:

$$p'y-pz=mp'-m'p$$
$$q'y-qz=mq'-m'q$$

welche nur eine Gerade darstellen, weil die zweite Gleichung aus der ersten mit Hülfe von (12) identisch folgt:

Die Bedingung (12) schreibt sich mit Hülfe von (8):

$$o=1+\frac{(\beta+\gamma')x_1-2}{nx_1}C+\frac{(\beta x_1-1)(\gamma' x_1-1)-\beta'\gamma x_1^2}{n^2x_1^2}\cdot C^2$$

Für zwei im Allgemeinen von einander verschiedene C wird sich also die Ellipse in eine Gerade zusammenziehen, durch welche sämmtliche Strahlen gehen. Es giebt demnach zwei in verschiedenen zur X-Axe senkrechten Ebenen gelegene gerade Brennlinien.

Ist die Fläche φ eine Kugel:

$$(x-r)^2+y^2+z^2=r^2$$

so wird $p = q'$, $p' = q = o$. Die Bedingung (12) wird hier einfach $p = o$ und jetzt findet bekanntlich eine völlige Vereinigung der Strahlen statt, wenn C die Bedingung

$$\gamma = o \text{ oder } -\frac{1}{x_1} + \frac{n}{C} = \frac{n-1}{r}$$

erfüllt, welche Formel mit den ersten Resultaten der Dioptrik übereinstimmt.

Im Allgemeinen wird also ein leuchtender Punkt ausserhalb des Auges auf der Netzhaut durch eine Zerstreuungsellipse dargestellt und der Mittelpunkt dieser ist durch (10) gegeben. Man wird nun offenbar den Ort des leuchtenden Punktes dorthin verlegen, wo er sich befinden würde, wenn sein Bild bei vollständig punktförmiger Vereinigung im Mittelpunkte der genannten Zerstreuungsellipse wäre.

Die hier besprochenen Verhältnisse werden nun auch bei der Beobachtung mit astronomischen Fernrohren auftreten. Die Strahlen, welche das Ocular verlassen, kommen (von den Fehlern des Oculares abgesehen) aus einem Punkte, welcher in der deutlichsten Sehweite vom Auge entfernt ist. Dadurch, dass nur ganz bestimmte Strahlen, nämlich diejenigen, welche vom Objective gesammelt worden sind, in's Auge gelangen, hat der aus dem Oculare austretende Strahlenkegel eine kleine Oeffnung, und der Radius δ des auf der Hornhaut beleuchteten kleinen Kreises, sowie sein Mittelpunkt ist in § 1 bestimmt worden. Befindet sich nun im Brennpunkte desselben Fernrohres eine Marke, z. B. ein Fadenkreuz, so wird der Ort des eingestellten Objectes dadurch bestimmt, dass das Fadenkreuz mit dem Bilde eines Punktes des Objectes zur Deckung gebracht wird. Beide werden auf der Netzhaut als Zerstreuungsellipsen dargestellt, und die Beobachtung besteht darin, dass die Mittelpunkte dieser zur Deckung gebracht werden. Nennen wir $\eta\ \zeta$ und $\eta_o\ \zeta_o$ die Coordinaten der Mittelpunkte der genannten Ellipsen für den Stern, resp. das Fadenkreuz, so wird die Beobachtung das Resultat hervorbringen:

$$\eta = \eta_o, \qquad \zeta = \zeta_o$$

und mit Hülfe von (10)

$$\left.\begin{aligned} m + \sigma &= m_o + \sigma_o \\ m' + \sigma' &= m_o' + \sigma_o' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

worin unter σ die in der genannten Formel vorkommenden Klammergrössen verstanden sind, und alle sich auf das Fadenkreuz beziehenden Grössen durch den Index o kenntlich gemacht wurden.

Es soll der Einfachheit wegen angenommen werden, dass das Fadenkreuz sich genau im Brennpuncte des Objectives befinde. Bezeichnet dann $x_1\ y_1\ z_1$ und $x_1^\circ\ y_1^\circ\ z_1^\circ$ die Coordinaten der Vereinigungspunkte der aus dem Oculare austretenden Strahlen, so wird also $x_1 = x_1^\circ$ gesetzt werden müssen und die Formel (8) giebt mit (13):

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_1^\circ &= (\sigma_o - \sigma)\cdot\frac{n\,x_1}{C} \\ z_1 - z_o' &= (\sigma_o' - \sigma')\frac{n\,x_1}{C} \end{aligned}\right\}$$

und die Coordinaten des in der Brennebene des Objectives entstehenden Sternbildes x y z, sowie die des Fadenkreuzes $x^\circ\ y^\circ\ z^\circ$ sind entsprechend § 1, 6 durch die Gleichungen verbunden

$$\left.\begin{aligned} y - y^\circ &= (\sigma_o - \sigma)\frac{n\,x_1}{C}\cdot\frac{\varphi - \xi}{\varphi} \\ z - z^\circ &= (\sigma_o - \sigma')\frac{n\,x_1}{C}\cdot\frac{\varphi - \xi}{\varphi} \\ -x_1 &= e + \frac{\varphi\,\xi}{\varphi - \xi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Da im Allgemeinen die hier vorkommenden Differenzgrössen $\sigma_o - \sigma$, $\sigma_o' - \sigma'$ von Null verschieden sind, so werden also vom Auge des Beobachters und dem angewandten Instrumente abhängige constante, sogenannte persönliche, Fehler entstehen. Es wird sich nun fragen, ob diese Fehler irgendwie bemerkbare Beträge erreichen können. Um ganz bestimmte Verhältnisse vor Augen zu haben, möge es sich darum handeln, mit einem Meridiankreise Declinationsbestimmungen zu machen. Dann soll die y-Coordinate so gewählt werden, dass ihr positives Wachsthum einer Declinationszunahme entspricht. Wir wollen ferner annehmen, was in der That sehr nahe stattfinden wird, dass $e = \varphi$ sei, dann ist die Correction der vom Faden angegebenen Declination δ

$$\Delta\,\delta = -(\sigma_o - \sigma)\frac{n}{C}\cdot\varphi$$

Denkt man sich weiter den Fall, dass die Axe des vom Sterne ausgesandten Strahlenkegels genau in der X-Axe des Coordinatensystems liege, so wird $\sigma = 0$ und

$$\sigma_0 = p\,\eta_0' + q\,\zeta_0'$$

wo η_0' und ζ_0' die Coordinaten des Mittelpunktes des vom Fadenkreuze auf der Hornhaut beleuchteten Kreises bedeutet. Oft (vergl. § 4) wird angenommen werden können, dass $\eta_0'\,\zeta_0'$ zusammenfallen mit den Coordinaten des Mittelpunktes des Diaphragmas, welches das Ocular zum Auge zu abzuschliessen pflegt. Setzt man der Einfachheit wegen voraus, dass $\zeta_0' = 0$ sei, so wird also:

$$\Delta\delta = -p\,\eta_0' \cdot \frac{n}{C} \cdot \varphi$$

und wenn man $\Delta\delta$ in Secunden, gemessen im Bogenmass am Himmel, ausdrückt:

$$\Delta\delta = -p \cdot \eta_0' \cdot \frac{n}{C} \cdot \frac{\varphi}{f} \cdot 206265''$$

In § 3 wird beispielsweise ein schematisches Auge behandelt werden, bei welchem φ durch ein Paraboloid gegeben ist. Es wird dort gezeigt werden, dass

$$p\,\frac{n}{C} = \frac{\xi_0 - \xi}{\varphi \cdot \varphi}$$

wo ξ_0 die Entfernung der ersten Hauptebene des Oculares vom Brennpunkte des Objectives bedeutet, wenn die eine der beiden Brennlinien (pg. 677) genau auf die Netzhaut fällt. $\xi_0 - \xi$ ist im Mittel eine gewisse constante Grösse.

Setzt man noch $\varphi = 10$, $f = 2000$ (alles in Millimetern) so wird:

$$\Delta\delta = -\eta_0 (\xi_0 - \xi) \cdot (10.''3)$$

Nimmt man aber den gewiss nicht zu hoch gegriffenen Werth $\xi_0 - \xi = 0.05$, $\eta_0 = 0.5$ so wird

$$\Delta\delta = -0''26.$$

Eine Correction, die schon sehr in's Gewicht fallen dürfte.

Die durch (14) angegebene Formel giebt also unter ganz plausiblen Annahmen sehr merkbare Correctionen. Die Grösse dieser Correction hängt wesentlich von den Quantitäten p, q, p', q' ab, diese aber wieder

von der Beschaffenheit der Fläche $\varphi = 0$. Diese Fläche ändert aber ihre Lage gegen das feste Coordinatensystem, je nachdem die Sehrichtung sich gegen die Primärstellung [1]) des Auges verschiebt. Im Allgemeinen wird die Correction (14) von der Lage des Beobachters gegen das Fernrohr abhängen, also mit der Declination (oder der Zenitdistanz) variiren. Diese Variation wird indess meistens nicht sehr merkbar werden, wenn nur auf eine bequeme Stellung des Kopfes geachtet wird; denn in der Nähe der Primärlage, welches eben die bequemste Stellung des Auges ist, ist die sogenannte Raddrehung des Auges nur gering, und die Fläche φ ändert ihre Lage gegen das Coordinatensystem nur wenig.

Am merklichsten werden indess diese Einflüsse im Zenith. Wenn man hier einmal mit den Füssen nach Süd liegend, das andere Mal in umgekehrter Lage beobachtend die Declination bestimmt, so werden beide Bestimmungen um den doppelten Betrag, den die Formel (14) angiebt, von einander abweichen. In unserem Beispiele wird diese Differenz $0''52$.

Solche Differenzen sind nun in der That oftmals von Beobachtern notirt worden; ihre Erklärung dürfte im Vorhergehenden vollständig enthalten sein; es folgt übrigens daraus, dass man bei der Benützung von Nullpunkten, welche aus Nadirbeobachtungen erhalten werden, einigermassen vorsichtig sein muss.

Für das normale Auge fallen bei ganz correcter Einstellung des Oculares alle Correctionsglieder fort. Die letzte Bedingung wird freilich kaum zu erreichen sein; jedenfalls aber wird man keinen Grund haben, anzunehmen, dass im Mittel aus vielen Beobachtungen sich eine bemerkbar falsche Stellung des Oculares herausstellen wird. Es scheint also doch wohl räthlich zu sein, dass ein astigmatisches Auge mit passender Brille bewaffnet vor das Fernrohr tritt. Jedenfalls wird dann stets, weil die Raddrehungen des Auges, wie erwähnt, immer klein sein werden, eine wesentliche Verkleinerung der persönlichen Fehler eintreten.

§ 3.

Ich werde jetzt die Theorie der Messung mit dem Heliometer auseinandersetzen. Hier gehen von den Vereinigungspunkten der Strahlen nicht vollständige Lichtkegel aus, sondern die erleuchtete Figur auf der

1) Vgl. Helmholtz a. a. O. § 27.

Hornhaut des Auges ist ein Halbkreis. Es soll hierbei von der Beugung des Lichtes an der Schnittfläche abgesehen werden, ein Umstand, der übrigens auf die Heliometermessungen nicht ohne Einfluss ist.

Da das auf der Netzhaut von einem leuchtenden Punkte entworfene Bild die Form einer Halbellipse hat, so ist die Frage von Wichtigkeit, welchen Punkt derselben man als Bildpunkt des Sternes betrachten darf. Im allgemeinen wird man von diesem nur sagen können, dass er im Inneren der Halbellipse liege. Es scheint indess eine plausible Annahme zu sein, wenn man den Schwerpunkt der überall als gleich hell betrachteten Figur mit jenem Punkte identificirt. Dieselbe Annahme ist auch sonst schon, so von Bessel in seiner Theorie des Königsberger Heliometers, mit Erfolg gemacht worden, und sie soll im Folgenden verfolgt werden.

Ich lege wieder das am Ende des § 1 definirte Coordinatensystem zu Grunde. Die Coordinaten des vom Heliometerfernrohr entworfenen (virtuellen) Sternbildes seien $x_1\ y_1\ z_1$. Die Schnittlinie der den Stern abbildenden Objectivhälfte bilde mit der Z-Axe den Winkel π. Bezeichnet weiter η, ζ die laufenden Coordinaten und $\eta_0\ \zeta_0$ diejenigen des Mittelpunktes des auf der Hornhaut entworfenen erleuchteten Halbkreises, so ist nach § 1, 5, die Gleichung der geradlinigen Begrenzung des letzteren:

$$(\eta - \eta_0)\cos\pi - (\zeta - \zeta_0)\sin\pi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Der Strahl, welcher durch den Punkt dieser Geraden (η, ζ) hindurchgeht, schneidet nach seiner Brechung die Netzhaut in dem Puncte (y, z), der nach § 2, 9 gegeben ist durch:

$$y = m + p\eta + q\zeta$$
$$z = m' + p'\eta + q'\zeta$$

Setzt man nun

$$\eta' = m + p\eta_0 + q\zeta_0$$
$$\zeta' = m' + p'\eta_0 + q'\zeta_0$$

so sind nach § 2, 10, η', ζ' die Coordinaten des Mittelpunktes der Halbellipse auf der Netzhaut. Subtrahirt man diese Gleichungen von einander und benutzt (1) so wird:

$$(y - \eta')(q'\cos\pi + p'\sin\pi) = (z - \zeta')(q\cos\pi + p\sin\pi).$$

Dieses ist also die Gleichung der geradlinigen Begrenzung der Halbellipse. Bezieht man Alles auf den Mittelpunkt derselben, indem man in ihn ein Coordinatensystem, parallel zu dem früheren legt, also setzt:

$$y - \eta' = Y; \quad z - \zeta' = Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

worin Y und Z die neuen Coordinaten bedeuten, so wird die vorige Gleichung:

$$(q' Y - q Z)\cos\pi + (p' Y - p Z)\sin\pi = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

während die Gleichung der Ellipse auf der Netzhaut selbst auf dasselbe Coordinatensystem bezogen nach § 1, 9_a lautet:

$$(p'q - p\,q')^2\,\delta^2 = (p'Y - p\,Z)^2 + (q'Y - q\,Z)^2.$$

Es soll nun der Schwerpunkt $(Y_o Z_o)$ der durch diese Gleichung und durch (3) bestimmten Halbellipse gesucht werden.

Die Gerade (3) geht durch den Mittelpunkt der Ellipse. Der halbe Durchmesser a', welcher in ihr liegt, ergiebt sich leicht so: Die Coordinaten Y, Z des Durchschnittspunktes von (3) und der Ellipse finden sich:

$$Y = \pm\delta\{q\cos\pi + p\sin\pi\}$$
$$Z = \pm\delta\{q'\cos\pi + p'\sin\pi\}$$

und also:

$$a'^2 = \delta^2[(q\cos\pi + p\sin\pi)^2 + (q'\cos\pi + p'\sin\pi)^2].$$

Sind weiter a und b die Halbaxen der Ellipse, b' der zu a' conjugirte Durchmesser, welcher mit a' den Winkel ω bildet, so ist

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2; \qquad a\,b = a'\,b'\sin\omega$$

woraus sich ergiebt:

$$b'^2 = \delta^2\{(p\cos\pi - q\sin\pi)^2 + (p'\cos\pi - q'\sin\pi)^2\}$$

und

$$b'^2\sin^2\omega = \frac{\delta^2(p'q - p\,q')^2}{(q\cos\pi + p\sin\pi)^2 + (q'\cos\pi + p'\sin\pi)^2}.$$

Schliesslich muss noch der Winkel φ bestimmt werden, welchen b' mit der positiven Richtung der Y-Axe bildet. Es ist aber $\mathrm{tg}\,\varphi$ gleich $\frac{dZ}{dY}$ für den Endpunkt des Durchmessers a' genommen, woraus man erhält:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{p'\cos\pi - q'\sin\pi}{p\cos\pi - q\sin\pi}$$

Man weiss, dass der Schwerpunkt der Halbellipse in dem zu a′ conjugirten Durchmesser und zwar um die Strecke $\frac{2}{3\pi} \cdot b' \sin\omega$ vom Mittelpunkt entfernt liegt, so dass also:

$$Y_0 = \frac{2}{3\pi} \cdot b' \sin\omega \cdot \cos\varphi; \quad Z_0 = \frac{2}{3\pi} b' \sin\omega \cdot \sin\varphi$$

oder auch:

$$(4) \quad \begin{cases} Y_0 = \pm \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\delta^3}{a' b'} (p' q - p q') (p \cos\pi - q \sin\pi) \\ Z_0 = \pm \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\delta^3}{a' b'} (p' q - p q') (p' \cos\pi - q' \sin\pi) \end{cases}$$

In diesen Formeln gilt gleichzeitig das obere und untere Vorzeichen. Die Coordinaten η_1 ζ_1 des Schwerpunktes, bezogen auf das ursprüngliche Coordinatensystem sind schliesslich:

$$(5) \quad \begin{cases} \eta_1 = m + p\eta_0 + q\zeta_0 + Y_0 \\ \zeta_1 = m' + p'\eta_0 + q'\zeta_0 + Z_0 \end{cases}$$

wobei zu erinnern ist, dass η_0 und ζ_0 nach § 1, 4 zu bestimmen sind.

Nach diesen Vorbereitungen werde ich nun die Messungen mit dem Heliometer betrachten, hierbei aber nur auf directe Pointirungen, wie sie bei grösseren Distanzen angewendet werden, Rücksicht nehmen. Die gewöhnliche Methode der Ausmessung von Doppelsternen enthält ein wesentlich neues Moment, das der Schätzung. Von den Fehlern des Heliometers soll ganz abgesehen werden. Die beiden Objectivhälften mögen sich also stets in einer zur Rotationsaxe senkrechten Ebene so bewegen, dass die Schnittlinie genau durch die Rotationsaxe geht und der Coincidenzpunkt in der Rotationsaxe liegt. Es falle ferner diese Axe mit unserer X-Axe zusammen.

Der Mittelpunkt der ersten Objectivhälfte (X_0 Y_0 Z_0) stehe um d_0 von der Axe ab und bilde einen Stern im Punkte x y z ab. d_0 und der, wie früher bezeichnete, Neigungswinkel π der Schnittlinie gegen die Z-Axe, ergeben sich durch directe Ablesung am Instrument. Bezeichnet nun P und δ Positionswinkel und Distanz zwischen Stern und dem Punkte am Himmel, nach welchem die Rotationsaxe hingeht, wobei P von der positiven ZX-Ebene nach der positiven YX-Ebene gezählt wird, und f die Brennweite des Objectives, so ist

$$\begin{aligned} f\cos\delta &= X_0 - x \\ f\sin\delta\sin P &= Y_0 - y \\ f\sin\delta\cos P &= Z_0 - z \end{aligned}$$

Es soll nun gleich die Vereinfachung eingeführt werden, welche durch Vernachlässigung von δ^3 entsteht. Es wird so:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} \delta\sin P = \dfrac{Y_0 - y}{X_0 - x} & d_0\cos\pi = Z_0 \\ \delta\cos P = \dfrac{Z_0 - z}{X_0 - x} & d_0\sin\pi = Y_0 \end{array} \right.$$

Für die zweite Objectivfläche, die einen zweiten Stern abbildet und sich in entgegengesetzter Richtung, wie die erste, bewegt, sollen dieselben Bezeichnungen mit einem Strich versehen angewendet werden. Man hat also:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} \delta'\sin P = \dfrac{Y_0' - y'}{X_0 - x} & d_0'\cos\pi = Z_0' \\ \delta'\cos P = \dfrac{Z_0' - z'}{X_0 - x} & d_0'\sin\pi = Y_0' \end{array} \right.$$

In diesen Formeln kann nun weiter $X_0 - x = f$ gesetzt werden. Nennt man schliesslich D die wahre Distanz der beiden Sterne, d die abgelesene, P den Positionswinkel an dem Punkte, nach welchem die Rotationsaxe zeigt, und π den abgegebenen Positionswinkel, so ist:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} f\cdot D\sin P &= d\sin\pi + (y' - y) \\ f\cdot D\cos P &= d\cos\pi + (z' - z) \end{aligned} \right.$$

Die Pointirung liefert nun die Gleichungen:

$$\eta_1 = \eta_1', \qquad \zeta_1 = \zeta_1'$$

wo η_1' und ζ_1' die Einstellungspunkte der Netzhautbilder des zweiten Sternes bedeuten. Aus dieser Bedingung müssen die Differenzen $y' - y$ und $z' - z$ abgeleitet werden.

Setzt man zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f}\cdot\left(\xi + e - \frac{\xi e}{\varphi}\right) &= V \\ 1 + \frac{\xi + e}{f} - \frac{e(f+\xi)}{f\varphi} &= W \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

so geben die Gleichungen § 1, 4:

$$\left.\begin{aligned} \eta_o' - \eta_o &= (y' - y)\,W + d\sin\pi \cdot V \\ \zeta_o' - \zeta_o &= (z' - z)\,W + d\cos\pi \cdot V \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Da weiter die in § 2 eingeführten Grössen p, q, p′ und q′ nur von den x-Coordinaten abhängen und diese für beide Bilder als gleich angenommen werden dürfen, so ergeben die obigen Bedingungen mit Hülfe von (5) und den Werthen für m und m′ aus § 2, 8:

$$o = \eta_1' - \eta_1 = (y_1' - y_1)\frac{C}{n\,x_1} + p(\eta_o' - \eta_o) + q(\zeta_o' - \zeta_o) + 2\,Y_o$$

$$o = \zeta_1' - \zeta_1 = (z_1' - z_1)\frac{C}{n\,x_1} + p'(\eta_o' - \eta_o) + q(\zeta_o' - \zeta_o) + 2\,Z_o$$

Hierin haben Y_o und Z_o die durch Formel (4) gegebene Bedeutung, und es ist klar, dass diese für die zweite Objectivhälfte das umgekehrte Zeichen haben, wie für die erste, wesshalb eine Addition eintritt. Führt man noch mit Hülfe von § 1, 6 die Coordinaten der von den Objectivhälften entworfenen reellen Sternbilder ein, so schreiben sich die beiden letzten Gleichungen:

$$y' - y = [p(\eta_o' - \eta_o) + q(\zeta_o' - \zeta_o) + 2\,Y_o]\frac{n\,x_1}{C} \cdot \frac{\xi - \varphi}{\varphi}$$

$$z' - z = [p'(\eta_o' - \eta_o) + q'(\zeta_o' - \zeta_o) + 2\,Z_o]\frac{n\,x_1}{C} \cdot \frac{\xi - \varphi}{\varphi}$$

und wenn mit Hülfe von (10) die η und ζ eliminirt werden und der Kürze wegen gesetzt wird:

$$A = \frac{n}{C} \cdot f \cdot V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$(y' - y)[1 - A\,W\,p] - (z' - z)\,A\,W\,q = A\,V\,d[p\sin\pi + q\cos\pi] + 2\,A\,Y_o$$

$$-(z' - z)\,A\,W\,p' + (z' - z)[1 - A\,W\,q'] = A\,V\,d[p'\sin\pi + q'\cos\pi] + 2\,A\,Z_o$$

Um hieraus die gesuchten $y' - y$ und $z' - z$ zu bestimmen, setze man

$$\mu = A\,W$$

$$\nu = A\,V$$

$$\sigma = 1 - \mu\,p - \mu\,q' + \mu^2(p\,q' - p'\,q)$$

dann wird

$$\begin{cases} y'-y = \frac{d\nu}{\sigma}\cdot\sin\pi\,[p-\mu(pq'-p'q)]+\frac{d\nu}{\sigma}\cos\pi\cdot q+2\frac{A}{\sigma}(1-\mu q')\,Y_0+\frac{2A\mu}{\sigma}qZ_0 \\ z'-z = \frac{d\nu}{\sigma}\cdot\sin\pi\cdot p'+\frac{d\nu}{\sigma}\cos\pi[q'-\mu(pq'-p'q)]+2AY_0\frac{p'\mu}{\sigma}+2A\frac{1-\mu p}{\sigma}Z_0 \end{cases}$$

Aus (8) folgt weiter:

$$f\cdot D\cdot\sin(P-\pi) = (y'-y)\cos\pi-(z'-z)\sin\pi$$

$$f\cdot D\cdot\cos(P-\pi) = d+(y'-y)\sin\pi+(z'-z)\cos\pi$$

und weil $y'-y$ und $z'-z$ stets sehr klein sein werden:

$$P-\pi = \frac{1}{d}\cdot\left\{(y'-y)\cos\pi-(z'-z)\sin\pi\right\}$$

$$f\cdot D = d+(y'-y)\sin\pi+(z'-z)\cos\pi$$

Setzt man hier die zuletzt gewonnenen Werthe für $y'-y$ und $z'-z$ ein, so ergiebt sich schliesslich:

$$(12)\quad\begin{cases} P-\pi = \frac{\nu}{\sigma}\cdot\sin\pi\cos\pi\,(p-q')+\frac{\nu}{\sigma}\cdot(q\cos^2\pi-p'\sin^2\pi) \\ \qquad \pm 2\frac{AY_0}{d\cdot\sigma}\cdot\left\{\cos\pi-\mu\,(q'\cos\pi+p'\sin\pi)\right\} \\ \qquad \pm 2\frac{AZ_0}{d\cdot\sigma}\left\{-\sin\pi+\mu\,(q\cos\pi+p\sin\pi)\right\} \\ fD-d = \frac{d\nu}{\sigma}\cdot\sin\pi\cos\pi(q+p')+\frac{d\nu}{\sigma}\cdot[p\sin^2\pi+q'\cos^2\pi-\mu(pq'-p'q)] \\ \qquad \pm 2\frac{AY_0}{\sigma}[\sin\pi-\mu\,(q'\sin\pi-p'\cos\pi)] \\ \qquad \pm 2\frac{AZ_0}{\sigma}[\cos\pi-\mu\,(p\cos\pi-q\sin\pi)] \end{cases}$$

Bekanntlich wird aus Rücksicht auf die Fehler des Heliometers jeder Beobachtung eine zweite zugeordnet, die dadurch entsteht, dass die beiden Hälften ihre Stellung gegen die Rotationsaxe vertauschen. Man nennt diese Operation das „Durchschrauben.“ Hierbei bleibt Alles ungeändert, nur die von Y_0 und Z_0 abhängigen Glieder bekommen das umgekehrte Vorzeichen, weshalb dieselben gleich mit $\pm$ angesetzt worden sind. Im Mittel aus zwei so zugeordneten Einstellungen fallen dieselben also fort.

Die allgemeinen Formeln (12) sollen nun durch zwei Beispiele näher erläutert werden.

Für das im obigen Sinne (pag. 678) normale Auge ist:

$$p' = q = o; \quad p = q' = 1 - \frac{C}{n}\frac{n-1}{r} - \frac{C}{n x_1}$$

$$\sigma = (1 - \mu p)^2$$

$$(13) \quad \begin{cases} P - \pi = \mp \dfrac{2AY_0}{d(1-\mu p)} \cos\pi \mp \dfrac{2AZ_0}{d(1-\mu p)} \sin\pi \\ fD - d = \dfrac{d\nu}{(1-\mu p)} p \mp \dfrac{2AY_0}{1-\mu p} \sin\pi \mp \dfrac{2AZ_0}{1-\mu p} \cos\pi \end{cases}$$

Sieht man von denjenigen Gliedern ab, welche durch das Durchschrauben unschädlich gemacht werden, so ergiebt sich also, dass im Positionswinkel gar kein Fehler, in Distanz aber der Fehler

$$\Delta d = fD - d = d\frac{p\nu}{1-\mu p}$$

übrig bleibt. Sobald aber $p = o$ ist, d. h. sobald das Ocular genau auf die deutlichste Sehweite eingestellt ist, verschwindet Δd.

Nimmt man nun eine beliebige Ocularstellung, und es sei diese bestimmt durch ξ, während ξ_0 der deutlichsten Einstellung zukommt, so ist, (nach § 1, 6)

$$p = 1 - \frac{C}{n}\frac{n-1}{r} + \frac{C}{n} \cdot \frac{\varphi - \xi}{e\varphi + \xi(\varphi - e)}$$

und mit Berücksichtigung von (9)

$$p = 1 - \frac{C}{n}\frac{n-1}{r} + \frac{C}{n} \cdot \frac{\varphi - \xi}{f\varphi V}$$

Für $p = o$ wird $\xi = \xi_0$ und der Werth von V für $\xi = \xi_0$ werde mit V_0 bezeichnet. Es ist also:

$$o = 1 - \frac{C}{n} \cdot \frac{n-1}{r} + \frac{C}{n} \cdot \frac{\varphi - \xi_0}{f\varphi V_0}$$

Durch Subtraction findet sich leicht, wenn noch $\xi - \xi_0 = \Delta\xi$ gesetzt wird, demnach ein positives $\Delta\xi$ einem Herausziehen des Oculars entspricht:

$$p = -\frac{C}{n} \cdot \frac{\Delta\xi}{f} \cdot \frac{1}{fVV_0}$$

woraus also:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{\Delta \xi}{f} \frac{V}{V_0 + \frac{\Delta \xi}{f} \cdot W}$$

Da W geschrieben werden kann:

$$W = \frac{\varphi - e}{\varphi} \left\{ 1 + \frac{\xi}{f} \right\} + \frac{e}{f}$$

so wird, weil $\frac{\xi}{f}$ immer sehr klein, genügend genau:

$$W = \frac{\varphi - e}{\varphi} + \frac{e}{f} \text{ und}$$

$$V_0 + W \cdot \frac{\Delta \xi}{f} = V + \frac{e}{f} \cdot \frac{\Delta \xi}{f}$$

Hieraus ergiebt sich, dass, weil e gewöhnlich nicht viel von φ verschieden und $\frac{\Delta \xi}{f}$ ein äusserst kleiner Bruch ist, in jedem Falle mit genügender Genauigkeit gesetzt werden darf:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{\Delta \xi}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die Distanz ändert sich also proportional mit der Ocularverschiebung, ein Resultat, das in der Praxis seit langer Zeit verwerthet wird. Hier wird aber im Allgemeinen die Sache nicht so einfach liegen als angenommen wurde, denn das Auge ist kein unveränderlicher Apparat, vielmehr ist, infolge der sich bemerkbar machenden Accommodation, p selbst mit $\Delta \xi$ veränderlich. Es ist deshalb anzurathen, den Coefficienten der Ocularstellung empirisch zu bestimmen, was übrigens auch bereits von mehreren Seiten erkannt worden ist.[1])

Die Formel (14) lässt sich natürlich auch direct durch sehr einfache Betrachtungen verificiren. Dies ist bereits von Herrn Abbe in seiner oben citirten sehr schönen Abhandlung geschehen, während in meiner Theorie des Heliometers[2]) der Sachverhalt nicht richtig dargestellt ist. Ich benutze diese Gelegenheit, den damals begangenen Fehler zu corrigiren.

---

1) So hat Auwers eine solche Bestimmung den Heliometerbeobachtern bei den letzten Venusdurchgängen angeordnet.

2) Leipzig 1877 pag. 66 u. ff.

Was die von Y_o und Z_o abhängenden Glieder in Formel (13) betrifft, so wird für das normale Auge:

$$a' = \delta p; \qquad b' = \delta p$$

$$Y_o = \pm\frac{2}{3\pi}\cdot\delta p\cos\pi \qquad Z_o = \mp\frac{2}{3\pi}\cdot\delta p\sin\pi$$

d. h.: $Y_o\sin\pi + Z_o\cos\pi = o$

und in Distanz entsteht also kein Fehler. In Positionswinkel dagegen erhalten wir

$$P - \pi = \pm\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{\delta p A}{d(1-\mu p)} = \pm\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{\delta p A}{d}$$

Indem für kleine Ocularverschiebungen der Nenner $= 1$ gesetzt werden darf. Ich werde hier beispielsweise den Fall, welcher manchmal eintritt, verfolgen, in welchem $\varphi = e$ ist. Ist ϱ der Radius der freien Objectivöffnung, so ist nach § 1, 3

$$\delta = \frac{\varrho}{f}\cdot\varphi$$

ferner

$$V = \frac{\varphi}{f}; \quad A = \frac{n}{C}fV; \quad p = -\frac{C}{n}\cdot\frac{\Delta\xi}{f}\cdot\frac{1}{fVV}$$

also:

$$P - \pi = \mp\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{\varrho}{d}\cdot\frac{\Delta\xi}{f}$$

Wird d in Bogenminuten angesetzt mit d′ bezeichnet, so ist $d = f\cdot\frac{d'}{3438}$ also:

$$(P - \pi)' = \mp\frac{(0.4244)(3438)^2}{d'}\cdot\frac{\varrho}{f}\cdot\frac{\Delta\xi}{f}$$

Nimmt man den häufig vorkommenden Fall $\frac{\varrho}{f} = \frac{1}{30}$ so wird

$$(P - \pi)' = \mp\frac{167192}{d'}\cdot\left(\frac{\Delta\xi}{f}\right)$$

für $\frac{\Delta\xi}{f} = \frac{1}{1000}$ ist demnach

$$(P - \pi)' = \mp\frac{167}{d'}.$$

Eine solche bedeutende Drehung erfährt also der Positionswinkel bei veränderter Stellung des Oculares. Diese ist auch sofort bemerkbar,

wenn man die Positionswinkel von Doppelsternen misst und das Ocular verschiebt. Es wäre gewiss nicht uninteressant, solche Messungen systematisch auszuführen, weil man daraus einen Schluss ziehen wird können, ob die Hypothese, die der angestellten Berechnung zu Grunde liegt, auch als richtig anerkannt werden darf, dass nämlich der Schwerpunkt der auf der Netzhaut entstehenden Lichtscheiben zum Einstellungspunkte genommen wird.

Nach dieser Digression auf das normale Auge will ich nun das gewöhnliche astigmatische Auge betrachten, um auch hier numerische Werthe zu erhalten. Man kann hier bekanntlich, wie es unter Anderen auch Reusch a. a. O. that, die Hornhaut als ein Stück eines Paraboloides betrachten. Die Gleichung φ soll hier also sein:

$$\frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r_1} - 2x = 0$$

Die weitere Rechnung ergiebt:

$$p = 1 - \frac{C}{n} \cdot \frac{n-1}{r} - \frac{C}{n x_1}$$

$$q' = 1 - \frac{C}{n} \cdot \frac{n-1}{r'} - \frac{C}{n x_1}; \quad p' = q = o$$

$$\sigma = (1 - \mu p)(1 - \mu q')$$

Und die Hauptformel (12) wird, wenn die von Y_o, Z_o abhängigen Glieder fortgelassen werden:

$$(15) \quad \begin{cases} P - \pi = \dfrac{\nu (p - q')}{(1 - \mu p)(1 - \mu q')} \cdot \sin \pi \cos \pi \\ fD - d = d\nu \left\{ \dfrac{q'}{1 - \mu q'} + \dfrac{p - q'}{(1 - \mu p)(1 - \mu q')} \sin^2 \pi \right\} \end{cases}$$

Bezeichnet nun ξ_0 und ξ_1 die Werthe von ξ, für welche p resp. q Null werden, V_0 und V_1 die Werthe von V für $\xi = \xi_0$ resp. $\xi = \xi_1$, so ist (vergl. pag. 688)

$$p\nu = -\frac{\xi - \xi_0}{f} \cdot \frac{V}{V_0} \qquad q'\nu = -\frac{\xi - \xi_1}{f} \cdot \frac{V}{V_1}$$

$$p\mu = -\frac{\xi - \xi_0}{f} \cdot \frac{W}{V_0} \qquad q'\mu = -\frac{\xi - \xi_1}{f} \cdot \frac{W}{V_1}$$

Ganz ähnlich wie oben wird man hier erhalten:

$$(16)\quad \frac{p\nu}{1-\mu p} = -\frac{\frac{\xi-\xi_0}{f}}{1+\frac{e}{f}\cdot\frac{\xi-\xi_0}{f}\cdot\frac{1}{V}}; \qquad \frac{q'\nu}{1-\mu q'} = -\frac{\frac{\xi-\xi_1}{f}}{1+\frac{e}{f}\cdot\frac{\xi-\xi_1}{f}\cdot\frac{1}{V}}$$

Völlig strenge ist nach (9):

$$W = \frac{\varphi - e}{\varphi} + V$$

Setzt man weiter:

$$\xi = (1+\lambda)\varphi$$

so wird λ im Allgemeinen ein kleiner Bruch sein und

$$V = \frac{\varphi}{f}\left\{1+\lambda\frac{\varphi-e}{\varphi}\right\}$$

Weiter ergiebt sich:

$$\frac{W}{V} = 1+\frac{f}{\varphi}\cdot\gamma \quad \text{wo } \gamma = \frac{\varphi-e}{\varphi+\lambda(\varphi-e)}$$

Es werden für dasselbe Auge ξ, ξ_0 und ξ_1 nur sehr wenig von einander abweichen, und demgemäss wird es erlaubt sein, λ als eine Constante zu betrachten. Demzufolge ist nun:

$$\frac{1}{1-\mu p} = \frac{1}{1+\frac{\xi-\xi_0}{\varphi}\cdot\gamma}; \qquad \frac{1}{1-\mu q'} = \frac{1}{1+\frac{\xi-\xi_1}{\varphi}\cdot\gamma}$$

oder in jedem Falle genügend genau:

$$\frac{1}{1-\mu p} = 1-\frac{\xi-\xi_0}{\varphi}\cdot\gamma; \qquad \frac{1}{1-\mu q'} = 1-\frac{\xi-\xi_1}{\varphi}\cdot\gamma$$

Die Nenner der Relationen (16) dürfen ohne Frage $= 1$ angenommen werden. Es soll weiter

$$\xi = \frac{\xi_0+\xi_1}{2} + \Delta\xi$$

gesetzt werden. Jetzt geben die Gleichungen (15) sehr einfach:

$$(17)\quad \begin{cases} P-\pi = \frac{\xi_0-\xi_1}{2f}\sin 2\pi \\ fD-d = -d\left\{\frac{\Delta\xi}{f}+\frac{\xi_0-\xi_1}{2f}\cos 2\pi\right\} \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, dass das Messungsresultat sowohl in Positionswinkel als auch in Distanz abhängig ist von der Neigung der Schnittlinie des Heliometers gegen eine feste Richtung. Diese Abhängigkeit wird natürlich in Wirklichkeit, wegen der oben erwähnten secundären Einflüsse, ein complicirteres Gesetz zeigen. Von Wichtigkeit ist aber die Frage, ob die in (17) auftretenden Coefficienten für die Praxis merkliche Beträge erlangen können. Zunächst ergiebt sich, dass die von π abhängigen Glieder mit der angewandten Vergrösserung sehr rasch abnehmen, und sie werden desshalb bei starken Vergrösserungen und nicht auffallend stark astigmatischen Augen wenig Einfluss ausüben. Namentlich wird im Positionswinkel, wegen der beschränkten Genauigkeit, mit welcher die Ablesung dieser Coordinate bewerkstelligt wird, diese Fehlerquelle nicht bemerkbar sein.

Es sollen nun, um bestimmte Zahlenwerthe zu erhalten, ganz bestimmte Verhältnisse angenommen werden. Der Astigmatismus des beobachtenden Auges sei derart, dass Strahlen, welche in der XY-Ebene liegen, dann genau auf der Netzhaut sich vereinigen, wenn sie von einem Puncte in einer Entfernung von 250^{mm} von der Hornhaut ausgegangen sind. Für Strahlen, welche in der XZ-Ebene liegen, sei die analoge Entfernung 350^{mm}. Man kann dies auch so aussprechen: beide Strahlenbündel werden zu gleicher Zeit auf der Netzhaut vereinigt, wenn das eine direct vom Auge, das andere durch eine Linse von 0.88 Meter Brennweite betrachtet wird. Es liegt also ein Fall sogenannten regulären Astigmatismus vor, der, wenn auch von merklichen, so doch noch nicht von abnorm hohen Betrage ist.

Für diese Annahmen nun, und wenn φ beispielsweise zu 10^{mm} angenommen wird, findet sich

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= 9.600\\ \xi_1 &= 9.714\end{aligned}\right\};\qquad \xi_0 - \xi_1 = 0.114$$

und es wird

$$(P - \pi) = -\frac{392'}{2f}\sin 2\pi$$

$$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{\Delta \xi}{f} + \frac{0.114}{2f}\cos 2\pi$$

worin f in Millimetern auszudrücken ist. Liegt z. B. eine Vergrösserung von 100 (f = 1000) vor, so geben die letzten Formeln:

$$P - \pi = 12'' \sin 2\pi$$

$$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{\Delta \xi}{1000} + (0.000057) \cos 2\pi$$

Der Positionswinkel erscheint demnach von einem völlig unmerklichen Fehler afficirt, während das bei der Distanz nicht immer der Fall ist. Hier wird z. B. für $d = 3000''$

$$\Delta d = -3''0 \cdot \Delta \xi + 0''17 \cdot \cos 2\pi$$

welcher Fehler freilich blos bei kleinen Vergrösserungen, oder dort, wo es auf die höchste Genauigkeit (z. B. bei Parallaxenbestimmungen, bei welchen selbst sehr kleine systematische von π abhängige Fehler verhängnissvoll werden können) ankommt, einer Ueberlegung zu unterziehen sein dürfte. Weit mehr kann das Resultat heliometrischer Messungen durch das erste Glied alterirt werden. In (17) wurde $\Delta \xi$ von der Mittelstellung des Oculares $\xi = \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}$, an gezählt. Diese Mittelstellung wird sich nur mit sehr beschränkter Genauigkeit ermitteln lassen, zum Theil infolge der Mitwirkung secundärer Einflüsse, wie eintretende Accommodation, sphärischer Abweichung sowohl des Objectives als auch des Oculares etc. etc. Ein kleiner Fehler in der Annahme des Nullpunctes, von welchem die Ocularverrückungen $\Delta \xi$ zu zählen sind, wird also unvermeidlich sein, und infolge dessen wird die gemessene Distanz, wenn vom zweiten Gliede abgesehen wird, die Correction erfordern:

$$\Delta d = (a + b \Delta \xi) d$$

worin nun a und b Constanten sind. a wird von Beobachter zu Beobachter variiren und auch b wird dies (vergl. pg. 689) in gewissem Grade thun. Der erste Umstand bewirkt, dass der Scalenwerth für verschiedene Beobachter verschieden angenommen werden muss. Derselbe darf also nicht durch fremde Beobachtungen herbeigeschafft werden.

§ 4.

Es soll noch zum Schlusse das Fadenmikrometer behandelt werden.

Die Beobachtung kann hier sehr verschiedenartig angeordnet werden.[1]) Um ganz bestimmte Verhältnisse vor Augen zu haben, soll angenommen werden, dass beide Sterne sich zu gleicher Zeit im Gesichtsfelde befinden. Zuerst mag der eine Stern fixirt und mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht werden, und hierauf wird dasselbe mit dem zweiten Stern gethan. Das Auge bewegt sich also, da der Kopf des Beobachters als unbeweglich betrachtet werden soll, zwischen den beiden Messungen, und zwar dreht es sich nach bekannten Gesetzen (Listing's Gesetz.) Die Grösse dieser Drehung ist abhängig von der Grösse der Distanz, multiplicirt mit der Vergrösserung des Fernrohres. Bei kleinen Distanzen wird indess diese Drehung klein sein, und sie mag desshalb als kleine Grösse der ersten Ordnung betrachtet werden. Nach dem Früheren hängt der Einfluss des Astigmatismus des Auges auf das Messungsresultat ab von der Differenz der Coordinaten der Mittelpunkte des vom Sterne, resp. Faden auf der Hornhaut beleuchteten Kreises. Diese Differenz wird aber durch die Drehung des Auges nur um Glieder zweiter Ordnung und um solche, welche von der Raddrehung des Auges abhängen, geändert, und man wird deshalb einen nahe richtigen Ueberblick über die zu untersuchenden Fehler erlangen, wenn man von der Augenbewegung ganz absieht; denn die Raddrehung ist im allgemeinen ebenfalls sehr klein. Die Augenbewegung auch in den Gliedern zweiter Ordnung zu berücksichtigen, macht keine Schwierigkeit; die Endformeln werden aber viel complicirter. Da nun ihre Mittheilung keinen practischen Werth haben dürfte, will ich von ihnen absehen.

Bei Messung grosser Declinationsdifferenzen, bei welchen das Ocular zwischen den beiden Einstellungen verschoben werden muss, liegt die Sache anders.

---

1) Lesenswerthe Bemerkungen über die für das Fadenmikrometer wichtigen Beleuchtungseinrichtungen findet man in dem Aufsatze von W. Foerster: Ueber die Beleuchtung der Mikrometereinrichtungen in Teleskopen etc. Zeitschrift für Instrumentenkunde I (1881).

Ferner ist auf dieselbe Zeitschrift 1885 pag. 347 ff. zu verweisen, wo Herr Czapski Experimente bespricht, welche Herr Abbe gemacht hat, und die zu höchst wichtigen Folgerungen geführt haben.

Die hier auftretenden Verhältnisse werden sich durch ein Verfahren, ähnlich dem, welches am Ende des § 2 eingeschlagen wurde, übersehen lassen. Es verdient bemerkt zu werden, dass in diesem Falle nicht unbedeutende Fehler entstehen können, die indess zum Theile den Charakter zufälliger Fehler zeigen.

Es seien in Bezug auf das von uns stets gebrauchte Coordinatensystem y_1, z_1 und y_1', z_1' die Coordinaten der Vereinigungsweiten der aus dem Oculare austretenden Strahlen des ersten, resp. zweiten Sternes, welche beide in der Sehweite $-x_1$ vom Auge erscheinen, x_1, Y_1, Z_1 und x_1, Y_1', Z_1' die Coordinaten des scheinbaren Fadenkreuzes, nachdem es mit dem ersten, resp. zweiten Sterne zur Deckung gebracht worden ist, wobei eine vollständige Focusirung angenommen werden soll. Die Coordinaten der Mittelpuncte der erleuchteten Kreise auf der Hornhaut seien [1]):

η, ζ und η', ζ' für die beiden Sterne und

$Y\ Z$ und $Y'\ Z'$ für das Fadenkreuz in beiden Lagen.

Man weiss dann nach § 2, dass

$$\begin{cases} y_1 - Y_1 = -\frac{n x_1}{C} \cdot [q(\zeta - Z) + p(\eta - Y)] \\ z_1 - Z_1 = -\frac{n x_1}{C} \cdot [q'(\zeta - Z) + p'(\eta - Y)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' - Y_1' = -\frac{n x_1}{C} \cdot [q(\zeta' - Z') + p(\eta' - Y')] \\ z_1' - Z_1' = -\frac{n x_1}{C} \cdot [q'(\zeta' - Z') + p'(\eta' - Y')] \end{cases}$$

Bezeichnet weiter D und P wahre Distanz und Positionswinkel der beiden Sterne, d und π die entsprechenden Angaben für die Stellung des Fadens und k der Scalenwerth, welcher bei der Umrechnung der Theile der Micrometertrommel in dasselbe Mass, in welchem D angegeben wird, in Frage kommt, so ist (§ 1, 6):

---

1) Hier sowie überall in den früheren und den folgenden Untersuchungen wird stets angenommen, dass der aus dem Oculare austretende Strahlenkegel nirgends, also auch nicht durch den Pupillenrand oder den Oculardeckel an seiner vollen Ausbreitung behindert werde.

$$-f\cdot D\sin P=(y_1'-y_1)\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}\qquad -d\sin\pi=(Y_1'-Y_1)\,k\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}$$

$$-f\cdot D\cos P=(z_1'-z_1)\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}\qquad -d\cos\pi=(Z_1'-Z_1)\,k\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}$$

Setzt man demnach zur Abkürzung:

$$\begin{cases} Z_0=(\zeta-Z)-(\zeta'-Z') \\ Y_0=(\eta-Y)-(\eta'-Y') \end{cases}$$

so ergeben die obigen Gleichungen durch Subtraction:

$$(1)\qquad \begin{cases} f\cdot D\sin P=\dfrac{d\sin\pi}{k}-\dfrac{n\,x_1}{C}\cdot[q\,Z_0+p\,Y_0]\cdot\dfrac{\varphi-\xi}{\varphi} \\ f\cdot D\cos P=\dfrac{d\cos\pi}{k}-\dfrac{n\,x_1}{C}\cdot[q'Z_0+p'Y_0]\cdot\dfrac{\varphi-\xi}{\varphi} \end{cases}$$

Es kann noch nach § 1, 6 substituirt werden:

$$x_1\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}=-e\frac{\varphi-\xi}{\varphi}-\xi$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$A=-\frac{n\,x_1}{C}\cdot[q\,Z_0+p\,Y_0]\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}$$

$$B=-\frac{n\,x_1}{C}\cdot[q'Z_0+p'Y_0]\cdot\frac{\varphi-\xi}{\varphi}$$

so wird mit ausreichender Genauigkeit:

$$(2)\qquad \begin{cases} D-\dfrac{d}{f\cdot k}=\Delta d=\dfrac{A\sin\pi+B\cos\pi}{f} \\ P-\pi=\Delta\pi=\dfrac{A\cos\pi-B\sin\pi}{fD} \end{cases}$$

Es sind noch die in diesen allgemeinen Gleichungen vorkommenden Y_0 Z_0 zu ermitteln.

Zunächst kann offenbar angenommen werden, dass der erste Stern genau in der X-Axe des Coordinatensystems abgebildet werde. Es ist dann $\eta=\zeta=0$ und nach Formel § 1, 2

$$(3)\qquad \begin{cases} \eta'=-D\sin P\left[(f+\xi)\dfrac{\varphi-e}{\varphi}+e\right] \\ \zeta'=-D\cos P\left[(f+\xi)\dfrac{\varphi-e}{\varphi}+e\right] \end{cases}$$

Zur Ableitung der analogen Grössen für das Fadenkreuz ist es nothwendig, specielle Annahmen darüber zu machen, wie der Faden sichtbar gemacht ist.

Zuerst soll der Fall behandelt werden, dass an hellen Fäden beobachtet wird. Diese senden Strahlen nach sehr verschiedenen Richtungen aus, so dass jeder Punkt der Oeffnung des vor dem Auge befindlichen Diaphragma's von Strahlen getroffen wird. Bezeichnet σ die Entfernung des Diaphragma's von dem Auge, so sind YZ die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden, welche durch die Punkte x_1, Y_1, Z_1 und den Mittelpunkt des Diaphragma's geht, mit der Hornhaut, d. i. der YZ-Ebene des Coordinatensystemes. Da nur Differenzen von Coordinatenwerthen in Frage kommen, wird es die Allgemeinheit kaum beeinträchtigen, wenn angenommen wird, dass der Mittelpunkt der Diaphragmenöffnung in der X-Axe liege. Unter dieser Voraussetzung ist aber:

$$(4)\qquad \begin{array}{l|l} Y = Y_1 \dfrac{\sigma}{\sigma + x_1} & Y' = Y_1' \dfrac{\sigma}{\sigma + x_1} \\ Z = Z_1 \dfrac{\sigma}{\sigma + x_1} & Z' = Z_1' \dfrac{\sigma}{\sigma + x_1} \end{array}$$

Mit Hülfe von (3) und (4) ergiebt sich, wenn man, was erlaubt ist, hier keinen Unterschied zwischen fD und $\frac{d}{k}$ und zwischen P und π macht:

$$Y_0 = D \sin\pi \cdot \Pi \cdot f$$
$$Z_0 = D \cos\pi \cdot \Pi \cdot f$$

wo

$$f \cdot \Pi = (f + \xi)\frac{\varphi - e}{\varphi} + e - \frac{\sigma}{\sigma + x_1} f \frac{\varphi}{\varphi - \xi}$$

und es wird jetzt:

$$\frac{A}{f} = -\frac{n x_1}{C} \cdot \Pi \cdot D \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi}\left\{ q \cos\pi + p \sin\pi \right\}$$
$$\frac{B}{f} = -\frac{n x_1}{C} \cdot \Pi \cdot D \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi}\left\{ q' \cos\pi + p' \sin\pi \right\}$$

Dadurch gestalten sich die Gleichungen (2)

$$(5)\qquad \begin{cases} \Delta d = -\dfrac{n x_1}{C} \cdot \Pi D \cdot \dfrac{\varphi - \xi}{\varphi}\left\{ (q + p') \sin\pi \cos\pi + p \sin^2\pi + q' \cos^2\pi \right\} \\ \Delta \pi = -\dfrac{n x_1}{C} \cdot \Pi \cdot \dfrac{\varphi - \xi}{\varphi}\left\{ q \cos^2\pi - p' \sin^2\pi + (p - q') \sin\pi \cos\pi \right\} \end{cases}$$

Um zu einer Abschätzung der durch (5) angegebenen Fehler zu gelangen, will ich den Ausdruck abkürzen bis auf jene Glieder, welche allein merklich werden können. Bezeichnet nun $(1+\varkappa)\varphi$ die Entfernung des Diaphragma's von der hinteren Hauptebene des Oculares, so ist

$$e = (1+\varkappa)\varphi + \sigma$$

Ferner findet sich mit Hülfe von § 1, 6

$$x_1 + \sigma = \frac{(\sigma - e)(\varphi - \xi) - \varphi\xi}{\varphi - \xi} = -\frac{\varphi\{\varphi + \varkappa(\varphi - \xi)\}}{\varphi - \xi}$$

und demzufolge:

$$f\Pi = (f+\xi)\cdot\frac{\varphi - e}{\varphi} + e + \frac{f\cdot\sigma}{\varphi + \varkappa(\varphi - \xi)}$$

Es wird nun ohne Frage erlaubt sein zu setzen $\varphi = \xi$, wodurch

$$f\Pi = f - \frac{e}{\varphi}f + \varphi + \frac{f\sigma}{\varphi}$$

$$= -\varkappa f + \varphi; \quad \Pi = -\varkappa + \frac{\varphi}{f}$$

Wenn nun $\varkappa$ nicht sehr klein ist und nur dann wird (5) unter sonst annehmbaren Umständen merkliche Correctionen liefern. Dann kann aber $\frac{\varphi}{f}$ als jedenfalls sehr klein fortgelassen werden und es ergiebt sich einfach $\Pi = -\varkappa$.

Ich will nun das in § 3 behandelte mit einem regelmässigen Astigmatismus behaftete Auge betrachten. Dort war

$$p' = q = o$$

Es wird also:

$$\Delta d = I'\cdot D\cdot\{p\sin^2\pi + q'\cos^2\pi\}$$

$$\Delta\pi = I'\cdot\{p - q'\}\cdot\sin\pi\cos\pi$$

$$I' = \frac{n x_1}{C}\cdot\varkappa\frac{\varphi - \xi}{\varphi} = -\frac{n}{C}\varkappa\cdot\varphi\cdot\left\{1 + (\varkappa+\lambda)\frac{\varphi - \xi}{\varphi}\right\}$$

wenn noch $\sigma = \lambda\varphi$ gesetzt wird. In der folgenden Ueberschlagsrechnung ist einfach $I' = -\frac{n}{C}\cdot\varkappa\varphi$ gesetzt worden; in der That sind meistens $\varkappa$ und λ kleine Brüche und σ hat nur einen äusserst geringen Einfluss.

Genügend genau wird man weiter annehmen dürfen:

$$\frac{C}{n}p = -\frac{\xi - \xi_0}{\varphi^2}; \qquad \frac{C}{n}q' = -\frac{\xi - \xi_1}{\varphi^2}$$

Wird jetzt wieder

$$\xi = \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} + \Delta\xi$$

angenommen, so ergiebt sich:

$$\Delta d = \varkappa \cdot D\left\{-\frac{\xi_1 - \xi_0}{2\varphi}\cos 2\pi + \frac{\Delta\xi}{\varphi}\right\}$$

$$\Delta\pi' = -\varkappa \cdot 3438 \cdot \frac{\xi_1 - \xi_0}{2\varphi}\sin 2\pi$$

und mit den Zahlen des Beispieles pag. 693:

$$\begin{cases} \Delta d = \varkappa \cdot D \cdot [-0.0057\cos 2\pi + 0.1\,\Delta\xi] \\ \Delta\pi' = -19'.6\,\varkappa\sin 2\pi \end{cases}$$

Es sind also die betrachteten Fehler direct proportional mit $\varkappa$, und es wäre wichtig, sich zu vergewissern, ob diese Grösse bei den angewandten Ocularen klein ist. Bei den älteren Fraunhofer'schen Ocularen ist das durchaus nicht der Fall, und es kommen Werthe von $\varkappa$ vor, die wohl bis zu $\frac{1}{3}$ ansteigen. Die Optiker scheinen nicht den Oculardeckel nach ganz festen Principien anzubringen. Für Mikrometeroculare scheint es aber nach dem Früheren sehr wünschenswerth, den Oculardeckel möglichst nahe dem Hauptbrennpunkte des Oculares zu legen.

Als zweite Anwendung der Formeln (2) sollen die Messungen mit dunklen Fäden auf hellem Grunde betrachtet werden. Die Beleuchtung des Gesichtsfeldes mag durch einen leuchtenden Punkt im Innern des Rohres bewerkstelligt werden. Auf der Netzhaut entsteht dann eine Beugungsfigur des sehr schmalen Schirmes, als welcher der Faden anzusehen ist, von welcher bei richtiger Einstellung des Oculares nur ein dunkler Streifen sichtbar bleibt. Das Fadenbild erleidet nun durch Verstellung des Oculares mehrere in der letzten Zeit genauer studierte Veränderungen. Diese lassen sich aber auf das einfachste erklären, wenn man nur die einfachsten Vorstellungen festhält, mit welchen die Theorie der Beugung des Lichtes an schmalen Schirmen operirt.

Strenge genommen wäre also die Beugungsfigur eines sehr schmalen Schirmes abzuleiten, und hierbei auf den Astigmatismus des Auges Rücksicht zu nehmen. Der Kürze wegen will ich aber diese Untersuchung nicht ausführen, und bemerke nur, dass man die Endformeln auf dieselbe Gestalt bringen kann, die sie bei dem normalen Auge haben. Für unsere Zwecke wird es genügen, den Ort des Fadenbildes dorthin zu verlegen, wo seine Mitte sich abbildet. Diese Annahme ist natürlich nicht völlig strenge, sie wird aber wohl als nahezu richtig gelten müssen. Dass sich in der That Feld- und Fadenbeleuchtung wesentlich von einander unterscheiden, kann man, ganz abgesehen von theoretischen Erörterungen, in sehr instructiver Weise experimentell prüfen.

Beleuchtet man einen Faden in einem Mikrometerocular von der dem Beobachter abgewandten Seite durch zwei Lichtquellen, so dass das Gesichtsfeld zu gleicher Zeit von Beiden Licht erhält, so wird man zwei dunkle Bilder auf hellem Grunde sehen, deren Entfernung proportional ist der scheinbaren Entfernung der beiden Lichtquellen; nur dann, wenn das Ocular völlig scharf eingestellt ist, wird diese Entfernung Null. Bringt man nun weiter vor die Oeffnung des Oculardeckels eine drehbare excentrische Scheibe mit verschieden grossen Oeffnungen, so hat man Gelegenheit sich davon zu überzeugen, dass (unter selbstverständlichen Umständen) beide Fadenbilder auch bei sehr kleinen Oeffnungen bestehen bleiben. Man kann weiter die Beleuchtung durch eine Lichtquelle so einrichten, dass ein Theil des Gesichtsfeldes dunkel bleibt. Dann wird auch (vergl. den oben citirten Aufsatz von Herrn Dr. Czapski) ein Theil des Fadens hell auf dunklem, der andere dunkel auf hellem Grunde erscheinen. Eine Vergleichung beider Bilder giebt zu in mancher Beziehung interessanten Wahrnehmungen Veranlassung.

Man kann sich also die Sache näherungsweise so vorstellen: Jeder Punkt des Fadens sendet in dem vorliegenden Falle nur einen Strahl aus, nämlich denjenigen, welcher von der punktförmigen Lichtquelle zu ihm hinläuft. Wo dieser Strahl nach seiner Brechung im Ocular und Auge die Netzhaut durchschneidet, dort erscheint der betreffende Punkt des Fadens.

Sind A, B, C und X, Y, Z die Coordinaten der Lichtquelle und eines Punktes des messenden Fadens, A_1, B_1, C_1 und X_1, Y_1, Z_1 die Coordinaten

der virtuellen Bilder, welche das Ocular von diesen beiden Punkten entwirft, so wird der aus dem Ocular tretende Strahl durch die beiden zuletzt genannten Punkte gehen müssen. Bezeichnen also x, y, z die laufenden Coordinaten, so sind seine Gleichungen:

$$\frac{x - A_1}{X_1 - A_1} = \frac{y - B_1}{Y_1 - B_1} = \frac{z - C_1}{Z_1 - C_1}$$

Für $x = o$ ergeben sich die Coordinaten $Y\,Z$ seines Durchschnittspunktes mit der Hornhaut:

$$(6) \qquad Y = B_1 - \frac{Y_1 - B_1}{X_1 - A_1} A_1; \qquad Z = C_1 - \frac{Z_1 - C_1}{X_1 - A_1} A_1$$

Um hier die Formel (2) in Anwendung zu bringen, setze man wieder voraus, dass $\eta = \zeta = o$ und η', ζ' durch (3) gegeben ist. Für die zweite Lage des Fadens ist analog zu (6):

$$Y' = B_1 - \frac{Y_1' - B_1}{X_1' - A_1} A_1; \qquad Z' = C_1 - \frac{Z_1' - C_1}{X_1' - A_1} A_1$$

und hiermit ergiebt sich sehr leicht und mit den früheren Vernachlässigungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta d &= -\frac{n x_1}{C} \cdot D\,\Pi \cdot [p \sin^2\pi + q' \cos^2\pi + (q + p') \sin\pi \cos\pi] \\ \Delta\pi &= -\frac{n x_1}{C} \cdot D\,\Pi \cdot [q \cos^2\pi - p' \sin^2\pi + (p - q') \sin p \cos\pi] \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

wo

$$\Pi = \frac{A_1}{X_1 - A_1} + \left(1 + \frac{\xi}{f}\right) \frac{\varphi - e}{\varphi} \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi} + \frac{e}{f} \cdot \frac{\varphi - \xi}{\varphi}$$

Bei der Beurtheilung der Frage, ob die Correctionen (7) merklich werden können, wird es nach dem Früheren ausreichen, zuzusehen, ob Π ein nicht sehr kleiner Bruch ist. Ist dies der Fall, dann sind die aus dem Astigmatismus des Auges folgenden systematischen Fehler bei der hier angenommenen Beobachtungsart zu vernachlässigen. Dies findet nun aber gerade bei den gebräuchlichen Einrichtungen der Beleuchtung statt.

Es ist nämlich wohl immer die Entfernung der punktförmigen Lichtquelle von dem Oculare eine in Beziehung auf φ sehr beträchtliche Grösse. Dann ist aber nach § 1, 6 sehr nahe:

$$+ A_1 = - e + \varphi$$

und also:

$$\frac{A_1}{X_1 - A_1} = -\frac{(\varphi - e)(\varphi - \xi)}{\varphi^2}$$

und

$$\Pi = \frac{\varphi - \xi}{\varphi}\left\{\frac{\xi}{f}\cdot\frac{\varphi - e}{\varphi} + \frac{e}{f}\right\}$$

Es werden also unter diesen Umständen, die durch (7) angegebenen Correctionen stets zu vernachlässigen sein.

Einen ungefähren Ueberblick über die beiden behandelten Arten der mikrometrischen Beobachtung erhält man übrigens durch sehr einfache Betrachtungen, die keine Formeln in Anspruch nehmen. Namentlich lässt sich ohne weiteres einsehen, dass die im zweiten Fall eintretenden Messungsfehler immer ausserordentlich klein sein müssen.

Der Vollständigkeit wegen muss noch auf eine dritte Möglichkeit, mit dem Fadenmikrometer zu messen, aufmerksam gemacht werden. Diese tritt ein, wenn das zu messende Object ausgedehnt und so hell ist, dass es weder einer Faden- noch Feldbeleuchtung bedarf, so z. B. wenn man Details auf der Sonnen-, Mond- oder einer Planetenoberfläche ausmisst, oder wenn man ein von der Tageshelle erleuchtetes irdisches Object vor sich hat. Hier wird jeder Punkt des messenden Fadens abgebildet von denselben Strahlen, welche der mit ihm zur Coincidenz gebrachte Punkt des Objectes aussendet, und es können also unter gewöhnlichen Umständen Fehler des Auges, wenigstens von der Art der in diesem Aufsatze betrachteten, irgend einen Einfluss auf das Messungsresultat nicht erhalten.

Im Ganzen hat sich demnach ergeben, dass die Messung mit dem Fadenmikrometer nur in dem ersten, übrigens nicht schwer zu vermeidenden Falle, merkliche Fehler, welche von dem Astigmatismus des Auges herrühren, aufweist. Bekanntlich aber zeigen die Fadenmikrometermessungen vieler Beobachter sehr bedeutende Fehler, welche sowohl von der Grösse der ausgemessenen Distanz, als auch von der Neigung derselben gegen den Horizont abhängen. Ein allgemein bekanntes und sehr merkwürdiges Beispiel hiefür bildet die grossartige Reihe von Doppelsternbeobachtungen Otto Struve's.[1]) Hier steigen die persönlichen Fehler bis zu hohen Beträgen und ihre Abhängigkeit von Positionswinkel und

1) Observations de Poulkowa, Bd. IX.

Distanz ist von Struve durch äusserst complicirte Formeln dargestellt worden. Durch den Astigmatismus der Hornhaut können solche Fehler ihrer ganzen Wirkungsweise nach wohl kaum erklärt werden. Man muss also annehmen, dass dieselben dadurch zu Stande kommen, dass die Bisection des Sternbildes auf der Netzhaut, das immer eine gewisse Ausdehnung zeigt, in systematisch unrichtiger Weise ausgeführt wird. Die ganze Operation läuft in letzter Instanz doch auf eine Schätzung hinaus, und desshalb werden auftretende Fehler nichts Befremdendes haben, weil ähnliche Schätzungsfehler, die von der Lage des Beobachters gegen den Horizont abhängen, in der physiologischen Optik seit lange besprochen werden. Solche Fehler aber werden jedenfalls von der Stellung des Auges gegen die sogenannte Primärlage abhängen, und da diese wieder von der Zenithdistanz und demzufolge von der Lage des Beobachters gegen das Fernrohr abhängt, so dürfte dies zu grosser Vorsicht mahnen, Correctionsformeln, welche an künstlichen Objecten gewonnen worden sind, auf den Himmel zu übertragen.

Die grosse Wichtigkeit von Untersuchungen von der Art derjenigen O. Struve's bleibt aber bestehen, weil sie über die Grösse und Wirkungsweise der auftretenden Fehler, wenn auch nur in einem speciellen Falle, Aufschluss geben. Aber schon Versuche mit kleinen Fernröhren, ja sogar mit freiem Auge angestellt, werden auf diesem erst neuerdings, vornehmlich auf O. Struve's Anregung hin, kultivirtem Gebiete von grösstem Interesse sein.[1]) Als das beste Mittel jedoch, die genannten Fehler bei wirklichen Sternbeobachtungen zu erkennen und in seiner Gesetzmässigkeit zu verfolgen, muss ich die Anwendung eines reflectirenden Prisma's ansehen.[2]) Ich habe diese Methode angegeben, ohne zu wissen, dass dieselbe schon früher von andern Beobachtern hier und da angewandt worden ist. Ich darf aber vielleicht behaupten, die Vortheile einer solchen Einrichtung in bestimmterer Weise hervorgehoben zu haben, als dies bisher geschehen ist.

---

1) Dieselbe Meinung hat Thiele in seiner eingehenden Besprechung von O. Struve's Messungen ausgesprochen. Vergl. Vierteljahrschrift der A. G. Bd. XV, pg. 314.

2) Vergl. Ueber die Gestalt des Planeten Uranus. Sitzungsbericht der Münchener Akademie. Bd. XIV, pg. 267, 1884.

Der

primäre und sekundäre

longitudinale Elastizitätsmodul

und die

thermische Konstante des Letzteren.

Von

Andreas Miller.

(Mit 2 Tafeln.)

I. Einleitung.

§ 1. In einer früheren Untersuchung[1]) wurde für sechs Metalle, zwei Legierungen und zwei organische Substanzen gezeigt, dass diese Stoffe während der Dehnung ihre Elastizität vorübergehend ändern, dass also ein gespannter Draht unmittelbar nach der Deformation einen anderen longitudinalen Elastizitätsmodul als vor derselben besitzt. Um mich daher leichter verständlich machen zu können, muss ich hier eine unterscheidende Benennung in der Art neu einführen, dass ich den der elastischen Reaktion[2]) vor der Deformation entsprechenden longitudinalen Elastizitätsmodul (E-M) den „primären" (P. E-M) und den der elastischen Reaktion, welche der Deformation folgt, entsprechenden longitudinalen Elastizitätsmodul zum Unterschiede von dem „gewöhnlichen" (E-M) den „sekundären" (S. E-M) nenne.

Meine oben erwähnte Untersuchung hat nämlich ergeben, dass man einen Körper durch mehrmals ununterbrochen wiederholtes An- und Abspannen bei konstanter Temperatur in einen Zustand versetzen kann, in dem er sich vorübergehend wie ein vollkommen elastischer Körper[3]) verhält: Der diesem elastischen Zustande entsprechende sekundäre Elastizitätsmodul ändert sich aber, wie im weiteren Verlaufe dieser Abhandlung gezeigt werden soll, einfach proportional der Temperatur. Er steht somit zur letzteren in wesentlich einfacherer Beziehung, als diejenige ist, welche

---

1) A. Miller, Sitzungsbericht der mathematisch-physikalischen Klasse d. k. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1885. Heft 1. S. 9.

NB. In Zukunft soll (1885. Heft 1) vorstehendes Zitat der Kürze halber ersetzen.

2) *Thomson* und *Tait*, Handbuch der theoretischen Physik, deutsche Uebersetzung von Helmholz und Wertheim. Bd. I. 2. Teil. § 658.

3) *Thomson* und *Tait*, Bd. I, Teil 2. § 672.

Herr Prof. *F. Kohlrausch* und *E. F. Loomis* sowohl, als *Pisati* für den gewöhnlichen E-M nachgewiesen haben. Die Zahl, welche die Aenderung des sekundären longitudinalen Elastizitätsmoduls für 1^0 C des Temperaturzuwachses, bezogen auf den S. E-M bei 0^0, angibt, heisse ich die „thermische Konstante" (T. K.) des S. E-M. Damit glaube ich vorläufig den Titel der Arbeit verständlich gemacht und ihr Hauptziel bezeichnet zu haben.

§ 2. Die Grösse, welche man gewöhnlich als longitudinalen Elastizitätsmodul (E-M) bezeichnet, wird aus der ersten Dehnung eines Drahtes berechnet. Dass diese von den nachfolgenden Dehnungen an Grösse verschieden ausfällt, wenn letztere auf die erste ununterbrochen folgen, und die Messvorrichtung die genügende Empfindlichkeit besitzt, mag nachstehende Uebersicht zeigen. Diese Dehnungsversuche wurden bei ein und demselben Metall zum Teil an verschiedenen Tagen, jedenfalls aber mit Unterbrechungen von 5' bis 40^h angestellt. Dabei war die ständige Belastung für dasselbe Metall konstant. Die Temperatur schwankte innerhalb eines Grades, so dass sie für unseren Fall als ein konstantes Element des Versuches betrachtet werden darf. Sie war die gewöhnliche Temperatur des Arbeitslokales, die zwischen 0^0 und 10^0 C betrug. Die Dehnungen sind in Skalenteilen einer Spiegelvorrichtung — 1 Skalenteil = 2^{mm} — angegeben.

Uebersicht.

Kupfer:		Platina:		Silber:	
Dehnung:		Dehnung:		Dehnung:	
1te	5te	1te	5te	1te	5te
137,6	135,1	51,8	50,9	80,0	78,5
137,0	135,0	51,5	51,0	79,7	78,6
137,6	135,3	51,7	50,9	79,3	78,5
137,2	135,2	51,5	51,0	79,66	78,53 = Mittel
137,1	135,1	51,62	50,95 = Mittel		
137,7	135,1				
137,5	135,0				
137,8	135,0				
137,44	135,10 = Mittel				

Man sieht, dass die 1. Dehnung stets grösser als die 5. ist, und dass man sonach für die physikalische Konstante, welche gewöhnlich als

longitudinaler Elastizitätsmodul bezeichnet wird, einen kleineren Wert erhalten muss, als für jene, die ich den sekundären Elastizitätsmodul nenne.

Das Verhältnis:

$$\frac{137{,}44-135{,}10}{137{,}44}=0{,}016;\quad \frac{51{,}62-50{,}95}{51{,}62}=0{,}013;\quad \frac{79{,}66-78{,}53}{79{,}66}=0{,}014;$$

bei obenbezeichneten Metallen ist nahehin konstant.

Zum Unterschiede vom primären und sekundären E-M soll desshalb hier unter „Elastizitätsmodul" (E-M) der gewöhnliche, aus der ersten Dehnung berechnete, verstanden sein. Ganz unrichtig wäre es jedoch aus obiger Uebersicht zu schliessen, die elastische Reaktion, welche der Verschiebung der Moleküle entspricht, sei während der 5. Dehnung grösser als vor der 1.[1]) Allein noch ein Umstand ist hervorzuheben. Während die grösste und kleinste 1. Dehnung bei Kupfer um 0,44 und 0,36 Sktl., bei Silber um 0,36 und 0,34 Sktl., bei Platina um 0,12 und 0,18 Sktl. vom Mittel abweicht, weichen die 5. Dehnungen hievon bezw. nur um die Werte 0,1 und 0,2; 0,03 und 0,07; 0,05 und 0,05 Sktl. ab. Der Elastizitätsmodul (E-M) ist somit selbst bei konstanter Temperatur Schwankungen unterworfen, indes der sekundäre im allgemeinen als konstant betrachtet werden kann (1885. Heft 1).

§ 3. *Wertheim*[2]) hat seine umfangreichen Untersuchungen über den longitudinalen E-M auch auf dessen Aenderung durch die Wärme ausgedehnt. Es scheint jedoch dabei nicht beabsichtiget gewesen zu sein, den gesetzmässigen Zusammenhang beider Elemente der Beobachtung zu ermitteln. Dagegen scheinen die Versuche, welche Pisati[3]) mit Eisen- und Stahldrähten anstellte, auch bezüglich des longitudinalen E-M darauf abgezielt zu haben.

Eingehende Untersuchungen über den zahlenmässigen Zusammenhang der Elastizität mit der Temperatur liegen hinsichtlich der Torsionselastizität vor. *Pisati*[3]), und früher schon Herr Professor *F. Kohlrausch* und

---

1) A. Miller, Wiedemann's Annalen der Physik u. Chemie. Bd. 25. 1885. S. 451.

2) *Wertheim*, Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband II. 1848.

3) *G. Pisati*, Gaz. chim. ital. VI. 1876. VII. 1877.

NB. Trotz vielfacher Bemühungen habe ich das Original dieser Abhandlung 3) nicht einsehen können. Meine Kenntnis über diese Arbeit beschränkt sich auf einen Bericht in den Beiblättern Bd. I. 1877.

F. E. Loomis[1]) haben die Aenderung, welche der Elastizitätsmodul durch die Temperatur erfährt, bestimmt und gefunden, dass sie nicht nur von der Aenderung der Temperatur, sondern auch von deren Höhe abhängig ist. Nach den Resultaten der zuletzt genannten Forscher wächst die Aenderung des E-M für 1^0 C mit der Temperatur, worin sich eine wesentliche Verschiedenheit in dem Verhalten des gewöhnlichen und sekundären E-M der Wärme gegenüber ausspricht.

§ 4. Ich habe mich schon früher beim Eisen mit dem Einfluss der Wärme auf jenes physikalische Element, welches ich jetzt mit dem Namen sekundärer E-M bezeichne, beschäftiget[2]). Die gefundenen Resultate schienen mir interessant genug, mich der Mühe zu unterziehen, auch das Verhalten anderer Körper nach dieser Richtung zu studieren. Diese Arbeit liess aber auch keinen Zweifel darüber, dass, um ein Verständnis der dabei zutage tretenden Erscheinungen zu gewinnen, vorerst der primäre und sekundäre Elastizitätsmodul bei gewöhnlicher und konstanter Temperatur untersucht werden müsse. Die hierüber von mir erzielten Resultate sind in (1885. Heft 1) niedergelegt.

II. Der Apparat.

§ 5. Es ist derselbe, den ich in einer anderen Abhandlung (1882. Heft 4. § 6) genauer beschrieben habe, und von dem sich dort auch eine vollständige Abbildung befindet. Der Raumersparnis halber werde ich mich hier kurz fassen und auf eine schematische Zeichnung beschränken.

Die Vorrichtung besteht im Wesentlichen in einem ungleichnamigen Hebel DD_1 (Schnellwage) — Fig. 1 —, der an dem eichenen, an beiden Enden in der starken Mauer einer Fensternische eingekeilten Balken A mittels einer sehr starken, eisernen Stange AC aufgehängt ist. Es sind überhaupt alle Teile desselben aus Eisen verfertiget und im Verhältnis

---

1) *F. Kohlrausch* u. *F. E. Loomis*, Poggendorff's Annalen, Bd. 141. 1870.

2) A. Miller, Sitzungsbericht der mathematisch-physikalischen Klasse d. k. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1882. Heft 4.

NB. Künftig soll (1882. Heft 4) dieses Zitat ersetzen.

zu den untersuchten Drähten sehr kräftig konstruiert. Unter der Unterstützungsschneide C des Hebels ist senkrecht zu DD_1 ein Stäbchen mit einer Schraube X angebracht, um den Hebelarm DD_1 in's indifferente Gleichgewicht, das er während der Versuche stets besass, bringen zu können. Zu gleichem Zwecke dient auch das an einem Gewinde verstellbare Gegengewicht Z. Bei D befindet sich eine Schneide, an der mittels einer eisernen Doppelstange die Klemme E aufgehängt ist. Die andere Klemme F ist in einem schweren Stein eingelassen, der auf einer sehr dicken Umfassungsmauer ohne Berührung mit dem Bodengebälk aufliegt. Wenn der Draht an den Klemmen scharf umgebogen wird, so genügt ein mittels Schrauben hervorgebrachter, schwacher Druck der Klemmbacken, der eine kaum merkbare Abplattung des Drahtes bewirkt, um letzteren genügend festzuhalten. Q ist ein Belastungsstück — Anfangsbelastung, ständige Belastung —, das während einer Versuchsgruppe beständig an einer Stelle des Hebels bleibt, indes das Belastungsstück P mittels der Kurbel L und der Schraube K langsam und möglichst gleichmässig gehoben und gesenkt werden kann, wodurch abwechslungsweise Spannung und Abspannung des zu untersuchenden Körpers bewirkt wird. Um den Draht wenigstens während kurzer Zeiten keinen erheblichen Temperaturschwankungen auszusetzen, geht er durch ein mit Baumwolle verstopftes Rohr, das wieder mit zwei Blechrohren MM, von denen das äussere in einem dicken Filzmantel eingehüllt, umgeben ist. Diese ebenerwähnte, in der Figur 1 nur in grossen Zügen angedeutete Umhüllung des Drahtes dient nämlich auch dazu, den Draht durch Einleiten von Wasserdampf höheren Temperaturen aussetzen zu können.

Fig. 2 stellt einen Durchschnitt des Blechmantels dar, durch den der Versuchsdraht geht. Der Weg, den der im Gefässe G entwickelte Wasserdampf nimmt, ist aus der Figur 2 ebenfalls leicht zu ersehen. Er steigt im mittleren Raume auf, sinkt im äusseren herab, von wo er durch das Rohr S in's Freie strömt. Der Versuchsdraht geht durch den mittleren Raum, der durch in der Mitte ausgebohrte Korkstöpseln verschlossen ist. In diesen Bohrungen ist der Draht mit Baumwolle umgeben. Hiedurch wird nicht nur ein genügender Abschluss des Raumes gegen aussen hergestellt, sondern auch jeder nennenswerte seitliche Druck auf den Draht, der Fehler erzeugen könnte, vermieden.

Ferner ist H ein Thermometer mit Zehntelgradteilung zur Bestimmung der Temperatur des Drahtes. Sehr empfindliche, ebenfalls in Zehntelgrade geteilte Thermometer sind auch bei U und W — Fig 1. — in die Eisenteile des Apparats eingelassen, um die Temperatur derselben anzugeben, die wegen der an den Ablesungen anzubringenden Korrekturen ermittelt werden muss. Die Temperatur des Zimmers wurde stets gemessen. Dasselbe ist indess sehr günstig gelegen, indem es vom direkten Sonnenlichte nur im Hochsommer kurze Zeit beschienen wird; Temperaturschwankungen in demselben innerhalb kurzer Zeit rühren zunächst von den anwesenden Personen, Lampen etc. her.

NN bezeichnet eine vertikale Spiegelskala und R das Ablesungsfernrohr, welches auf dem Spiegel B senkrecht steht. In der durch die Achse von R gelegten horizontalen Ebene befindet sich der Nullpunkt der Skala. Sie wird von einer verstellbaren Lampe beleuchtet. Fernrohr und Skala sind mittels dreier starker, eiserner Träger an einer dicken Kirchenmauer festgemacht. Um den Moment, in welchem P frei hängt oder nur von dem Tischchen I getragen wird, genau zu fixieren, ist ein elektrisches Läutwerk, in dessen Schliessungsbogen die Strecke CI liegt, angebracht.

Die Entfernung des Spiegels B von der Skala NN beträgt 2806 Skalenteile, CD = 35,4 Sktl. Die Länge der Eisenstange U wurde zu 250, jene von W zu 160 Sktl. in Rechnung gezogen. (1 Skalenteil = 2^{mm}). Da 0,1 Skalenteil noch mit ziemlicher Sicherheit geschätzt werden konnte, so werden von dem Apparate Längenveränderungen des Drahtes von $0{,}001^{mm}$ mit entsprechender Sicherheit angegeben.

Vorversuche, welche ich anstellte, überzeugten mich, dass zu einer Befürchtung, es möchte aus einer möglichen, selbst sehr schwachen Durchbiegung des Balkens A eine Fehlerquelle entstehen, kein Grund vorhanden ist. Ich verweise in der Beziehung auf (1885. Heft 1. III. § 10).

III. Beobachtungsweise.

§ 6. Diese ist dieselbe, wie sie in (1885. Heft 1. § 6) für Beobachtungen bei gewöhnlicher Lufttemperatur beschrieben worden ist. Die Versuche wurden hier bei Temperaturen zwischen 0^0 und 100^0 C ausgeführt, und die Beobachtungsweise war auch bei den höheren Tem-

peraturen die gleiche wie bei niederen. Um sich leicht ein Bild von der Beobachtungsart zu verschaffen, lasse ich eine ausführliche Tabelle über einige aufeinanderfolgende Versuchsgruppen eines Metalls folgen.

Tabelle.

Untersuchte Substanz: **Silber.**

$\pi_1 = 2{,}4633$ kg. $k = 1{,}92$. $d_1 = 1{,}099^{m}$.

$\pi_2 = 4{,}7406$ kg. $\alpha = 0{,}00001868$. $q = 0{,}3197^{qmm}$. $d = 0{,}638^{mm}$.

N	ν	z	v	t_0 u. t_1	T_0 u. T_1	τ_0 u. τ_1	a_ν	b_ν	c_ν	λ	l	ϱ	δ	Dat.
Ia	1			5,7	6,6	6,5	— 55,8	1,9	— 54,8					$23/_{1}84$
	2							2,0	— 54,7				619,2	
	3	7′ 20″	1,3					2,0	— 54,4			28,1		
	4							2,1	— 54,3		14,6			
				5,8										
	5			5,8	6,9	6,7		2,1	— 54,2	647,3				
I	1			97,1	18,8	10,5	102,0	165,0	104,7					$23/_{1}84$
	2							165,7	105,0				625,6	
	3	6′ 40″	1,5					166,0	105,3			70,9		
	4							166,2	105,7		36,3			
				97,1										
	5			97,1	19,9	11,1		166,7	105,8	696,5				
II	1			81,5	16,1	10,8	74,0	134,0	72,3					$23/_{1}84$
	2							131,3	70,4				596,4	
	3	7′ 0″	1,4					129,0	68,1			87,2		
	4							126,8	66,0		45,4			
				74,5										
	5			73,1	14,2	10,8		124,5	64,0	683,6				

u. s. w.

1) d_1 ist die Länge des geprüften Drahtstückes zwischen den Klemmen;

2) d der mittels einer Mikrometerschraube gemessene Durchmesser und

3) q der Querschnitt des Drahtes.

4) α ist der mittlere thermische Ausdehnungskoëffizient des untersuchten Drahtindividuums bei der konstanten Belastung π_1.

5) Die ständige Belastung des Drahtes zum Geradehalten betrug π_1 kg auf das qmm.

6) Diese Belastung π_1 wurde successive durch Herabschrauben des Tischchens I auf $\pi_1 + \pi_2$ kg für das qmm vermehrt und durch Hinaufschrauben desselben wieder auf π_1 vermindert. Die Spannung des Drahtes verändert sich also ununterbrochen successive zwischen den Grenzen π_1 und $\pi_1 + \pi_2$. Fünf solche ununterbrochen aufeinanderfolgende „Versuchsreihen" bilden eine Versuchsgruppe".

7) $k = \frac{\pi_2}{\pi_1}$.

8) N ist die Ordnungszahl der Versuchsgruppe und

9) ν jene einer Versuchsreihe.

10) a_1 (d. i. a_ν für $\nu = 1$) ist die Anzahl der Skalenteile, welche unmittelbar vor Beginn der Versuchsgruppe N bei der ständigen Belastung π_1 abgelesen worden ist.

11) b_ν ist die Anzahl der Skalenteile, welche bei der Spannung $\pi_1 + \pi_2$ abgelesen wurde.

12) c_ν ist die Anzahl der bei der beständigen Belastung π_1 abgelesenen Skalenteile vom Ende der 1. Versuchsreihe an, so dass für die einzelnen Reihen $a_{\nu+1} = c_\nu$ ist.

Die Zahlen b_ν und c_ν wurden jedesmal sofort beim Eintreten der Spannungen $\pi_1 + \pi_2$ beziehungsweise π_1 abgelesen.

13) t_0 bedeutet die mittlere Temperatur des untersuchten Drahtes am Anfange, t_1 jene am Ende der Versuchsgruppe.

14) T_0 die Temperatur des unteren Apparatteiles W beim Beginne, T_1 am Ende der Gruppe.

15) Die gleiche Bedeutung hat τ_0 und τ_1 für den oberen Apparatteil U.

16) Die zwischen t_0 und t_1 stehende Zahl ist die für die Zeit zwischen der 4. und 5. Beobachtungsreihe berechnete, mittlere Temperatur t des Drahtes.

17) z die Dauer der Versuchsgruppe in Minuten und Sekunden, mittels einer stellbaren Sekundenuhr gemessen.

18) v ist die mittlere Geschwindigkeit in Skalenteilen, mit welcher der Fernrohrzeiger über die Skala hinwegleitet.

19) In der letzten Rubrik ist das Datum der Versuchsgruppe angegeben.

20) λ ist die aus den Werten b_4, b_5, c_3, c_4, c_5 berechnete mittlere Dehnung des Drahtes, welche für die 4. und 5. An- und Abspannung als gleich angenommen werden durfte. Die in dieser Rubrik eingetragenen Zahlen geben das 1000fache der von π_2 hervorgebrachten Dehnung in mm für 1^m Drahtlänge an.

21) l ist das 1000fache der Verlängerung in mm, welche 1^m des Drahtes bei der Spannung π_1 während einer Versuchsgruppe vorübergehend erfahren hat.

22) $\varrho = \text{kl.}$

23) $\delta = \lambda - \varrho$.

IV. Bestimmung von in § 6 angeführten, nicht direkt messbaren Grössen.

§ 7. Einige Umstände verursacht die Bestimmung der Temperatur des Drahtes. Es lag nahe, den zu prüfenden Körper selbst als thermometrische Substanz zu verwenden. Ich habe auch die Wärmeausdehnungskoëffizienten aller untersuchten Drähte bestimmt und mit Beiziehung dieser und der Zeigerverschiebungen die Temperaturen berechnet. Allein trotz der sorgfältigsten Korrekturen ergaben sich bei einzelnen Substanzen so erhebliche Abweichungen von der gemessenen Temperatur des Raumes, durch den der Draht im Dampfmantel ging, dass mir dieses Verfahren zu unzuverlässig schien, um es hier anzuwenden, obwohl gerade es am sichersten zur Bestimmung der wahren Temperatur des Drahtes führen müsste, wenn der Einfluss der elastischen Nachwirkung desselben mit Sicherheit eliminiert werden könnte.

§ 8. Ich ging nun darauf aus, die mittlere Temperatur des Raumes, durch den der Draht geht, zu bestimmen, da nämlich angenommen werden kann, dass dieser wegen seiner Dünne eine mit jenem gleiche Temperatur besitzt. Da jedoch das Thermometer H, dessen Gefäss in der Mitte des Raumes sitzt, die mittlere Temperatur desselben voraussichtlich nicht angibt, und die Anbringung zweier weiterer Thermometer an den Enden der Röhre wegen der notwendig gleichzeitigen Ablesung fortgesetzt noch zwei Beobachter erfordert haben würde, so beschränkte ich mich darauf, ein für allemal die Abweichung der mittleren Temperatur des Raumes, also

auch des Drahtes, von der Temperatur in der Mitte des Raumes zu bestimmen, so dass bei den Versuchen zum Zweck der Ermittelung der Temperatur des Drahtes nur mehr die Angabe des Thermometers H abzulesen war.

Zu dem Zwecke wurden ausser dem Instrumente H in der Röhre auch an jedem Ende derselben ein Thermometer angebracht, das ebenfalls die Ablesung auf $0{,}1^0$ genau gestattete.

Die Angaben dieser Thermometer wurden auf die eines Normalthermometers, das vorher einer genauen Prüfung unterzogen ward, auf graphischem Wege zurückgeführt. Während der Erkaltung des Raumes von 100^0 auf etwa 10^0 C waren gleichzeitige Beobachtungen an den 3 Instrumenten angestellt. Aus den Angaben eines jeden Thermometers wurde die jeweilige wahre Temperatur an den 3 Stellen des Raumes nach einem gleich nachher zu erörterndem Verfahren ermittelt.

Selbst bei den höchsten Temperaturen wich keine derselben an den Enden der Röhre 2^0 C von dem Mittel aus den Temperaturen an den 3 beobachteten Stellen ab, so dass dieses Mittel als die mittlere Temperatur des Raumes betrachtet werden durfte. Nachstehende Tabelle zeigt den Verlauf der Temperatur in der Mitte des Raumes und denjenigen der mittleren Temperatur desselben. Die Differenz f_4 beider Werte wurde graphisch dargestellt.

Tabelle.

Temperatur in der Mitte.	Mittlere Temperatur.	f_4
6,15	6,13	— 0,02
34,70	34,06	— 0,64
42,88	42,05	— 0,83
60,67	59,56	— 1,11
74,36	72,45	— 1,91
81,02	80,02	— 1,00
87,87	89,84	+ 1,97
99,46	98,16	— 1,30

§ 9. Zur Auffindung der wahren Temperatur in der Mitte des Raumes aus den Ablesungen am Thermometer H bedurfte es mehrfacher Korrekturen. Es musste angenommen werden, dass der Quecksilberfaden vom Null-Punkte der Skala an nicht mehr die Temperatur des Gefässes

habe. Die nach § 27 des Leitfadens der praktischen Physik von *F. Kohlrausch* berechneten Korrekturen f_1 wurden graphisch dargestellt.

Ferner war das Thermometer H wenig zuverlässig; es wurde nach dem Normalthermometer geaicht und die Differenzen f_2 wurden ebenfalls graphisch so dargestellt, dass noch $0{,}01^0$ C geschätzt werden konnte.

Da das Thermometer H wegen der Grösse seiner Quecksilbermasse der Temperaturabnahme des Raumes nicht folgte, war hiewegen eine weitere Korrektur veranlasst. Bei dieser diente mir das Verfahren des Herrn Prof. *F. Kohlrausch* [1]) zum Vorbilde. Aus dem Newton'schen Erkaltungsgesetze ergibt sich die Korrektur

$$f_3 = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial(\eta_0 - \eta_1)}{\partial z},$$

worin η_0 und η_1 die Ablesungen am Thermometer H beim Beginn und am Ende einer Versuchsgruppe N, und z die Dauer der letzteren in Minuten bedeutet. Als Mittel aus 7 Beobachtungen unter Zuhilfenahme eines wegen der Kleinheit seiner Quecksilbermasse sehr empfindlichen Thermometers ergab sich die Konstante $\frac{1}{h} = 3{,}20$. Man erhält sonach bei Berücksichtigung der Vorzeichen t_0 und t_1 aus den Formeln:

$$t_0 = \eta_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$
$$t_1 = \eta_1 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

Für die Temperatur t zwischen der Versuchsreihe 4 und 5, die dem λ entspricht, ist zu bemerken, dass sie um $\frac{1}{5}(t_0 - t_1)$ höher liegt als t_1, sonach

$$t = t_1 + \tfrac{1}{5}(t_0 - t_1) \text{ ist.}$$

Die Ablesungen an den 2 Thermometern, deren Behälter in die Apparatteile W und U versenkt waren, also die Grössen T_0, T_1 und τ_0, τ_1 bedurften keiner Korrektur.

§ 10. Die mittlere Geschwindigkeit v, bezogen auf die Sekunde, berechnet sich aus:

$$v = \frac{5}{z}[(b_1 - a_1) + (b_5 - a_5)],$$

wobei z die mittels einer Sekundenuhr beobachtete Dauer einer Versuchsgruppe N ist.

---

1) *F. Kohlrausch*, Poggendorff's Annalen Bd. 141. 1870. S. 486.

V. Die Berechnung der Werte λ, l, ϱ und δ.

§ 11. Hinsichtlich der Theorie des Apparates muss ich mir der Raumersparnis wegen gestatten auf [1882. Heft 4. § (8—11)], sowie (1885. Heft 1. V) zu verweisen. Ich werde mich hier darauf beschränken, die Formeln, wie sie sich für die vorliegenden Fälle gestalten, mit den Zahlenwerten der Konstanten des Apparates anzuführen. Zu den in § 6 aufgeführten Bezeichnungen sind für das Folgende noch einige hinzuzufügen:

1) n_0 und n_1 sind die Anzahl von Skalenteilen, welche bei den Temperaturen (t_0, T_0, τ_0) und (t_1, T_1, τ_1) abgelesen worden sind.

2) $n = n_1 - n_0$.

3) l_1 ist die Verlängerung, welche 1^m des Drahtes nach 5 maliger An- und Abspannung bei der Belastung π_1 vorübergehend zeigt, und zwar in Skalenteilen angegeben.

4) λ_1 entspricht genau der in § 6 Ziff. 20 angegebenen Erklärung, nur mit dem Unterschiede, dass die Einheit von λ_1 ein Skalenteil, und das Resultat nicht vertausendfacht ist.

§ 12. Demnach ist:

$$\alpha = \frac{1}{d_1 (t_1 - t_0)} \cdot \left[0{,}0063079\,(n_1 - n_0) - 0{,}000\,000\,000\,3\,(n_1^3 - n_0^3)\right]$$
$$- \frac{1}{d_1 (t_1 - t_0)} \left[0{,}002\,(T_1 - T_0) + 0{,}003\,(\tau_1 - \tau_0)\right] \quad . \quad . \quad \text{A)}$$

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{d_1 \alpha} \left[0{,}0063079\,(n_1 - n_0) - 0{,}000\,000\,000\,3\,(n_1^3 - n_0^3)\right]$$
$$- \frac{1}{d_1 \alpha} \left[0{,}002\,(T_1 - T_0) + 0{,}003\,(\tau_1 - \tau_0)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{B)}$$

$$n = 158{,}533\, d_1 \alpha\,(t_1 - t_0) + 0{,}3\,(T_1 - T_0) + 0{,}5\,(\tau_1 - \tau_0) \quad . \quad . \quad . \quad \text{C)}$$

wenn das Glied mit dem Faktor $n_1^3 - n_0^3$ in B) vernachlässiget werden darf.

$$l_1 = \frac{1}{d_1} \left[(c_5 - a_1) - n\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{D)}$$

für den Meter in Skalenteilen.

$$\lambda_1 = \frac{1}{d_1} \cdot \frac{1}{2} \left[(b_4 + b_5) - c_4 - \frac{c_3 + c_5}{2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{E)}$$

für den Meter in Skalenteilen.

In Gl. A), B) und C) ist d_1 in Skalenteilen, in D) und E) in m zu nehmen. Durch Gl. D) und E) ist der Einfluss der Temperatur auf die Beobachtung schon eliminiert. Insbesondere ist dies bezüglich Gl. E) hervorzuheben, weil sie es möglich macht, während der Abkühlung zu beobachten. Das Genauere hierüber findet sich in (1882. Heft 4. § 21). Es soll hier nur darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Giltigkeit von E) eine stetige Aenderung der Temperatur während der Dauer der Versuchsgruppe voraussetzt, eine Bedingung, die wenigstens von circa 80^0 C (gegen 0^0) stets sicher erfüllt ist. (Siehe Tabelle § 8.)

§ 13. Aus den Grössen λ_1 und l_1 berechnen sich die in den am Schluss der Abhandlung angehängten Tabellen angegebenen, wirklichen Verlängerungen λ und l pro Meter des untersuchten Drahtes für die Belastungen π_2 und π_1. Die folgenden Formeln liefern das 1000 fache der Verlängerung des Meters in mm.

$$\lambda = \{0{,}0063079 \cdot \lambda_1 - 0{,}000\,000\,000\,3\,[(n_0 + \lambda)^3 - n_0^3]\} \cdot 2 \cdot 1000 \quad \text{F)}$$

$$l = \{0{,}0063079 \cdot l_1\} \cdot 2 \cdot 1000 \quad \text{G)}$$

VI. Der primäre und sekundäre Modul.

§ 14. Die Bedeutung und Bestimmung der Grössen ϱ und δ habe ich in (1885. Heft 1. § 18 und § 19) des Näheren erörtert. Hier mag eine kurze Fassung bezüglich dieser Elemente der Versuche gestattet sein. Wenn der Draht 5 mal an- und abgespannt wird, so zeigt er nach den in (1885. Heft 1.) niedergelegten Versuchsergebnissen etwa während der 4. und 5. Deformation selbst bei höheren Temperaturen vorübergehend ein Verhalten, wie ein vollkommen elastischer Körper. Da in diesem elastischen Zustande seine Verlängerung und Verkürzung gleich und zwar λ ist, so ist, wenn wir den Wert des sekundären Elastizitätsmoduls mit E_s bezeichnen:

$$E_s = \frac{\pi_2}{\lambda} \quad \text{H)}$$

Bezeichnet ferner E_p den primären E — M, und ist l_0 die elastische Dehnung, welche der Draht, der schon vor dem Einklemmen in den

Apparat durch Anwendung verschiedener Ziehlöcher gerade gemacht worden war, durch π_1 erfahren, so hat man:

$$E_p = \frac{\pi_1}{l_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad I)$$

Unmittelbar nach dem 5maligen An- und Abspannen, wenn der Draht wieder nur mehr unter dem Zuge π_1 steht und dabei eine Verlängerung l gegenüber seinem Zustande vor der wiederholten Deformation zeigt, ist:

$$E_s = \frac{\pi_1}{l_0 + l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad K)$$

Aus Gl. H) und K) ergibt sich:

$$\frac{l}{l_0} = \frac{\pi_2}{\pi_1 \lambda - \pi_2 l}$$

und daraus

$$\frac{\pi_1}{l_0} = \frac{\pi_2}{\lambda - \frac{\pi_2}{\pi_1} l} = \frac{\pi_2}{\lambda - kl}.$$

Sonach ist:

$$E_p = \frac{\pi_2}{\lambda - kl} \quad \ldots\ldots\ldots \quad L)$$

oder, wenn

$$kl = \varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad M)$$

$$E_p = \frac{\pi_2}{\lambda - \varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad N)$$

$$E_p = \frac{\pi_2}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad O)$$

wenn

$$\lambda - \varrho = \delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad P)$$

gesetzt wird.

§ 15. Der Unterschied zwischen dem primären und sekundären Elastizitätsmodul, also die Variation des Moduls für einen bestimmten Fall, beträgt:

$$E_p - E_s = \frac{\pi_2}{\lambda} \cdot \frac{\varrho}{\lambda - \varrho} = E_s \cdot \frac{1}{\frac{\lambda}{\varrho} - 1}$$

oder

$$E_p - E_s = \frac{\pi_2}{\delta} \cdot \frac{\varrho}{\lambda} = E_p \cdot \frac{\varrho}{\lambda}.$$

Ferner ist:

$$E_p = E_s \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{\lambda}} \qquad \text{und} \qquad E_s = E_p\left(1 - \frac{\varrho}{\lambda}\right)$$

Während z. B. für Kupfer von 10^0 C bei einem gewissen elastischen Zustande des Drahtes sich $E_s = 12905$ ergab, betrug $E_p = 13873$; der selbst bei konstanter Temperatur mit der Zeit im allgemeinen veränderliche Unterschied $E_p - E_s$ hatte somit den erheblichen Wert 968.

§ 16. Die Tabellen am Schlusse der Abhandlung lassen entnehmen, dass bei konstanter Temperatur $b_1 - a_1$ die grösste Dehnung ist, indes die Verlängerung $b_5 - a_5$ die im allgemeinen kleinste und gleich den Verkürzungen $b_\nu - c_\nu$ ist. Daraus könnte man verleitet sein, den Schluss zu ziehen, wie dies *Tomlinson*[1]) gethan hat, es nähme der $E - M$ bei fortgesetztem Deformieren zu. Allein das gerade Gegenteil ist richtig. Ich habe mir bereits früher gestattet, einige Bemerkungen[2]) zur eben erwähnten Arbeit zu machen, muss jedoch hier nochmal kurz auf die Frage, ob von der 1. zur 5. An- und Abspannung eine Erniedrigung oder Erhöhung des $E - M$ stattfindet, eingehen, um einer, wie mir scheint, ziemlich allgemein bestehenden Ansicht entgegen zu treten.

Ist nämlich E' der $E - M$, welcher dem Zustande des Drahtes während oder nach der 1. Belastung mit $\pi_1 + \pi_2$ entspricht, sowie l' die Längenzunahme, welche die Längeneinheit des Drahtes bei der ständigen Belastung π_1 nach der 1. Be- und Entlastung zeigt, endlich λ' die Verkürzung der Längeneinheit des Drahtes bei der 1. Entlastung, so hat man unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen:

$$E_p = \frac{\pi_1}{l_0}; \qquad E_s = \frac{\pi_2}{\lambda};$$

$$E_p' = \frac{\pi_1 + \pi_2}{l_0 + l' + \lambda'}; \qquad E_s = \frac{\pi_1}{l_0 + l};$$

wo l die ganze Längenzunahme der Längeneinheit des Drahtes von der 1. bis 5. Be- und Entlastung nach der hier eingeführten Bezeichnung bedeutet. Nun ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen:

---

1) *H. Tomlinson*, Phil. Trans. 1883. p. 1.

2) A. Miller, Annalen d. Physik etc. 1885. Bd. 25. S. 450.

$$l_0 = \frac{\pi_1 \lambda - \pi_2 l}{\pi_2}$$

und folglich:

$$E' = \frac{(\pi_1 + \pi_2)\pi_2}{\pi_1 \lambda - \pi_2 (l - l') + \pi_2 \lambda'}$$

Da aber nach den Erfahrungen, welche die Tabellen ausweisen, $\lambda' = \lambda$ genommen werden darf, so ist:

$$E' = \frac{(\pi_1 + \pi_2)\pi_2}{(\pi_1 + \pi_2)\lambda - \pi_2 (l - l')} \quad \text{oder} \quad E' = \frac{\pi_2}{\lambda - \frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_2}(l - l')}.$$

Weil aber bei Metallen stets $l > l'$, so ist:

$$E' > E_s.$$

Der E — M ist also nicht nur nach der 1. Belastung mit π_2 kleiner als vor derselben, sondern weil auch, nahezu

$$E' = \frac{\pi_1}{l_0 + l'},$$

also $E_p > E'$ gesetzt werden darf,

$$E_p > E' > E_s.$$

Während also der Draht fortgesetzt und ununterbrochen Verlängerungen und Verkürzungen ausgesetzt ist, sinkt sein Elastizitätsmodul von der ursprünglichen Höhe E_p vor der Deformation bis zu einer gewissen Grenze E_s herab, in der angelangt, er sich wie ein vollkommen elastischer Körper verhält.

Die Dehnungen nehmen, wie ich schon (1885. Heft 1. § 44) hervorgehoben, nur deshalb scheinbar ab, weil auch π_1 infolge der Aenderung des E — M durch die Deformation eine Verlängerung des Drahtes hervorbringt, die irrtümlich ebenfalls der Belastung π_2 zugeschrieben, durch dieselbe aber nur mittelbar veranlasst wird. Man geht eben bei der üblichen Methode zur Bestimmung des longitudinalen E — M von der für mich zweifellos unrichtigen Ansicht aus, die ständige Belastung π_1 sei auf das Resultat von keinem Einfluss. Und dieser Irrtum wiederum entspringt aus der Vernachlässigung der elastischen Nachwirkung, von der jede Dehnung begleitet ist, oder dem „Nachwirkungsrückstande“, wie ich diese Verlängerung l in (1885. Heft 1. § 18) nannte.

Die in den Lehrbüchern der Physik meist enthaltene Vorschrift, mit der Ablesung abzuwarten, bis der Draht seine ursprüngliche Länge wieder angenommen hat, behebt die Mängel nicht, da die successive Längenänderung bei konstanter Spannung nur infolge einer Elastizitätsänderung denkbar ist.

VII. Die Versuche.

§ 17. Die untersuchten Substanzen waren:

1) die einfachen Metalle: Platina, Eisen, Silber, Kupfer, Zink und Blei;
2) die Legierungen: Messing und Neusilber; und
3) die organischen Stoffe: Fischbein und Kautschuk.

Nur den Kupferdraht habe ich als chemisch reinen bezogen. Die übrigen Stoffe waren derart, wie sie im Handel vorkommen. Die nicht organischen Stoffe wurden, ausgenommen Zink und Blei, chemisch analysiert. Das Ergebnis dieser Analyse[1]) lasse ich hier folgen.

Platindraht No. II	97,11 % Platin;
Silberdraht	98,88 % Silber;
Kupferdraht No. II	99,88 % Kupfer;
Eisendraht No. III	99,55 % Eisen;
Messingdraht	68,10 % Kupfer;
	31,74 % Zink;
	0,16 % Blei;
Neusilberdraht	62,86 % Kupfer;
	27,44 % Zink;
	0,12 % Blei;
	9,58 % Nickel.

Die Versuche schlossen sich zeitlich enge an die in (1885. Heft 1.) beschriebenen an. Es wurden nämlich die in der eben zitierten Abhandlung: „Beitrag zur Kenntnis der Molekularkräfte“ dargelegten Versuche

1) Die Analyse wurde im chemischen Laboratorium unserer Anstalt, der k. Kreis-Realschule München, von meinem sehr verehrten Herrn Kollegen *Max Fuchs*, k. Reallehrer für Chemie und Naturgeschichte, ausgeführt. Ich danke ihm hiemit für seine kollegiale Freundlichkeit und Bemühung bestens.

bei gewöhnlicher Temperatur ausgeführt, und diesen folgten an den gleichen Individuen die hier behandelten bei höheren Temperaturen.

Der eingespannte Draht ward zuerst bei gewöhnlicher Temperatur geprüft, dann diese auf circa 100° C erhöht, auf dieser Höhe etwa 30 Minuten erhalten, der Draht dann wieder geprüft und sodann nach Absperrung des Dampfes die Prüfung von ungefähr 10 zu 10 Graden wiederholt, wodurch die in den am Schlusse der Abhandlung angefügten Tabellen A verzeichneten Versuchsgruppen entstanden. Die letzte Versuchsgruppe, bei wieder vollständig abgekühltem Drahte, wurde in der Regel erst anderentags vorgenommen.

Um zu erfahren, ob nach wiederholten Erwärmungen und Erkaltungen der sekundäre Modul E_s einen anderen Verlauf habe, als bei der ersten Erkaltung, wurde dann der Draht in der Regel an jedem der folgenden 3 Tage bis 100° C erwärmt, auf dieser Temperatur wieder etwa 30 Minuten belassen und nachher der Dampf jedesmal abgesperrt. Bei diesen 3 Abkühlungen fanden Prüfungen auf die Elastizität nicht statt, dagegen wurden stets die nötigen Temperatur- und Skalenablesungen gemacht, um den thermischen Ausdehnungskoëffizienten α nach Formel A (§ 12) berechnen zu können.

Erst bei der nächsten, also 5. Erwärmung, respektive der darauf folgenden Erkaltung, wurde der Draht wieder wie früher auf seine Elastizität geprüft. — Tabellen B —. Die ständige Belastung π_1 war für eine Substanz stets die gleiche, weil, wie schon erwähnt, von ihr die Grösse der elastischen Dehnungen abhängig ist. Die Belastung π_2 wurde, wo bei höheren Temperaturen Streckungen zu befürchten waren, entsprechend verkleinert.

§ 18. Die in § 14 ausgeführten Berechnungen beruhen nämlich darauf, dass die Verlängerungen l nur vorübergehend bestehen, somit keine Streckungen enthalten. Es wurden die Drähte vor Beginn der Versuche gestreckt und nachher verhältnismässig nur kleine Belastungen π_2 verwendet. Die zweite Prüfung auf die Elastizität, bei der fünften Abkühlung also, bietet selbstverständlich eine grössere Garantie, dass Streckungen nicht vorhanden sind, als die erste.

Ausserdem wurde am Schlusse der Untersuchung eines Drahtes noch berechnet, wie viel Skalenteile x von der Summe $V = d_1 \Sigma(b_\nu - c_\nu)$ der

in den aufeinanderfolgenden Versuchsgruppen entstandenen Nachwirkungsrückständen l bis zum Beginn der letzten Versuchsgruppe N verschwunden waren. Wird nämlich die Kontrolle zwischen den Gruppen N und N_1 vorgenommen, und bezeichnet b den wirklichen Abstand der Zeigerstellungen für den Beginn beider Gruppen und F (= n) die Anzahl der Skalenteile, um welche sich die Zeigerstellung infolge der auftretenden Temperaturdifferenzen $(t_1 - t_0)$, $(T_1 - T_0)$, $(\tau_1 - \tau_0)$ geändert hat, so ist:

$$V + F - b - x = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q),$$

worin F sich aus Gl. C) berechnet. Da $b - F = V - x$, so gibt die erste Differenz den noch bestehenden Rückstand der E — N an.

VIII. Die Tabellen.

§ 19. An das Ende dieser Abhandlung sind die Versuchsergebnisse bei den einzelnen hier durchforschten Substanzen in Tabellen angefügt. Obgleich hiedurch die Arbeit nicht unwesentlich an Umfang zunimmt, glaubte ich dennoch die Versuchsergebnisse wenigstens soweit mitteilen zu sollen, dass sie in den wesentlichsten Punkten eine Kontrolle und etwaige weitere Ausnützung gestatten.

Für jede untersuchte Substanz ergeben sich 2 Tabellen. Die eine, mit A bezeichnet, gibt immer die Versuchsresultate bei der ersten, die andere mit B bezeichnet, bei der fünften Abkühlung an. Diese Tabellen sind der Mustertabelle in § 6 ganz konform angelegt, soweit zulässig, jedoch verkürzt. In den mit B kennbar gemachten Tabellen sind die Rubriken ν, z, (T_0 und T_1), (τ_0 und τ_1) weggelassen. Von den Temperaturen des Drahtes ist nur mehr jene t angegeben, die dem Mittel zwischen $\nu = 4$ und $\nu = 5$ jeder N entspricht. Bei den Tabellen A fehlen ausserdem auch noch die Rubriken l, ϱ und δ, da bei der ersten Abkühlung befürchtet werden musste, es möchten in den beobachteten Werten l auch Streckungen enthalten sein. Wie noch gezeigt werden wird, ist die Befürchtung nicht durchwegs begründet, aber jedenfalls bieten die Tabellen B ein höheres Interesse dar als die Tabellen A. Es wird nochmal daran erinnert, dass die Zahlen λ, l, ϱ und δ das 1000fache der von π_2 kg hervorgebrachten Verlängerungen sind, gemessen in mm, bei einer Drahtlänge von 1^m. Nur bei den organischen Substanzen sind die Verlängerungen in einfachen Skalenteilen angegeben.

IX. Die graphische Darstellung der Versuchsergebnisse.

§ 20. Um einen Ueberblick über die gewonnenen Versuchsergebnisse zu erhalten, habe ich dieselben graphisch dargestellt. (Siehe die angefügten Tafeln.)

Die Temperaturen sind als Abscissen, die zugehörigen Werte von $\lambda' = \frac{\lambda}{\pi_2} = \frac{1}{E_s}$ und $\delta' = \frac{\delta}{\pi_2} = \frac{1}{E_p}$ als Ordinaten aufgetragen. Dem λ' entspricht die Temperatur t, indes t_0 dem δ' zukommt. Dieses Verfahren, welches einen Vergleich der bei den verschiedenen Stoffen gewonnenen Resultaten ermöglichet, wurde bei allen Substanzen, die organischen ausgenommen, eingehalten. Bei letzteren wurde λ und δ selbst aufgetragen.

Die mit A_λ benannte Linie bei jeder Substanz stellt, der Bezeichnung in den Tabellen entsprechend, das Ergebnis der Beobachtung bei der ersten, die mit B_λ bezeichnete jenes bei der fünften Abkühlung dar. B_δ bezieht sich auf die Werte δ', wie A_λ und B_λ auf jene λ'.

In den graphischen Darstellungen finden sich ausser den eben bezeichneten Linien A_λ, B_λ, B_δ noch isolierte Punkte ⊛, die zu diesen Linien gehören und entsprechend mit A_λ, B_λ, B_δ benannt sind. Sie stellen die Ergebnisse der Versuchsgruppen NI^a vor der jeweiligen Erwärmung dar.

X. Die thermische Konstante.

§ 21. Angesichts der Linien B_λ für die Metalle und Legierungen wurde es versucht, die Abhängigkeit des sekundären Elastizitätsmoduls E_s von der Temperatur t durch die Relation:

$$E_s = E_0(1 + \gamma t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R)$$

darzustellen, worin E_0 denselben Modul bei der Temperatur 0^0 und γ jene Konstante bezeichnet, die ich eingangs (§ 1) mit dem Namen: thermische Konstante des sekundären Elastizitätsmoduls belegte. Der Wert von γ wurde nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt, welche

$$\gamma = \frac{\Sigma t \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} - n \cdot \Sigma \frac{t}{\lambda}}{\Sigma t \cdot \Sigma \frac{t}{\lambda} - \Sigma \frac{1}{\lambda} \cdot \Sigma t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S)$$

liefert, worin n die Anzahl der zur Berechnung[1]) des γ benützten Beobachtungspaare von t und λ bedeutet.

§ 22. Zur Berechnung des Wertes γ für die einzelnen Substanzen wurden in der Regel alle Versuchsgruppen N herangezogen. Nur in ganz wenigen Fällen wurde die Versuchsgruppe mit der höchsten, sowie niedrigsten Temperatur t hievon ausgeschlossen, weil λ ganz auffallend von dem allgemeinen Verlauf dieser Grösse abweicht. Obwohl es gegen die Regel ist, solche Werte auszuschliessen, so schien dies hier dennoch angezeigt, da die Abweichung aus einer Fehlerquelle des Apparats oder in dem jeweiligen Zustande des Versuchsobjektes ihre Erklärung findet. Die Berechnung des λ_1 aus Gl. E) setzt eine stetige Aenderung der Temperatur t voraus. Die Erfahrung lehrte nun, dass beim Siedepunkt die Temperatur im Dampfmantel kleinen Schwankungen während der Ablesung unterworfen sein kann. Dies kann bewirken, dass λ zu klein ausfällt. Wenn daher λ der Gruppe N I gleich oder kleiner als jenes der N II sich ergab, so ward es von der Rechnung ausgeschlossen. Was den anderen Fall der Ausschliessung anlangt, so darf nicht übersehen werden, dass die Versuchsgruppe, bei gewöhnlicher Temperatur in der Regel erst am Tage, der dem, an welchem die Erwärmung statt hatte, folgte, ausgeführt wurde. In einem Zeitraume von mindestens 12^h kann die Elastizität sich ganz erheblich ändern. Aus ähnlichen Erwägungen wurde das λ aus $N I^a$ niemals in die Berechnung von γ eingezogen.

§ 23. Aus Gl. R) folgt:

$$\lambda_0 = \lambda(1 + \gamma t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad T)$$

und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 + \gamma t},$$

worin λ_0 der Temperatur 0^0 des Drahtes entspricht. Um zu ersehen, mit welcher Genauigkeit sich der Zusammenhang zwischen t und E_s resp. t und λ durch die Gl. R) darstellen lässt, habe ich aus 3 passend gewählten Beobachtungszahlenpaaren λ und t einen Mittelwert von λ_0 gesucht und sodann für die beobachteten t das λ berechnet. Die be-

---

1) Hiebei hat mich Herr Telegraphen-Assistent *J. Koch* wesentlich unterstützt, wofür ich ihm hiemit danke.

rechneten und beobachteten Werte von λ in mm nebst ihren Differenzen Δ sind in den folgenden Uebersichten mit aufgenommen. Mit ganz wenigen Ausnahmen findet zwischen diesen Zahlen jene Uebereinstimmung statt, die man nach dem Grade der Genauigkeit der Messung erwarten muss, wenn der Zusammenhang von λ und t in Gl. R) seinen mathematischen Ausdruck finden soll. Es folgen nun die aus den Tabellen B (§ 19) entnommenen Uebersichten. λ', l' ϱ' δ' sind die auf die Belastung $\pi_2 = 1$ reduzierten Werte von λ, l, ϱ und δ der mit B bezeichneten Tabellen (§ 20).

§ 24.

1) **Silber** B. — Berechnet aus N I bis N VII.

$\gamma = -0{,}0007776.$

N	t	λ'	l'	ϱ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
Ia	5,8	136,50	3,08	5,93	130,60	—	—	—
I	97,1	146,90	7,66	14,96	131,94	0,6965	0,6969	— 0,0004
II	74,5	144,20	9,58	18,39	125,80	0,6836	0,6839	— 0,0003
III	60,9	142,60	4,62	8,88	133,70	0,6762	0,6763	— 0,0001
IV	45,7	141,40	3,19	4,22	137,20	0,6702	0,6680	+ 0,0022
V	33,8	139,50	4,16	7,97	131,50	0,6612	0,6617	— 0,0005
VI	22,1	138,40	2,72	5,21	133,20	0,6559	0,6555	+ 0,0004
VII	10,7	136,90	2,83	5,42	131,50	0,6488	0,6497	— 0,0009
VIII	7,4	137,50	1,73	3,31	134,20	—	—	—

2) **Platina** II. B. — Berechnet aus N II bis N VII.

$\gamma = -0{,}0003636.$

N	t	λ'	l'	ϱ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
Ia	6,3	50,84	0,52	1,13	49,71	—	—	—
I	97,0	51,93	0,84	1,85	50,08	—	—	—
II	71,5	52,16	0,61	1,35	50,81	0,4751	0,4756	— 0,0005
III	59,6	52,02	0,22	0,48	51,54	0,4738	0,4735	+ 0,0003
IV	42,9	51,61	0,55	1,13	50,48	0,4701	0,4706	— 0,0005
V	29,1	51,47	0,42	0,91	50,56	0,4688	0,4682	+ 0,0006
VI	17,6	51,08	0,59	1,29	49,78	0,4653	0,4662	— 0,0009
VII	5,5	50,95	0,01	0,02	50,93	0,4641	0,4642	— 0,0001

3) **Kupfer** II. B. — Berechnet aus N I bis N VIII.

$\gamma = -0{,}0009983.$

N	t	λ'	l'	ϱ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
Ia	10,7	77,20	2,45	5,38	71,82	—	—	—
I	96,9	85,00	6,28	13,76	71,24	0,7563	0,7561	+ 0,0002
II	75,4	82,80	6,27	13,70	69,10	0,7363	0,7385	— 0,0022
III	64,3	81,70	4,21	9,24	72,40	0,7271	0,7298	— 0,0027
IV	50,7	80,80	4,06	8,89	71,90	0,7190	0,7193	— 0,0003
V	40,9	79,90	3,63	7,96	71,94	0,7112	0,7120	— 0,0008
VI	30,5	79,25	2,53	5,53	73,72	0,7052	0,7043	+ 0,0009
VII	22,5	78,45	2,10	4,60	73,85	0,6981	0,6986	— 0,0005
VIII	11,3	77,60	1,72	3,76	73,84	0,6905	0,6907	— 0,0002

4) **Eisen** III. B. — Berechnet aus N II bis N VIII.

$\gamma = -0{,}0003760.$

N	t	λ'	l'	ϱ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
Ia	7,5	52,51	0,02	0,03	52,48	—	—	—
I	97,2	54,67	1,61	2,48	52,19	—	—	—
II	76,4	54,73	1,82	2,80	51,93	0,8221	0,8220	+ 0,0001
III	66,4	54,46	0,74	1,14	53,32	0,8180	0,8188	— 0,0008
IV	57,5	54,34	0,83	1,28	53,06	0,8162	0,8160	+ 0,0002
V	47,1	54,10	0,79	1,22	52,88	0,8126	0,8128	— 0,0002
VI	36,9	53,84	0,73	1,12	52,73	0,8087	0,8096	— 0,0009
VII	28,6	53,71	0,52	0,78	52,93	0,8067	0,8069	— 0,0002
VIII	19,3	53,54	0,26	0,40	53,14	0,8042	0,8042	± 0,0000
IX	6,9	52,60	0,55	0,85	51,75	—	—	—

5) **Messing** B. — Berechnet aus N I bis N IX.

$\gamma = -0{,}0004726.$

N	t	λ'	l'	ϱ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
Ia	8,6	93,96	0,57	0,96	93,00	—	—	—
I	96,9	98,14	1,53	2,61	95,53	0,7741	0,7746	— 0,0005
II	80,8	97,29	2,34	3,98	93,31	0,7674	0,7685	— 0,0011
III	66,8	96,89	—1,31	— 2,22	99,11	0,7642	0,7632	+ 0,0010
IV	53,5	95,99	0,96	1,63	94,36	0,7571	0,7583	— 0,0012
V	40,1	95,57	1,79	3,04	92,53	0,7538	0,7549	— 0,0011
VI	33,8	95,25	1,36	2,31	92,94	0,7513	0,7511	+ 0,0002
VII	24,9	95,09	1,31	2,22	92,87	0,7500	0,7480	+ 0,0020
VIII	16,7	94,22	2,08	3,54	90,68	0,7432	0,7450	— 0,0018
IX	8,3	93,96	0,76	1,31	92,65	0,7411	0,7428	— 0,0017

6) **Neusilber** B. — Berechnet aus N I bis N V.

$\gamma = -0{,}0006536.$

N	t	λ'	Γ'	ϱ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
Ia	7,0	71,55	1,18	0,99	70,56	—	—	—
I	56,3	74,51	1,92	1,58	72,93	0,2645	0,2640	+ 0,0005
II	45,4	73,61	0,82	0,68	72,93	0,2613	0,2620	— 0,0007
III	32,0	73,30	2,73	2,25	71,05	0,2602	0,2597	+ 0,0005
IV	18,7	72,36	3,80	3,15	69.21	0,2568	0,2574	— 0,0006
V	6,9	72,12	1,04	0,87	71,25	0,2560	0,2554	+ 0,0006

§ 25. Bei den Metallen Zink und Blei wurde, da die Linie B_λ es zweifelhaft erscheinen liess, ob Gl. R) anwendbar sei, γ ohne Benützung der Methode der kleinsten Quadrate auf nachfolgende Weise annähernd bestimmt, nachdem bei den übrigen Metallen erprobt worden war, dass γ auf beide Arten berechnet, in der ersten Stelle nicht abweicht. Eine höhere Genauigkeit kann aber von den Versuchsergebnissen bei diesen Metallen überhaupt nicht erwartet werden.

1) **Zink** B. — Berechnet aus N II und N VI ergab sich:

$$\gamma = -\frac{129{,}0 - 105{,}3}{105{,}3\,(71{,}6 - 4{,}3)} = -0{,}0033.$$

N	t	λ'	Γ'	ϱ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
Ia	5,5	97,0	37,4	376,6	— 279,6	—	—	—
I	97,2	120,6	56,9	574,2	— 453,6	0,1320	0,1527	— 0,0207
II	71,6	117,9	25,1	253,3	— 135,4	0,1290	0,1358	— 0,0068
III	40,2	105,9	67,3	677,5	— 571,6	0,1159	0,1281	— 0,0122
IV	20,1	100,3	63,1	636,9	— 536,6	0,1097	0,1111	— 0,0014
V	8,8	98,7	37,4	376,7	— 278,0	0,1080	0,1068	+ 0,0012
VI	4,3	96,2	20,2	203,2	— 107,0	0,1053	0,1052	+ 0,0001

2) **Blei** B. — Berechnet aus N III und N V.

$$\gamma = -\frac{86{,}6 - 76{,}7}{76{,}7\,(26{,}9 + 0{,}6)} = -0{,}0047.$$

N	t	λ'	Γ'	ϱ'	δ'	λ beob.	λ berech.	Δ
I	74,1	523,8	104,4	207,1	316,7	0,0923	0,1053	— 0,0130
II	52,8	512,5	6,8	13,6	498,8	0,0903	0,0934	— 0,0031
III	26,9	491,5	32,9	65,3	426,2	0,0866	0,0785	+ 0,0081
IV	12,5	464,8	19,9	39,7	425,1	0,0819	0,0729	+ 0,0090
V	— 0,6	435,3	17,0	33,5	401,8	0,0767	0,0684	+ 0,0083

§ 26. Während also der S. E-M (E_s) der in § 24 behandelten Substanzen sich mit der wünschenswerten Genauigkeit durch die Gl. R) darstellen lässt, weisen auch die Uebersichten des § 25 für die dort behandelten Substanzen trotz der nur angenäherten Berechnung von γ noch annehmbare Resultate auf. Der nur einmalige Zeichenwechsel von Δ dürfte seinen Grund zunächst in der nur näherungsweisen Berechnung von γ haben. Die organischen Substanzen folgen, wie die graphischen Darstellungen und Tabellen zeigen, der Gl. R) nicht.

§ 27. Es war noch zu prüfen, ob die Werte l Streckungen enthalten. Zu dem Behufe wurde aus Gl. Q) nach den Tabellen A und B der Wert für x berechnet. Es folgt hierüber eine Uebersicht, worin N die Versuchsgruppe und der Index die Beobachtungreihe ν, innerhalb deren die Kontrolle geübt wurde, bezeichnen. Ferner bedeutet $d_l \Sigma l$ die innerhalb der beigesetzten N entstandene und x die verschwundene Grösse der elastischen Nachwirkung. Es ist endlich Δ_1 die Differenz dieser Werte, d. h. der noch bestehende Nachwirkungsrückstand, nachdem der Draht über Nacht — ausgenommen die mit * bezeichneten Fälle — nur unter der Belastung π_1 gestanden war. Bezüglich der mit * bezeichneten Δ_1 gibt Rubrik „Dat“ der Tabellen näheren Aufschluss.

Substanz	A				B			
	N	$d_1 \Sigma l$	x	Δ_1	N	$d_1 \Sigma l$	x	Δ_1
Silber . . .	$I_1^a - VII_1$	17,0	5,4	+ 11,6*	$I_1^a - VIII_1$	15,6	12,1	+ 3,5
Platina . .	$I_1^a - VII_1$	2,5	4,4	— 1,9*	$I_1^a - VII_1$	2,9	4,1	— 1,2
Kupfer . .	$I_1^a - VIII_1$	24,1	26,0	— 1,9	$I_1^a - VIII_1$	24,3	18,7	+ 5,6
Eisen . . .	$I_1^a - VIII_1$	8,4	10,0	— 1,6	$I_1^a - IX_1$	9,5	8,9	+ 0,6
Messing . .	$I_1^a - VIII_1$	3,3	8,0	— 4,7	$I_1^a - IX_1$	7,3	7,2	+ 0,1
Neusilber .	$I_1^a - V_1$	3,3	5,6	— 2,3*	$I_1^a - V_1$	4,1	4,5	— 0,4
Zink . . .	$I_1 - VI_1$	33,2	4,5	+ 28,7	$I_1^a - IX_1$	30,2	14,2	+ 16,0
Blei . . .	—	—	—	—	—	—	—	—

Die positiven Δ_1 geben den noch bestehenden Nachwirkungsrückstand beim Beginn der Versuchsgruppe, welche den in der Uebersicht bezeichneten zunächst folgt, an. Der negative Wert von Δ_1 ist wohl so zu deuten, dass auch Nachwirkungsrückstand, der schon vor Beginn der Versuchsgruppen entstanden war, verschwunden ist. Aus den positiven Werten von Δ_1 kann noch nicht gefolgert werden, dass $d_l \Sigma l$ Streckungen enthalte,

da die Zeit zu kurz gewesen sein konnte, um $\Delta_1 = 0$ werden zu lassen. Der Wert $\Delta_1 : d_1 \Sigma 1$ deutet darauf hin, dass der grösste Teil des Rückstandes in verhältnismässig kurzer Zeit verschwunden ist, somit Streckungen selbst beim Auftreten von $+\Delta_1$ nicht wahrscheinlich sind. Nur das Δ_1 bei Zink ist in dieser Hinsicht geeignet, Verdacht zu erregen. Hier waren vermutlich π_1 und π_2 vielleicht auch beide für höhere Temperaturen zu gross gewählt. Daraus mag sich auch der sonst kaum verständliche negative Wert von δ bei diesem Metall erklären. In A herrschen die $-\Delta_1$ gegen mein Erwarten vor. Dies liess sich jedoch hinterher durch den Umstand erklären, dass vor den Versuchen A mit den Drahtindividuen bei gewöhnlicher Temperatur tagsvorher Dehnungsversuche (§ 17) angestellt worden waren. Die Wärme fördert, wie das Entstehen, so auch das Verschwinden des Nachwirkungsrückstandes, d. h. die Drehung der Moleküle. Also kann bei der tagsdarauf folgenden Erwärmung zu den Versuchen A nicht nur die während dieser entstandene, sondern auch der schon vor denselben vorhanden gewesene Nachwirkungsrückstand wenigstens zum Teil verschwunden sein. Vor der Erwärmung zu den Versuchen B dagegen, haben, wie bekannt, 3 Erwärmungen und Erkaltungen stattgefunden, der Draht ruhte somit unter günstigen Umständen lange genug, um in die Versuche B mit wenig oder ohne Nachwirkungsrückstand einzutreten.

§ 28. In der folgenden Uebersicht sind die Werte γ des thermischen Koëffizienten, wie sie sich aus den Tabellen A und B ergeben, zusammengestellt. Aus den Tabellen A sind sie jedoch nicht nach der Methode der kleinsten Quadrate, sondern nach den in § 25 angewendeten Verfahren bestimmt, somit nur als angenähert zu betrachten.

Substanz	γ aus Tab. A	γ aus Tab. B	Δ_2
Silber	— 0,00085	— 0,0007776	+ 0,00007
Platina	— 0,00018	— 0,0003636	— 0,00018
Kupfer	— 0,00120	— 0,0009983	+ 0,00020
Eisen	— 0,00050	— 0,0003760	+ 0.00012
Messing	— 0,00062	— 0,0004726	+ 0,00015
Neusilber	— 0,00054	— 0,0006536	— 0,00011
Zink	— 0,0040	— 0,0033	+ 0,0007
Blei	— 0,0036	— 0,0047	— 0,0011

Diese Werte weichen im allgemeinen gerade nicht sehr erheblich, aber in verschiedenem Sinne von einander ab. Es spricht sich nicht entschieden aus, ob eine spätere Erwärmung und Erkaltung einen grösseren oder geringeren Einfluss auf die Aenderung des S. E-M. übt als die erste. Insbesonders aber muss hier erwähnt werden, dass die Wahrnehmung von *Pisati* [1]): erst nach mehreren Erwärmungen und Erkaltungen nehme der Elastizitätsmodul bei einer Temperaturänderung einen stetigen Verlauf, wenigstens für den S. E — M. nicht gilt.

XI. Allgemeine Betrachtungen.

§ 29. Wir haben gesehen, dass sich der sekundäre E-M der Metalle und Legierungen proportional der Temperaturzunahme vermindert, wenn die Temperaturänderung stetig verläuft. Das Fischbein zeigt, wie die graphischen Darstellungen nachweisen, mit Zunahme der Temperatur ebenfalls eine stetige Abnahme des E_s, jedoch ist diese stärker als die Temperaturänderung und verläuft vollkommen regelmässig. Hinsichtlich der Kautschuks lehrt die graphische Darstellung, dass sein sekundärer E-M wie der gewöhnliche longitudinale [2]) mit der Temperaturzunahme nicht ab- sondern zunimmt.

§ 30. Im Gegensatz dazu tritt eine Regelmässigkeit im Verlaufe des primären Elastizitätsmoduls E_p so wenig hervor, dass an eine mathematische Darstellung desselben vorerst nicht gedacht werden kann. Wie indes eine genauere Betrachtung der Linien B_δ zeigt, haben die P. E-M (E_p) aller Metalle und Legierungen doch einen gemeinschaftlichen Charakter: sie alle zeigen bei ungefähr 80^0 C ein absolutes Maximum oder doch ein relatives von E_p an, dem dann gegen 0^0 hin andere Maxima folgen. E_p bei 100^0 und bei circa 0^0 sind bei den nicht leicht schmelzbaren Metallen nur wenig verschieden. E_p scheint somit bei diesen Stoffen durch die Erwärmung des Drahtes auf den Siedepunkt eine nicht sehr erhebliche Veränderung zu erfahren. Nachdem aber bei 100^0 Dehnungen (λ) stattgefunden hatten, treten bei sinkender Temperatur in den nun

1) *Pisati*, Beiblätter, Bd. I. 1877. Seite 305.
2) *G. Schmulewitsch*, Poggendorff's Annalen Bd. 144. 1871. Seite 280.

folgenden Versuchsgruppen erhebliche Aenderungen von E_p auf. Der Wert von E_p schwankt dann um jenen (von E_p), welcher vor der Erwärmung statt hatte, herum, indes E_s stetig steigt. Ein Blick auf die Kurven B_δ zeigt ferner, dass die Elastizität (E_s) während der Dehnung bei 100° erniedriget wird, dann bei nur konstanter Belastung π_1 bis zur nächsten Versuchsgruppe steigt (E_p), um während dieser wieder zu sinken, aber nicht mehr auf den früheren Stand, so dass E_s stetig steigen muss.

§ 30. Man wird wohl annehmen dürfen, es messe E_s die gesamte innere Reaktion der elastischen Kräfte, welche durch eine Verschiebung der Moleküle erregt worden ist. Dieser S. E-M scheint aber während einer stetigen Temperaturänderung zunächst von dieser abhängig zu sein. Bei konstanter Temperatur sind bei in nicht zu grossen Zeitintervallen aufeinanderfolgenden Versuchsgruppen, es mögen die Werte von δ noch so verschieden sein, jene von λ als einander gleich zu betrachten. Ich habe dies in einer früheren Untersuchung (1885. Heft 1) für gewöhnliche Temperaturen oft wahrgenommen. (Siehe auch § 2.) Aber auch bei 100° habe ich mit Zink und Blei je zwei Versuchsgruppen ausgeführt, zwischen denen der Draht etwa 5 Minuten ruhte, d. h. nur mit π_1 belastet war. Zink ergab in der einen Versuchsgruppe $\lambda = 18{,}2$, in der andern $\lambda = 17{,}7$, Blei sogar jedesmal $\lambda = 14{,}5$ Sktl., indes ϱ Werte zeigte, deren einer das Mehrfache des anderen bei demselben Metalle war.

§ 31. Anders gestalten sich die Verhältnisse für den P. E-M (E_p). Dieser hängt augenscheinlich nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der Zeit ab, die seit der vorhergehenden Dehnung verstrichen ist. Dies lehren ebenfalls meine früheren Versuche (1885. Heft 1) bei gewöhnlichen Temperaturen. Auch die Grösse der vorhergegangenen Dehnung dürfte bei dem Vorgange eine Rolle spielen. Der Temperatur muss jedoch der vorwiegende Einfluss zugeschrieben werden.

§ 32. Wenn man die Verlängerung l, als die allein beobachtbare Differenz der elastischen Nachwirkungen, von welchen jede Verlängerung sowohl, als Verkürzung des Drahtes begleitet ist, betrachtet, so wird man kaum irren. Ich habe deshalb schon in der Abhandlung (1885. Heft 1) l mit dem Namen „Nachwirkungsrückstand“ belegt. Nach der *Weber-Kohlrausch*'-

schen Hypothese soll aber die Nachwirkung oder vielmehr die sie bedingende Aenderung der inneren Reaktion der Molekularkräfte eine Folge der Drehung der Moleküle sein, von welcher deren Verschiebung begleitet ist.

Noch ist die Bekanntschaft mit dem Einflusse von Temperatur, Zeit und Verschiebung auf die Drehung der Moleküle zu gering, um den Verlauf des E_p resp. der Kurven B_δ befriedigend erklären zu können. Allein im Widerspruche mit der *Weber-Kohlrausch'*schen Hypothese steht ihr allgemeiner Charakter nicht.

Nach dem Abkühlungsgesetz nämlich ist im allgemeinen die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Versuchsgruppen N bei höheren Temperaturen kleiner als bei niedrigen, indes die Verschiebungsbeträge mit der Temperatur abnehmen. In den aufeinanderfolgenden Versuchsgruppen während der stetigen Abkühlung wirken sonach Temperatur und Verschiebung in gleichem Sinne auf die Drehung der Moleküle, indem die Grösse ihrer Wirkung immer kleiner wird, dagegen die Zeit wegen der Zunahme ihres Intervalls einen entgegengesetzten Einfluss auf diese Drehung nimmt, indem sie deren Wirkung vergrössert. Dadurch würde das rasche Steigen des E_p zwischen der Gruppe N I und N II, wobei die Zeit kurz, Temperatur und Verschiebung beträchtlich sind, erklärlich Bei den mittleren Temperaturen halten sich diese widerstrebenden Einflüsse ziemlich die Wage, und schliesslich beherrscht bei niederen Temperaturen die Zeit den elastischen Zustand des Drahtes vor jeder Versuchsgruppe.

§ 33. Das hier für den Verlauf von E_p und besonders E_s Aufgestellte darf vorerst nur unter der Voraussetzung als giltig erachtet werden, dass die Versuche angestellt werden, während die Temperatur sich stetig ändert. Untersucht man ein Drahtindividuum bei derselben Temperatur an verschiedenen Tagen unter sonst gleichen Umständen, so findet man häufig wesentlich verschiedene Werte für E_p.

Aus diesem Grunde kann ich auch den Schluss, als habe der E_s des Eisens zwischen 10^0 und 20^0 C ein Maximum, nicht mehr aufrecht erhalten. (1882. Heft 4.) Vermutlich ist auch manche Abweichung der Versuchsresultate verschiedener Experimentatoren über Elastizität mehr

solchen Umständen, als einer elastischen Verschiedenheit des untersuchten Materials zuzuschreiben.

Die Elastizität ist selbst bei konstanter Temperatur, wenn das Gleichgewicht der Molekülarkräfte durch Verschiebung einmal gestört worden ist, für lange Zeit beständigen Veränderungen unterworfen. Die Unbeständigkeit, welche in dieser Hinsicht Herr Prof. *Kohlrausch* im Kautschuk beobachtet hat, findet sich nicht nur bei Fischbein in hohem Masse wieder, sondern ist bei Blei und Zink und, wenn auch in verschiedenem Grade, bei den schwerer schmelzbaren Metallen von mir beobachtet worden.

XII. Die thermische Konstante, der Schmelzpunkt und der thermische Ausdehnungskoëffizient.

§ 34. Ordnet man die untersuchten Metalle nach der Höhe ihrer Schmelztemperatur ψ und vergleicht mit dieser Reihenfolge jene der Werte der thermischen Konstanten γ des S. E-M der einfachen Metalle, so zeigt sich, dass beide Reihen im allgemeinen die umgekehrte Ordnung befolgen. Nur Silber und Kupfer, die in beiden Reihen unmittelbar aufeinanderfolgen, hätten zur Herstellung der vollkommenen Uebereinstimmung in der einen ihre Stellungen zu vertauschen. Beachtet man indes, dass die Schmelzpunkte gerade dieser beiden Metalle verhältnismässig nahe beisammen liegen und verschieden hoch angegeben werden, so dürfte dieser Abweichung ein zu grosses Gewicht nicht beizulegen sein.

Dagegen befolgen die thermischen Ausdehnungskoëffizienten α die gleiche Ordnung, wenn man sie ihrer Grösse nach reiht, wie die thermischen Konstanten γ des sekundären E-M der untersuchten einfachen Metalle; jedoch ist dabei dieselbe Einschränkung bezüglich des Silbers und Kupfers wie vorhin nötig. Dies bestätiget die Aufstellung von *Th. Carnelly* [1]): Ueber die Beziehung zwischen den Schmelzpunkten der Elemente und ihren Ausdehnungskoëffizienten durch Wärme. Auch die Aenderung (ϱ) der Elastizität während der Dehnung bei konstanter Temperatur ist im allgemeinen bei den leichter schmelzbaren Metallen grösser als bei den schwerer schmelzbaren.

1) Beiblätter, 1879. Bd. III. Seite 692.

Substanz	ψ	γ	α
Platina	1700	0,0003636	0,00000899
Eisen	1600	0,0003760	0,00001210
Kupfer	1090	0,0009983	0,00001690
Silber	1000	0,0007776	0,00001921
Zink	423	0,0033	0,00002918
Blei	325	0,0047	0,00002924

Diese Uebersicht lässt wohl einen tieferen Zusammenhang [1]) zwischen der Schmelztemperatur und der thermischen Konstanten des S. E-M vermuten.

XIII. Der longitudinale Elastizitätsmodul nach *Wertheim.*

§ 35. Die umfassensten Versuche über den gewöhnlichen longitudinalen Elastizitätsmodul liegen wohl von *Wertheim* — § 3 — vor. In der fraglichen Abhandlung sind auf Seite 104 die Koëffizienten a der Veränderung des E-M für 1^0 C Temperaturänderung zwischen 0 und 100^0 angegeben. Zwar ist ein Vergleich der *Wertheim*'schen Koëffizienten a mit unserem γ, obwohl die Versuche sich auch auf die Dehnungselastizität beziehen, nicht thunlich, weil sich erstere auf den gewöhnlichen E-M und zwar von angelassenen und nicht wie γ auf den S. E-M von ausgezogenen Drähten beziehen. Dann ferner liegen den Bestimmungen von *Wertheim* grosse Temperaturintervalle zu grunde. Indes dürfte doch die folgende Zusammenstellung der Werte γ und a für die Klarlegung des Unter-

1) Hier mag es gestattet sein, auf folgendes aufmerksam zu machen: Herr *F. Kohlrausch* und *E. Loomis* — Poggendorff's Annalen Bd. 141 — haben die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E von der Temperatur τ für Eisen, Kupfer und Messing zwischen den Temperaturen 0^0 und 90^0 C untersucht und dieselbe durch die Relation: $E = E_0(1 - a\tau - b\tau^2)$, in welcher E_0 sich auf $\tau = 0$ bezieht, ferner a und b Konstante bedeuten, dargestellt. Die Autoren selbst sind der Meinung, dass sich eine genäherte Giltigkeit der Formel erheblich über die Versuchsgrenzen hinaus unbedenklich annehmen lässt.

Ich war versucht, die Frage zu stellen: Welcher Wert von τ liefert $E = 0$? Denn im Falle der Giltigkeit der Formel bis zum Uebergang des Metalls in den flüssigen Aggregatszustand könnte man hiebei auf den Schmelzpunkt geführt werden. Benützt man die in der oben erwähnten Abhandlung angegebenen Werte der Konstanten a und b, so ergibt die Gl.: $E = 0$ für Eisen $\tau = 1507^0$ C; Kupfer $\tau = 1127^0$ C; Messing 697^0 C.

schiedes zwischen dem gewöhnlichen E-M aus dem S. E-M manches Interessante enthalten.

Substanz	γ	a
Platina	— 0,0003636	— 0,001079
Eisen	— 0,0003760	+ 0,000825
Messing	— 0,0004726	— 0,000823
Neusilber	— 0,0006536	—
Silber	— 0,0007776	$\pm$ 0,000000
Kupfer	— 0,0009983	— 0,000823
Zink	— 0,0033	—
Blei	— 0,0047	—

Nicht einmal durchwegs von derselben Ordnung sind die beiderseitigen Werte, von den übrigen Abweichungen ganz zu schweigen. Diese Differenzen werden nicht allein auf die Verschiedenheiten des untersuchten Materials, oder auf den Umstand zurückzuführen sein, dass *Wertheims* Messungen mit dem Kathetometer nicht den Grad der Feinheit haben, den ich durch Anwendung einer Spiegelskala erreichte, sondern sie sind zweifellos zum grössten Teil in der Nichtberücksichtigung der elastischen Nachwirkung (E-N) bei den *Wertheim*'schen Versuchen begründet, denn gerade diese zeigt sich bei meinen Messungen in den höheren Temperaturen als ausschlaggebend. *Wertheim* hat, wie er auf Seite 19 seiner Abhandlung bemerkt, nach 5 bis 10 Minuten, wenn er das Gleichgewicht eingetreten glaubte, die Längenveränderung abgelesen. Aber innerhalb 5 Minuten kann die E-N besonders bei höheren Temperaturen erhebliche Längendifferenzen erzeugen. Ob nicht, was sehr wahrscheinlich ist, in den vermeintlich bleibenden Verlängerungen auch E-N enthalten ist, scheint *Wertheim* nicht geprüft zu haben. Es darf dieser Umstand wohl als ein Zeichen dafür gelten, wie wenig Bedeutung man der damals schon über ein Dezennium entdeckten E-N noch beilegte. *Wertheim* bestimmte seine E-M nicht aus den Verlängerungen, sondern den Verkürzungen bei Wegnahme der Belastung. Ich halte dies wenigstens insolange nicht für ganz richtig, als man nicht sicher ist, dass E-N nicht im Spiele ist.[1]) Diese hält aber zu lange nach, um nach 5 bis 10′ schon eine Entscheidung

1) A. Miller, Wiedemanns Annalen Bd. 25. 1885. S. 450.

treffen zu können. Eine geringere Zusammenziehung des Drahtes würde einen grösseren E-M ergeben, indes sie doch eine Verminderung der Elastizität anzeigt, sobald E-N vorhanden ist. Und dies ist immer der Fall.

XIV. Vergleich mit den Ergebnissen anderer verwandter Untersuchungen.

§ 36. Ausser den *Wertheim*'schen sind mir noch die Arbeiten von Herrn Prof. *F. Kohlrausch* und *E. Loomis,* sowie jene von *Pisati* über den Einfluss der Wärme auf die Elastizität bekannt. (§ 1). Die erste Arbeit bezieht sich ausschliesslich auf die Torsion, die zweite wie mir scheint, nur zum grösseren Teil. In dieser wurden mit Eisen und Stahl Dehnungsversuche angestellt. Ein Unterschied zwischen primärem und sekundärem Elastizitätsmodul, wie ich ihn einführte, wurde nicht gemacht und der elastischen Nachwirkung keine Berücksichtigung zu teil. Trotz der sonach geringen Vergleichsfähigkeit scheint mir eine Gegenüberstellung der Resultate Interesse genug zu bieten, um hier vorgenommen zu werden.

In der folgenden Uebersicht ist die Aenderung, welche die Elastizität einer Substanz bei der Erwärmung von 0^0 auf 100^0 C erleidet, in Prozenten angegeben. Und zwar ist ΔE_s die Aenderung des sekundären E-M nach Gl. R) — Platina ausgenommen — berechnet. ΔE wurde aus der ersten Dehnung ($\nu = 1$) der Versuchsgruppen (N) bei der niedrigsten und höchsten Temperatur unter Vornahme der nötigen Korrektur abgeleitet. ΔE bedeutet somit die Aenderung des gewöhnlichen, longitudinalen E-M, wobei man sich zu erinnern hat, dass der infolge der E-N allmähliche Eintritt des Gleichgewichts nicht abgewartet, vielmehr sogleich abgelesen wurde. Die weiteren Rubriken geben die Aenderungen des E-M an, wie sie Professor *Kohlrausch* und *Pisati* gefunden haben.

Man sieht aus dieser Uebersicht, dass in Uebereinsimmung mit den Ergebnissen der Forschungen der eben genannten Autoren, wonach der gewöhnliche E-M mit steigender Temperatur stetig fällt, dies auch für den S. E-M (E_s) der Fall ist. Nur bei Kautschuk tritt das Umgekehrte ein, was aber auch für den gewöhnlichen E-M schon konstatiert worden ist.

Substanz	ΔE_s, (%)	ΔE (%)	*Kohlrausch* %	*Pisati* %	Bemerkung
Platina	— 1,97*	— 2,4*	—	—	*5° — 100° C
Eisen	— 3,76	— 5,4	— 5,0	— 1,1**	**20° — 100° C
Messing . . .	— 4,73	— 5,8	— 6,2	—	
Neusilber . . .	— 6,54	—	—	—	
Silber	— 7,78	— 9,4	—	—	
Kupfer	— 9,98	— 13,4	— 6,0	—	
Zink	— 33,0	— 39,0	—	—	
Blei	— 47,0	—	—	—	
Fischbein . . .	— 80,7	— 80,9	—	—	
Kautschuk . . .	+ 114***	+ 134***	—	—	***10° — 30° C

Die Grösse der Aenderung des E-M jedoch, welche Herr *Kohlrausch* gefunden hat, steht mit jener des E_s nicht im Einklang. Es gilt dies nicht nur für die Höhe des Prozentsatzes, sondern auch für das gegenseitige Verhältnis derselben bei den einzelnen Substanzen. Die Aenderung ΔE stimmt mit den *Kohlrausch*'schen Werten bei Eisen und Messing ziemlich überein, hinwiederum bei Kupfer eine ganz bedeutende Abweichung besteht. Während Prof. *Kohlrausch* und *Loomis* finden, dass die mittlere Aenderung des E-M mit der Temperatur bei den von ihnen untersuchten Stoffen: Eisen, Kupfer, Messing nur wenig verschieden ist, stellt sich bei meinen Versuchen in Bezug auf E_s ein unverkennbarer Unterschied heraus. So ist ΔE_s für Kupfer $2\,^2/_3$ mal so gross als für Eisen und 2 mal so gross als für Messing. Weil sich die Begriffe des gewöhnlichen und sekundären Elastizitätsmoduls nicht decken, so dürfen die konstatierten Abweichungen auch nicht befremden. Es lässt sich deshalb trotz der Abweichungen nicht einmal ein Schluss ziehen, ob die Torsionselastizität [1]) durch die Wärme eine andere Aenderung als die der Dehnung erfahre. Die Werte ΔE sind ausnahmslos grösser als ΔE_s, welche Thatsache im nächsten § ihre Erklärung finden wird.

§ 37. Ich will hier nicht unterlassen, nochmal darauf hinzuweisen, dass der E-M, wie er sich nach den sonst üblichen Verfahren durch Dehnung ergibt, wohl nur als eine Annäherung an den wirklichen, seiner Definition entsprechenden Wert, ist. Denn die Verlängerung, welche man

1) *Kohlrausch* und *Loomis*, Poggendorffs Annalen Bd. 141. 1870. S. 499.

bei dem üblichen Verfahren misst, enthält nicht nur die Dehnung λ, die von der Belastungsmehrung (π_2) herrührt, sondern auch die Dehnungsmehrung, welche die ständige Belastung (π_1) dadurch hervorbringt, dass sich während der Verschiebungen die Elastizität des Drahtes vermindert. Diese Aenderung der Elastizität soll nach der *Weber-Kohlrausch*'schen Hypothese durch eine allmähliche Drehung der Moleküle erzeugt werden, von welcher ihre plötzliche Verschiebung begleitet wird; und sie hinwiederum veranlasst die E-N, die allein der direkten Beobachtung zugängig ist. Ich kann deshalb E_s allein als jene Grösse betrachten, welche die innere elastische Reaktion der Molekularkräfte nach der Dehnung misst, indes E_p das Mass derselben vor der Dehnung darstellt. (Weiteres hievon 1885. Heft 1. X.). Daraus erklärt sich auch die Beziehung $\Delta E > \Delta E_s$ in der Uebersicht des § 36, da bekanntlich die E-N mit steigender Temperatur rasch wächst. Daher mag es auch kommen, dass Herr Professor *Kohlrausch* bei höheren Temperaturen eine vermehrte Abnahme der Elastizität findet, die sich bei meinen Versuchen für E_s nicht zeigt.

XV. Der Zahlenwert des sekundären Elastizitätsmoduls.

§ 38. Ich lasse nun eine Zusammenstellung folgen, welche die sekundären Elastizitätsmodul E_s von 10^0 zu 10^0 C für die von mir untersuchten Metalle und Legierungen enthält. Diese Modul sind nach Gl. R) unter Zugrundlegung des in den Uebersichten angeführten thermischen Koëffizienten γ des sekundären E-M berechnet. Die eingeklammerten Zahlen liegen ausserhalb der Versuchsgrenzen.

Temperatur	Platina	Eisen	Neusilber	Kupfer	Messing	Zink	Silber	Blei
0° C	19668	18813	13945	13035	10670	10551	7359	2553
10	19597	18742	13854	12905	10620	10203	7302	2433
20	19525	18672	13763	12775	10569	9855	7245	2313
30	19453	18601	13672	12645	10519	9506	7187	2193
40	19382	18530	13580	12515	10468	9158	7130	2073
50	19310	18459	13489	12384	10418	8810	7073	1953
60	19239	18389	13398	12254	10367	8462	7016	1833
70	19167	18318	13307	12124	10317	8114	6959	1713
80	19096	18247	13216	11994	10267	7765	6901	1593
90	19024	18176	(13125)	11864	10216	7417	6844	(1473)
100	18953	18106	(13034)	11734	10166	7069	6787	(1353)

Die Werte von E_s in dieser Zusammenstellung sind fast durchgehends grösser als die, welche *Wertheim* aus Dehnungen berechnet hat. Nur der Modul des Eisens und Silbers kommt den *Wertheim*'schen fast gleich. Indes ist es bezeichnend, dass auch *Wertheim* aus den Längs- und Querschwingungen — Eisen ausgenommen — höhere Modul als durch seine Dehnungsversuche gefunden hat. Es dürfte nicht allzu gewagt sein, das Sichannähern der von *Wertheim* aus den Schwingungen gefundenen Werte des E-M an die von mir festgestellten Werte von E_s vornehmlich dem Umstande zuzuschreiben, dass bei der Schwingungsmethode die elastische Nachwirkung, wenn überhaupt, wenigstens nicht in dem hohen Masse Einfluss auf die Messung übt, wie er sich in den Dehnungsversuchen bei dem *Wertheim*'schen Verfahren geltend macht.

§ 39. Die bei den Versuchen B und A am Fischbein, sowie bei den Versuchen A am Kautschuk gefundenen Werte von λ sind durch Auftragen der Skalenteile ($1 = 2^{mm}$) graphisch dargestellt. Für Fischbein B sind auch die Werte δ aufgetragen. Auch diese Kurve B_δ stimmt mit den entsprechenden Linien, welche sich für die Metalle ergeben haben, in ihrem Grundcharakter überein. Die A_λ-Kurve für Kautschuk verläuft nicht ganz regelmässig; vielleicht wäre eine B_λ-Kurve für diesen Körper so regelmässig geworden, wie die B_λ-Kurve für Fischbein es ist. (Siehe Tabellen und Tafeln.) Es wurden aus der A_λ- bezw. B_λ-Kurve für Kautschuk und Fischbein die Werte von λ von 10^0 zu 10^0 abgenommen und hieraus die E_s berechnet. Die folgende Uebersicht enthält die Werte von E_s in kg.

Substanz	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
Fischbein . .	157	154	142	130	116	102	89	75	62	51	41
Kautschuk . .	—	0,372	0,523	0,793	—	—	—	—	—	—	—

Obwohl diese Zahlen auf grosse Genauigkeit keinen Anspruch erheben können, so ersieht man aus ihnen dennoch, dass, wie bei den Metallen und Legierungen, auch beim Fischbein der sekundäre Elastizitätsmodul mit zunehmender Temperatur abnimmt; und zwar wächst diese Abnahme mit letzterer. Der sekundäre Elastizitätsmodul des Kautschuks dagegen nimmt mit steigender Temperatur sehr rasch zu.

Schluss.

§ 40. 1) Bezeichnet man mit E_p den primären Elastizitätsmodul eines gespannten Drahtes d. h. denjenigen, welchen der Draht vor seiner Dehnung besitzt, und mit E_s den sekundären d. h. den Elastizitätsmodul, welchen er nach seiner bis zum Eintritt eines vollkommen elastischen Zustandes ununterbrochen fortgesetzten Dehnung und Verkürzung besitzt, sowie mit γ die thermische Konstante des Moduls E_s d. h. jene Zahl, welche die Veränderung des letzteren für 1^0 C der Temperaturveränderung angibt, so ist, wenn mit t die Temperatur des Drahtes und E_0 der Wert von E_s bei 0^0 bezeichnet wird, für die hier untersuchten Metalle:

$$E_s = E_0(1 + \gamma t)$$

vorausgesetzt, dass die Temperatur sich stetig ändert.

Die Aenderung des sekundären Elastizitätsmoduls ist somit der Temperatur proportional.

2) Dabei ist für:

Platina	$\gamma = -0{,}0003636$
Eisen	$\gamma = -0{,}0003760$
Silber	$\gamma = -0{,}0007776$
Kupfer	$\gamma = -0{,}0009983$
Zink	$\gamma = -0{,}0033$
Blei	$\gamma = -0{,}0047$
Messing	$\gamma = -0{,}0004726$
Neusilber	$\gamma = -0{,}0006536.$

3) Bei der in § 6 dargelegten Bedeutung von λ und ϱ ist für eine bestimmte Temperatur t

$$E_p = E_s \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{\lambda}},$$

wobei E_p nicht blos, wie E_s, von der Temperatur t, sondern auch von der elastischen Nachwirkung abhängt, mit welcher behaftet der Draht in den Versuch eintritt.

E_p ist also eine unbekannte Funktion auch der Zeit.

4) Bei Fischbein ändert sich der E_s rascher als die Temperatur, doch in dem gleichen Sinne wie bei den Metallen und Legierungen, die hier untersucht worden sind. Das Entgegengesetzte findet bezüglich E_s bei Kautschuk statt.

5) Bei den untersuchten Metallen und Legierungen macht sich beim ersten Erwärmen und Erkalten ein auffallend unregelmässiger Verlauf von E_s, wie ihn *Pisati* bei seinen Versuchen beobachtet hat, nicht bemerkbar. Dieser Verlauf unterscheidet sich nicht wesentlich von jenem bei der fünften Abkühlung.

6) Die thermische Konstante γ des sekundären Elastizitätsmoduls E_s ist bei den untersuchten Metallen und Legierungen sehr an Wert verschieden. Ordnet man die einfachen Metalle nach dem Werte von γ, so ergibt sich die umgekehrte Reihenfolge, als bei einer entsprechenden Anordnung nach der Höhe ihrer Schmelztemperaturen. Der Schmelzpunkt liegt also um so höher, je kleiner die thermische Konstante γ des sekundären Elastizitätsmoduls ist. Eine Störung dieser Reihenfolge ist nur insoferne vorhanden, als zur vollkommenen Uebereinstimmung die in der Reihe unmittelbar aufeinanderfolgenden Metalle Silber und Kupfer ihre Stellen einfach zu vertauschen hätten.

7) Mit derselben Einschränkung wie in Ziff. 6) gilt auch der Satz: In Bezug auf die Grösse der thermischen Konstanten γ des sekundären Elastizitätsmoduls befolgen die untersuchten Metalle dieselbe Ordnung, wie in Bezug auf den Wert des linearen thermischen Ausdehnungskoëffizienten.

8) Der sekundäre Elastizitätsmodul E_s ist im allgemeinen grösser als der von *Wertheim* durch Dehnung gefundene, gewöhnliche longitudinale; sein Wert liegt indes dem von *Wertheim* durch Schwingungen ermittelten Elastizitätsmodul näher.

Tabellen A.

Tabelle I.

Untersuchte Substanz: **Platina** II, A.

$\pi_1 = 8{,}3092$ kg. $\varkappa = 0{,}933$. $d_1 = 1{,}093$ m.

$\pi_2 = 7{,}7533$ kg. $\alpha_{55} = 0{,}000009243$.

q $= 0{,}3610$ qmm. d $= 0{,}678$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	Dat.
I[a]			12,7	47,0	13,0		
				47,0	13,1		
	1,2			47,0	13,2		
				47,0	13,2		
		8,7		47,0	13,2	390,0	9/2 84
I			88,5	123,1	89,1		
				123,3	89,3		
	1,9			123,8	89,8		
				123,8	89,8		
		97,0		124,0	90,0	392,5	10/2 84
II			76,8	110,5	76,1		
				109,8	75,2		
	1,7			109,0	74,7		
				108,2	74,0		
		76,8		107,5	73,2	390,6	10/2 84
III			57,0	90,8	56,5		
				90,0	56,1		
	1,7			89,8	55,7		
				89,1	55,0		
		60,1		88,8	54,8	390,3	10/2 84
IV			43,2	76,9	43,0		
				76,4	42,7		
	1,7			76,0	42,3		
				75,8	42,0		
		44,2		75,5	41,8	388,1	10/2 84
V			32,9	66,5	32,9		
				66,3	32,7		
	1,6			66,0	32,3		
				65,9	32,1		
		31,6		65,8	32,0	389,3	10/2 84
VI			21,3	55,0	21,4		
				55,0	21,4		
	1,6			55,0	21,3		
				54,9	21,3		
		19,1		54,9	21,3	386,2	10/2 84
VII			13,0	46,8	13,3		
				46,8	13,3		
	1,6			46,8	13,3		
				46,8	13,3		
		11,0		46,8	13,4	386,5	10/2 84

Tabelle III.

Untersuchte Substanz: **Silber.** A.

$\pi_1 = 2{,}4633$ kg. $\varkappa = 2{,}39$, $d_1 = 1{,}099$ m.

$\pi_2 = 5{,}8756$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}00001868$.

q $= 0{,}3197$ qmm. d $= 0{,}638$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	Dat.
I[a]			—97,0	5,9	— 66,1		
				6,0	— 66,1		
	1,5			6,0	— 66,0		
				6,1	— 66,0		
		6,7		6,1	— 66,0	827,8	19/4 84
I			92,0	174,0	98,1		
				175,1	99,3		
	1,7			177,0	101,0		
				178,3	102,0		
		97,1		178,7	102,7	876,6	20/1 84
II			74,3	149,1	72,0		
				145,9	69,8		
	1,6			143,4	67,4		
				141,1	65,3		
		78,0		139,1	64,0	854,1	20/1 84
III			35,0	108,1	34,1		
				106,7	33,0		
	1,6			105,2	32,9		
				104,1	30,8		
		58,7		102,9	28,9	838,9	20/1 84
IV			11,0	83,2	10,3		
				82,0	9,0		
	1,7			80,8	7,9		
				79,2	6,3		
		43,0		77,8	4,5	829,1	20/1 84
V			—18,9	53,0	— 19,0		
				52,2	— 19,3		
	1,6			51,8	— 19,9		
				51,1	— 20,6		
		26,7		50,3	— 21,0	817,3	20/1 84
VI			—42,1	29,2	— 41,6		
				29,1	— 41,4		
	1,6			29,0	— 41,6		
				29,0	— 41,9		
		13,8		28,9	— 42,0	812,0	20/1 84
VII			—53,6	17,8	— 52,8		
				17,8	— 52,7		
	1,6			17,8	— 52,6		
				17,9	— 52,5		
		8,2		17,9	— 52,3	806,2	20/1 84

Tabelle II.

Untersuchte Substanz: **Eisen** III. A.

$\pi_1 = 9{,}7784$ kg. $\varkappa = 1{,}536$. $d_1 = 1{,}091$ m.
$\pi_2 = 15{,}0197$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}00001246$.
q = 0,3068 qmm. d = 0,625 mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	Dat.
Ia			—27,5	42,9	— 26,8		
				42,9	— 26,8		
	2,8			42,9	— 26,7		
				43,0	— 26,7		
		6,0		43,0	— 26,6	806,0	1/3 84
I			75,1	148,1	76,7		
				148,8	77,0		
	3,3			148,9	77,1		
				149,0	77,2		
		96,9		149,1	77,6	829,1	1/3 84
II			57,1	129,0	57,0		
				128,2	56,1		
	3,3			127,3	55,6		
				126,8	54,8		
		78,9		126,0	54,0	827,5	1/3 84
III			40,0	111,6	39,8		
				110,8	39,0		
	3,2			109,8	38,1		
				109,0	37,2		
		64,7		108,1	36,7	823,6	1/3 84
IV			24,0	95,0	23,7		
				94,1	23,0		
	2,8			93,5	22,2		
				92,9	21,7		
		51,0		92,2	21,0	819,7	1/3 84
V			10,3	81,0	10,3		
				80,8	10,0		
	3,2			80,3	9,8		
				80,0	9,3		
		39,6		79,7	9,0	815,6	1/3 84
VI			— 1,9	68,7	— 1,8		
				68,2	— 2,0		
	2,9			68,1	— 2,1		
				68,0	— 2,2		
		28,8		67,8	— 2,7	811,9	1/3 84
VII			—13,8	56,5	— 13,3		
				56,4	— 13,4		
	2,9			56,3	— 13,6		
				56,2	— 13,7		
		18,9		56,1	— 13,8	807,8	1/3 84
VIII			—29,3	40,0	— 29,0		
				40,0	— 29,0		
	3,3			40,1	— 29,0		
				40,2	— 29,0		
		6,2		40,2	— 28,9	800,2	2/3 84

Tabelle IV.

Untersuchte Substanz: **Kupfer** II. A.

$\pi_1 = 4{,}0585$ kg. $\varkappa = 2{,}192$. $d_1 = 1{,}091$ m.
$\pi_2 = 8{,}8988$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}00001613$.
q = 0,3696 qmm. d = 0,686 m.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	Dat.
Ia			—61,1	— 1,0	— 60,2		
				— 0,9	— 60,2		
	2,7			— 0,9	— 60,2		
				— 0,9	— 60,1		
		7,1		— 0,9	— 60,1	684,0	8/3 84
I			63,1	134,3	68,2		
				135,1	69,2		
	3,0			135,9	69,8		
				136,3	70,3		
		96,9		137,0	70,9	765,0	8/3 84
II			47,9	114,0	48,9		
				113,1	48,0		
	3,1			112,0	47,0		
				111,0	46,0		
		77,6		110,2	45,7	744,3	8/3 84
III			24,7	89,7	26,0		
				89,3	25,7		
	3,1			89,3	25,0		
				88,0	24,3		
		61,6		87,3	23,8	731,1	8/3 84
IV			10,2	74,2	11,2		
				74,0	11,0		
	3,1			73,6	10,8		
				73,0	10,2		
		52,5		72,8	9,9	723,3	8/3 84
V			—10,0	53,0	— 8,8		
				52,8	— 9,0		
	2,8			52,8	— 9,1		
				52,4	— 9,4		
		39,1		52,0	— 9,9	712,4	8/3 84
VI			—28,1	34,0	— 27,0		
				34,0	— 27,0		
	2,8			34,0	— 27,0		
				33,9	— 27,0		
		28,4		33,8	— 27,1	703,6	8/3 84
VII			—42,7	18,8	— 41,3		
				18,9	— 41,3		
	2,7			18,9	— 41,2		
				18,9	— 41,2		
		19,5		18,9	— 41,1	694,2	8/3 84
VIII			—63,1	— 2,3	— 61,9		
				— 2,2	— 61,8		
	2,8			— 2,1	— 61,6		
				— 2,1	— 61,5		
		7,5		— 2,0	— 61,3	686,5	9/3 84

Tabelle V.

Untersuchte Substanz: **Zink.** A.

$\pi_1 = 0{,}1085$ kg. $\varkappa = 10{,}083$. $d_1 = 1{,}095$ m.
$\pi_2 = 1{,}0942$ kg. $a_{50} = 0{,}00002076$.
q $= 1{,}2096$ qmm. d $= 1{,}241$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	Dat.
I			192,5	205,0	193,3		
				205,1	193,7		
	0,7			205,2	193,9		
				205,2	194,0		
		97,5		205,7	194,3	130,4	9/1 84
II			141,0	155,0	143,7		
				154,3	143,0		
	0,5			153,9	142,4		
				152,6	141,2		
		69,2		152,0	140,0	127,4	9/1 84
III			96,4	110,4	100,0		
				110,6	100,0		
	0,5			110,0	99,9		
				110,0	99,2		
		46,5		109,2	99,1	117,8	9/1 84
IV			56,4	68,8	59,0		
				69,1	59,6		
	0,5			69,3	59,8		
				69,3	59,9		
		25,2		69,3	59,9	108,4	9/1 84
V			34,0	45,1	35,9		
				45,7	36,2		
	0,7			45,8	36,3		
				45,9	36,3		
		12,1		46,0	36,7	109,7	9/1 84
VI			24,1	34,0	25,0		
				34,1	25,3		
	0,5			34,3	25,5		
				34,4	25,6		
		6,7		34,5	25,8	101,7	10/1 84

Tabelle VI.

Untersuchte Substanz: **Blei.** A.

$\pi_1 = 0{,}0889$ kg. $\varkappa = 1{,}982$. $d_1 = 1{,}115$ m.
$\pi_2 = 0{,}1762$ kg. $a = 0{,}00002704$.
q $= 1{,}6879$ qmm. d $= 1{,}466$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	Dat.
I			611,0	622,0	612,0		
				622,0	612,0		
	0,6			623,0	613,5		
				623,0	615,0		
		97,3		624,0	615,0	94,9	31/12 83
II			540,0	549,1	539,9		
				548,0	538,8		
	0,5			547,0	537,0		
				545,0	535,0		
		71,2		543,1	533,0	98,2	31/12 83
III			481,3	489,0	481,0		
				488,2	479,8		
	0,4			487,0	478,7		
				486,2	477,7		
		46,9		485,0	476,7	84,2	31/12 83
IV			432,2	440,0	432,0		
				439,9	431,9		
	0,4			439,5	431,5		
				439,0	431,0		
		28,8		438,3	430,8	83,3	31/12 83
V			370,8	378,4	371,0		
				378,4	371,0		
	0,4			378,4	371,0		
				378,3	371,0		
		6,9		378,3	371,0	80,9	31/12 83
VI			355,8	366,0	358,9		
				366,1	359,1		
	0,7			366,1	359,2		
				366,2	359,2		
		0,2		366,3	359,3	78,2	2/1 84

Tabelle VII.

Untersuchte Substanz: **Messing.** A.

$\pi_1 = 4{,}6431$ kg. $\varkappa = 1{,}699$. $d_1 = 1{,}092$ m.
$\pi_2 = 7{,}8875$ kg. $\alpha_{55} = 0{,}00001865$
q $= 0{,}6461$ qmm. d $= 0{,}907$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	Dat.
I[a]			— 23,3	42,9	— 22,9		
				43,0	— 22,9		
	3,1			43,0	— 22,9		
				43,0	— 22,8		
		6,6		43,0	— 22,8	760,6	20/2 84
I			122,6	191,0	123,8		
				191,3	124,0		
	3,1			191,8	124,2		
				191,9	124,4		
		97,1		192,0	124,8	777,3	20/2 84
II			103,0	169,9	102,3		
				168,8	101,0		
	3,0			167,1	97,8		
				165,8	98,3		
		80,7		164,4	97,1	775,0	20/2 84
III			73,0	139,0	72,2		
				138,0	71,1		
	3,1			137,0	70,1		
				135,9	69,3		
		65,9		135,0	68,2	764,2	20/2 84
IV			50,0	115,3	49,1		
				114,8	48,2		
	3,0			113,6	47,1		
				112,3	46,0		
		51,3		111,4	45,1	759,7	20/2 84
V			27,3	93,0	27,0		
				92,3	26,3		
	2,9			91,7	25,6		
				90,9	25,0		
		38,4		90,1	24,3	757,5	20/2 84
VI			7,9	73,2	7,9		
				72,9	7,3		
	2,6			72,7	7,0		
				72,0	6,8		
		27,2		71,7	6,4	752,1	20/2 84
VII			— 8,5	56,8	— 8,1		
				56,8	— 8,1		
	2,5			56,7	— 8,2		
				56,5	— 8,4		
		18,0		56,3	— 8,6	748,7	20/2 84
VIII			— 30,8	33,9	— 30,2		
				34,0	— 30,1		
	3,2			34,0	— 30,0		
				34,1	— 30,0		
		6,1		34,1	— 30,0	740,6	21/2 84

Tabelle IX.

Untersuchte Substanz: **Fischbein.** A.

$\pi_1 = 0{,}1956$ kg. $\varkappa = 0{,}466$. $d_1 = 1{,}090$ m.
$\pi_2 = 0{,}0950$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}00005$.
q $= 7{,}6698$ qmm. d $= 3{,}125$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ [1]	Dat.
I[a]			71,7	127,0	73,1		
				127,7	73,4		
	2,3			128,0	73,9		
				128,0	74,0		
		10,1		128,2	74,2	49,59	22/3 84
I [2]			504,0	641,5	508,0		
				635,7	505,0		
	3,1			629,7	503,7		
				624,7	501,8		
		77,9		619,5	498,0	110,75	22/3 84
II			458,0	558,0	462,0		
				557,0	461,5		
	2,4			556,0	461,5		
				555,0	461,0		
		61,5		553,0	460,0	85,40	22/3 84
III			428,0	509,0	431,0		
				510,0	431,9		
	2,3			510,0	431,9		
				509,0	431,4		
		45,4		508,8	431,3	70,98	22/3 84
IV			402,8	470,1	405,0		
				472,1	406,1		
	2,2			473,0	406,5		
				472,9	407,0		
		31,7		473,0	407,0	66,08	22/3 84
V			386,9	448,0	389,0		
				448,8	389,5		
	1,9			449,0	390,0		
				449,6	390,3		
		22,0		449,8	390,8	54,42	22/3 84
VI			356,8	408,0	358,0		
				408,7	358,7		
	2,4			409,0	358,9		
				409,3	359,6		
		10,7		409,8	359,3	50,20	23/3 84

1) In Skalenteilen.

2) Vor N I fand eine Streckung statt.

Tabelle VIII.

Untersuchte Substanz: **Neusilber.** A.

$\pi_1 = 4{,}2890$ kg. $\varkappa = 0{,}828$. $d_1 = 1{,}094$ m.

$\pi_2 = 3{,}5497$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}00001740$.

q $= 0{,}7344$ qmm. d $= 0{,}967$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	Dat.
Ia			— 21,0	1,4	— 20,4		
				1,4	— 20,3		
	1,5			1,4	— 20,3		
				1,5	— 20,2		
		6,7		1,6	— 20,2	251,1	3/2 84
I			78,0	100,3	(?) 75,2		
				99,5	76,5		
	1,3			98,8	75,3		
				97,7	74,5		
		67,7		96,8	73,5	262,6	3/2 84
II			50,1	72,8	50,0		
				72,1	49,1		
	1,3			71,3	48,5		
				70,8	48,0		
		51,3		70,1	47,3	259,4	3/2 84
III			31,3	54,0	31,0		
				53,3	30,8		
	1,3			53,0	30,2		
				52,3	29,9		
		39,3		52,0	29,5	256,8	3/2 84
IV			4,6	27,1	4,8		
				27,0	4,7		
	1,2			26,9	4,4		
				26,7	4,2		
		22,7		26,5	4,1	257,9	3/2 84
V			— 14,3	8,1	— 14,0		
				8,1	— 14,0		
	1,2			8,1	— 14,0		
				8,1	— 14,0		
		11,4		8,1	— 14,0	254,8	3/2 84

Tabelle X.

Untersuchte Substanz: **Kautschuk.**[1] A.

$\pi_1 = 0{,}00314$ kg. $\varkappa = 0{,}217$. $d_1 = 1{,}083$ m.

$\pi_2 = 0{,}00068$ kg. $\alpha =$ —.

q $= 47{,}7820$ qmm. d $= 7{,}80$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ[2]	Dat.
I			402	476	402		
				477	404		
	2,7			476	402		
				475	400		
		31,4		475	400	68,7	16/3 84
II			268	412	279		
				413	280		
	2,1			413	282		
				414	282		
		15,8		415	282	122,2	16/3 84
III			202	375	217		
				378	219		
	2,4			378	220		
				380	221		
		10,6		381	222	147,0	17/3 84
IV			208	380	226		
				383	229		
	2,8			384	231		
				386	232		
		12,8		386	233	142,1[3]	18/3 84

1) Die eingeklemmten Enden des Kautschukcylinders waren gehärtet.

2) Skalenteile.

4) Man beachte die Temperatur!

Tabellen B.

Tabelle XI.

Untersuchte Substanz: **Platina** II. B.

$\pi_1 = 4{,}1546$ kg. $\varkappa = 2{,}193$. $d_1 = 1{,}093$ m.
$\pi_2 = 9{,}1098$ kg. $\alpha_{55} = 0{,}000009243$. q $= 0{,}36103$ qmm. d $= 0{,}678$mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	l	ϱ	δ	Dat.
I[a]			— 7,7	32,8	— 7,3					
				32,9	— 7,2				452,8	
	1,9			33,0	— 7,2			10,3		
				33,0	— 7,1		4,7			
		6,3		33,0	— 7,1	463,1				$^{16}/_{2}$ 84
I			69,7	111,0	70,0					
				111,3	70,7				456,1	
	1,9			111,7	70,6			16,9		
				111,8	71,0		7,7			
		97,0		112,0	71,0	473,0				$^{16}/_{2}$ 84
II			51,3	92,1	50,7					
				91,2	49,9				462,8	
	1,7			90,4	49,0			12,3		
				89,9	48,3		5,6			
		71,5		89,1	47,7	475,1				$^{16}/_{2}$ 84
III			37,8	78,7	37,3					
				78,1	37,0				469,4	
	1,9			77,7	36,3			4,4		
				77,1	35,9		2,0			
		59,6		76,7	35,3	473,8				$^{16}/_{2}$ 84
IV			24,0	64,8	23,9					
				64,3	23,4				459,8	
	1,7			64,0	23,0			10,3		
				63,7	22,8		4,7			
		42,9		63,2	22,3	470,1				$^{16}/_{2}$ 84
V			12,1	52,9	12,1					
				52,7	12,0				460,5	
	1,7			52,4	11,8			8,3		
				52,1	11,4		3,8			
		29,1		52,0	11,2	468,8				$^{16}/_{2}$ 84
VI			1,8	42,3	1,9					
				42,2	1,9				453,5	
	1,7			42,2	1,8			11,8		
				42,1	1,8		5,4			
		17,6		42,1	1,8	465,3				$^{16}/_{2}$ 84
VII			— 10,2	30,1	— 10,0					
				30,2	— 10,0				463,9	
	1,7			30,2	— 10,0			0,2		
				30,2	— 10,0		0,1			
		5,5		30,2	— 10,0	464,1				$^{17}/_{2}$ 84

Tabelle XII.

Untersuchte Substanz: **Eisen** III. B.

$\pi_1 = 9{,}7784$ kg. $\varkappa = 1{,}536$. $d_1 = 1{,}091$ m.
$\pi_2 = 15{,}0197$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}00001246$. q $= 0{,}3068$ qmm. d $= 0{,}625$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	l	ϱ	δ	Dat.
I[a]			— 26,4	41,3	— 26,3					
				41,7	— 26,2				788,3	
	3,2			41,9	— 26,2			0,4		
				42,0	— 26,2		0,3			
		7,5		42,0	— 26,1	788,7				5/3 84
I			74,5	147,0	75,9					
				147,1	76,2				783,9	
	3,3			147,4	76,2			37,2		
				147,2	76,3		24,2			
		97,2		147,8	76,8	821,1				5/3 84
II			59,0	130,2	59,1					
				129,8	58,1				780,0	
	3,2			128,8	57,3			42,1		
				128,1	56,9		27,4			
		76,4		127,8	56,1	822,1				5/3 84
III			45,7	116,9	45,7					
				116,1	45,0				800,9	
	3,2			115,8	44,7			17,1		
				115,0	44,1		11,1			
		66,4		114,8	43,6	818,0				5/3 84
IV			34,9	105,8	34,9					
				105,3	34,6				797,0	
	3,2			105,0	34,1			19,2		
				104,7	33,9		12,5			
		57,5		104,1	33,3	816,2				5/3 84
V			23,8	94,2	23,8					
				94,0	23,4				794,3	
	3,2			93,7	23,1			18,3		
				93,2	22,9		11,9			
		47,1		93,0	22,4	812,6				5/3 84
VI			11,1	81,3	11,3					
				81,1	11,1				791,9	
	3,2			81,0	11,0			16,8		
				80,9	10,9		11,0			
		36,9		80,7	10,7	808,7				5/3 84
VII			1,2	71,1	1,8					
				71,1	1,7				794,9	
	3,2			71,0	1,3			11,8		
				71,0	1,2		7,8			
		28,6		70,9	1,1	806,7				5/3 84
VIII			— 10,0	59,7	— 9,7					
				59,8	— 9,7				798,2	
	2,9			59,8	— 9,7			6,0		
				59,8	— 9,8		3,9			
		19,3		59,7	— 9,8	804,2				5/3 84
IX			— 28,0	40,9	— 27,3					
				41,0	— 27,3				777,3	
	3,1			41,0	— 27,2			12,8		
				41,1	— 27,2		8,3			
		6,9		41,1	— 27,2	790,1				6/3 84

Tabelle XIII.

Untersuchte Substanz: **Silber.** B.

$\pi_1 = 2{,}4633$ kg. $\varkappa = 1{,}92$. $d_1 = 1{,}099$ m.
$\pi_2 = 4{,}7406$ kg. $a_{50} = 0{,}00001868$. q $= 0{,}3197$ qmm. d $= 0{,}638$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	$\bar{l}$	ϱ	δ	Dat.
I[a]			— 55,8	1,9	— 54,8					
				2,0	— 54,7				619,2	
	1,29			2,0	— 54,4			28,1		
				2,1	— 54,3		14,6			
		5,8		2,1	— 54,2	647,3				23/1 84
I			102,0	165,0	104,7					
				165,7	105,0				625,6	
	1,55			166,0	105,3			70,9		
				166,2	105,7		36,3			
		97,1		166,7	105,8	696,5				23/1 84
II			74,0	134,0	72,3					
				131,3	70,4				596,4	
	1,44			129,0	68,1			87,2		
				126,8	66,0		45,4			
		74,5		124,5	64,0	683,6				23/1 84
III			49,0	107,4	47,2					
				105,3	45,0				634,1	
	1,37			103,0	43,0			42,1		
				101,0	41,0		21,9			
		60,9		98,9	39,0	676,2				23/1 84
IV			20,0	78,2	19,3					
				77,0	18,7				641,2	
	1,47			76,0	17,0			29,0		
				74,9	16,0		15,1			
		45,7		73,6	14,4	670,2				23/1 84
V			— 1,0	57,0	— 1,0					
				56,3	— 1,8				623,4	
	1,44			55,7	— 2,4			37,8		
				54,8	— 3,2		19,7			
		33,8		54,0	— 3,2	661,2				23/1 84
VI			— 22,3	35,1	— 22,2					
				35,0	— 22,2				631,2	
	1,51			34,8	— 22,8			24,7		
				34,2	— 23,0		12,9			
		22,1		34,0	— 23,3	655,9				23/1 84
VII			— 43,1	14,3	— 42,7					
				14,3	— 42,3				623,1	
	1,42			14,3	— 42,2			25,7		
				14,3	— 42,2		13,4			
		10,7		14,4	— 42,1	648,8				23/1 84
VIII			— 49,6	7,9	— 48,8					
				8,0	— 48,8				636,2	
	1,59			8,0	— 48,8			15,7		
				8,0	— 48,7		8,2			
		7,4		8,1	— 48,7	651,9				24/1 84

Tabelle XIV.

Untersuchte Substanz: **Kupfer** II. B.

$\pi_1 = 4{,}0585$ kg. $\varkappa = 2{,}192$. $d_1 = 1{,}091$ m.
$\pi_2 = 8{,}8988$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}00001613$. q $= 0{,}3696$ qmm. d $= 0{,}686$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	l	ϱ	δ	Dat.
Ia			— 59,2	1,8	— 57,8					
				2,0	— 57,7				638,9	
	3,2			2,0	— 57,6			47,9		
				2,0	— 57,3		21,8			
		10,7		2,0	— 57,2	686,8				12/3 84
I			67,2	136,0	70,8					
				136,4	71,1				633,8	
	3,4			137,0	71,4			122,5		
				137,2	72,0		55,9			
		96,9		137,8	72,5	756,3				12/3 84
II			46,1	111,7	47,1					
				111,0	46,2				613,9	
	3,2			109,9	45,7			122,3		
				109,1	44,8		55,8			
		75,4		108,0	43,9	736,3				12/3 84
III			28,1	92,1	29,0					
				91,8	28,2				644,9	
	3,2			91,1	27,9			82,2		
				90,5	27,2		37,5			
		64,3		89,9	26,8	727,1				12/3 84
IV			11,0	74,3	11,9					
				74,0	11,4				639,9	
	3,0			73,8	11,1			79,1		
				73,1	10,8		36,1			
		50,7		72,8	10,2	719,0				12/3 84
V			— 5,0	57,4	— 4,1					
				57,7	— 4,2				640,4	
	3,1			57,7	— 4,2			70,8		
				57,2	— 4,4		32,3			
		40,9		57,0	— 4,7	711,2				12/3 84
VI			— 21,2	40,8	— 20,1					
				40,9	— 20,0				656,0	
	3,1			41,0	— 20,0			49,2		
				41,0	— 20,0		22,5			
		30,5		41,0	— 20,0	705,2				12/3 84
VII			— 34,2	27,1	— 33,1					
				27,3	— 33,0				657,2	
	2,9			27,4	— 33,0			40,9		
				27,4	— 33,0		18,7			
		22,5		27,4	— 33,0	698,1				12/3 84
VIII			— 54,2	6,4	— 53,1					
				6,7	— 53,0				657,2	
	3,0			6,8	— 53,0			33,5		
				6,8	— 52,9		15,3			
		11,6		6,9	— 52,8	690,5				13/3 84

Tabelle XV.

Untersuchte Substanz: **Zink.** B.

$\pi_1 = 0{,}1085$ kg. $\varkappa = 10{,}083$. $d_1 = 1{,}095$ m.
$\pi_2 = 1{,}0942$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}00002076$. $q = 1{,}2096$ qmm. $d = 1{,}241$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	l	ϱ	δ	Dat.
Ia			20,0	32,2	23,0					
				32,8	23,3				— 305,9	
	0,5			33,0	23,7			412,1		
				33,0	23,8		40,9			
		5,5		33,0	23,8	106,2				12/1 84
I			198,0	214,3	203,1					
				215,0	203,7				— 496,3	
	0,6			215,7	204,0			628,3		
				216,0	204,7		62,3			
		97,2		216,2	204,9	132,0				12/1 84
II			159,0	171,2	159,6					
				170,2	158,3				— 148,2	
	0,5			168,9	157,0			277,2		
				167,8	156,0		27,5			
		71,6		166,7	155,1	129,0				12/1 84
III			94,0	108,4	98,1					
				108,8	98,1				— 625,4	
	0,5			108,4	98,0			741,3		
				108,0	97,7		73,6			
		40,2		107,7	97,7	115,9				12/1 84
IV			57,8	71,8	62,0					
				72,1	62,7				— 587,2	
	0,5			72,3	62,7			696,9		
				72,4	62,9		69,1			
		20,1		72,4	63,0	109,7				12/1 84
V			38,5	50,2	40,9					
				50,8	41,2				— 304,2	
	0,5			51,0	41,5			412,2		
				51,0	41,8		40,9			
		8,8		51,2	41,8	108,0				12/1 84
VI			32,0	42,2	33,2					
				42,7	33,7				— 117,0	
	0,4			42,8	33,8			222,3		
				43,0	33,8		22,1			
		4,3		43,0	34,0	105,3				13/1 84
VII			34,0	43,7	34,4					
				43,7	34,7				34,1	
	0,4			43,8	34,7			71,2		
				43,9	34,7		7,1			
		4,3		43,9	34,9	105,3				13/1 84
VIII			36,7	46,1	37,0					
				46,2	37,1				61,8	
	0,4			46,2	37,1			43,1		
				46,3	37,2		4,3			
		5,6		46,3	37,2	104,9				13/1 84
IX			35,9	45,3	36,2					
				45,5	36,3				16,0	
	0,4			45,7	36,5			88,9		
				45,8	36,7		8,8			
		4,9		45,8	36,8	104,9				14/1 84

Tabelle XVI.

Untersuchte Substanz: **Blei.** B.

$\pi_1 = 0{,}0889$ kg. $\varkappa = 1{,}982$. $d_1 = 1{,}115$ m.
$\pi_2 = 0{,}1762$ kg. $\alpha_{60} = 0{,}00002704$. q $= 1{,}6879$ qmm. d $= 1{,}466$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	l	ϱ	δ	Dat.
I			597,0	605,5	595,2					
				603,8	593,9				55,8	
	0,4			601,2	591,4			36,5		
				599,4	590,2		18,4			
		74,1		598,2	589,0	92,3				2/1 83
II			537,8	545,8	536,9					
				544,8	535,8				87,9	
	0,4			544,0	535,0			2,4		
				542,8	533,8		1,2			
		52,8		541,5	532,8	90,3				2/1 83
III			467,0	474,5	466,7					
				474,0	466,2				75,1	
	0,4			473,6	466,2			11,5		
				473,2	465,2		5,8			
		26,9		473,0	465,2	86,6				2/1 83
IV			428,0	435,8	428,2					
				435,4	428,2				74,9	
	0,4			435,4	428,2			7,0		
				435,7	428,0		3,5			
		12,5		435,2	428,0	81,9				2/1 83
V			392,4	399,8	392,8					
				399,9	393,0				70,8	
	0,6			399,9	393,0			5,9		
				399,9	393,0		3,0			
		— 0,6		400,0	393,0	76,7				3/1 83

Tabelle XVII.

Untersuchte Substanz: **Messing.** B.

$\pi_1 = 4{,}6431$ kg. $\varkappa = 1{,}699$. $d_1 = 1{,}092$ m.
$\pi_2 = 7{,}8875$ kg. $\alpha_{55} = 0{,}00001865$. q $= 0{,}6461$ qmm. d $= 0{,}907$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	l	ϱ	δ	Dat.
I^a			— 26,3	38,3	— 25,8					
				38,3	— 25,8				733,7	
	2,9			38,3	— 25,8			7,6		
				38,4	— 25,7		4,5			
		8,6		38,4	— 25,7	741,1				$^{23}/_2$ 84
I			122,9	191,1	124,1					
				191,5	124,3				753,5	
	3,1			191,8	124,7			20,6		
				192,0	124,8		12,1			
		96,9		192,1	125,0	774,1				$^{23}/_2$ 84
II			101,9	169,3	102,0					
				168,1	101,0				736,0	
	3,2			167,0	100,0			31,4		
				166,0	98,9		18,5			
		80,8		165,0	97,9	767,4				$^{23}/_2$ 84
III			78,0	144,0	77,3					
				143,0	76,1				781,7	
	3,3			141,8	75,1			— 17,5		
				140,9	74,3		— 10,3			
		66,8		140,0	73,1	764,2				$^{23}/_2$ 84
IV			52,8	118,3	52,3					
				117,7	51,7				744,2	
	3,1			116,9	50,9			12,9		
				116,0	50,0		7,6			
		53,5		115,3	49,4	757,1				$^{23}/_2$ 84
V			37,8	103,2	37,6					
				102,7	36,9				729,8	
	3,1			101,9	36,1			24,0		
				101,1	35,4		14,1			
		44,1		100,4	35,0	753,8				$^{23}/_2$ 84
VI			20,0	85,1	20,0					
				85,0	19,9				733,1	
	3,2			84,7	19,4			18,2		
				84,2	19,0		10,7			
		33,8		84,0	18,8	751,2				$^{23}/_2$ 84
VII			5,3	70,5	5,8					
				70,3	5,7				732,5	
	2,8			70,1	5,0			17,5		
				70,0	5,0		10,3			
		24,9		69,8	4,9	750,0				$^{23}/_2$ 84
VIII			— 8,2	56,7	— 8,0					
				56,4	— 8,0				715,3	
	2,8			56,3	— 8,0			27,9		
				56,2	— 8,1		16,4			
		16,7		56,3	— 8,1	743,2				$^{23}/_2$ 84
IX			— 27,4	37,2	— 26,9					
				37,2	— 26,9				730,8	
	2,8			37,3	— 26,8			10,3		
				37,3	— 26,8		6,0			
		8,3		37,4	— 26,8	741,1				$^{24}/_2$ 84

Tabelle XVIII.

Untersuchte Substanz: **Neusilber.** B.

$\pi_1 = 4{,}2890$ kg. $\varkappa = 0{,}828$. $d_1 = 1{,}094$ m.
$\pi_2 = 3{,}5497$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}0000174$. q $= 0{,}7344$ qmm. d $= 0{,}967$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ	l	ϱ	δ	Dat.
Ia			— 20,0	2,7	— 19,3					
				2,7	— 19,3				250,5	
	1,5			2,7	— 19,3			3,5		
				2,8	— 19,2		4,2			
		7,0		2,8	— 19,2	254,0				6/1 84
I			60,0	82,9	59,4					
				82,0	58,8				258,9	
	1,3			81,2	58,0			5,6		
				80,6	57,2		6,8			
		56,3		79,9	56,8	264,5				6/1 84
II			43,8	66,6	43,5					
				66,0	43,0				258,9	
	1,2			65,2	42,3			2,4		
				64,8	41,8		2,9			
		45,4		64,0	41,0	261,3				6/1 84
III			22,0	44,8	22,0					
				44,3	21,7				252,2	
	1,3			44,0	21,2			8,0		
				43,8	21,0		9,7			
		32,0		43,3	20,7	260,2				6/1 84
IV			— 1,0	21,8	— 0,8					
				21,7	— 0,9				245,6	
	1,3			21,7	— 1,0			11,2		
				21,3	— 1,0		13,5			
		18,7		21,2	— 1,1	256,8				6/1 84
V			— 21,1	1,3	— 20,8					
				1,4	— 20,8				252,9	
	1,2			1,4	— 20,7			3,1		
				1,5	— 20,7		3,7			
		6,9		1,5	— 20,7	256,0				7/1 84

*

Tabelle XIX.

Untersuchte Substanz: **Fischbein.** B.

$\pi_1 = 0{,}0978$ kg. $\varkappa = 0{,}971$. $d_1 = 1{,}090$ m.
$\pi_2 = 0{,}0950$ kg. $\alpha_{50} = 0{,}00005$. $q = 7{,}6698$ qmm. $d = 3{,}125$ mm.

N	v	t	a_ν	b_ν	c_ν	λ [1]	l [1]	ϱ [1]	δ [1]	Dat.
I[a]			7,7	55,0	6,0					
				55,3	6,2				45,88	
	2,3			55,8	6,7			— 0,79		
				56,0	6,9		— 0,82			
		8,8		56,1	7,0	45,09				26/3 84
I			225,0	431,0	240,0					
				437,0	245,0				153,44	
	3,2			446,0	251,0			30,18		
				451,0	254,0		31,09			
		96,9		459,0	260,0	183,62				26/3 84
II			180,0	329,0	183,0					
				323,0	179,0				97,12	
	3,2			313,0	176,0			20,71		
				305,0	173,0		21,33			
		78,4		298,0	170,0	117,83				26/3 84
III			116,0	215,5	118,3					
				214,0	118,0				66,17	
	2,7			212,0	117,0			18,65		
				210,0	116,0		19,21			
		60,0		207,0	115,0	84,82				26/3 84
IV			76,0	152,3	78,4					
				153,0	79,0				55,56	
	2,5			153,0	79,0			11,59		
				152,0	78,7		11,94			
		42,8		151,8	78,3	67,15				26/3 84
V			58,0	125,0	60,2					
				126,1	61,2				54,79	
	2,3			126,3	61,2			5,07		
				126,8	61,5		5,22			
		33,1		126,8	61,9	59,86				26/3 84
VI			49,0	110,1	51,0					
				110,9	51,6				49,74	
	2,6			111,6	52,0			4,91		
				112,0	52,6		5,05			
		23,7		112,3	53,0	54,65				26/3 84
VII			80,7	135,5	84,1					
				136,2	82,9				47,08	
	2,6			136,9	83,0			2,37		
				137,0	83,1		2,44			
		8,9		137,2	83,5	49,45				26/3 84

1) Angabe in Skalenteilen; 1 Sktl. = 2 mm.

19 AUG 87
BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

Fig 1.

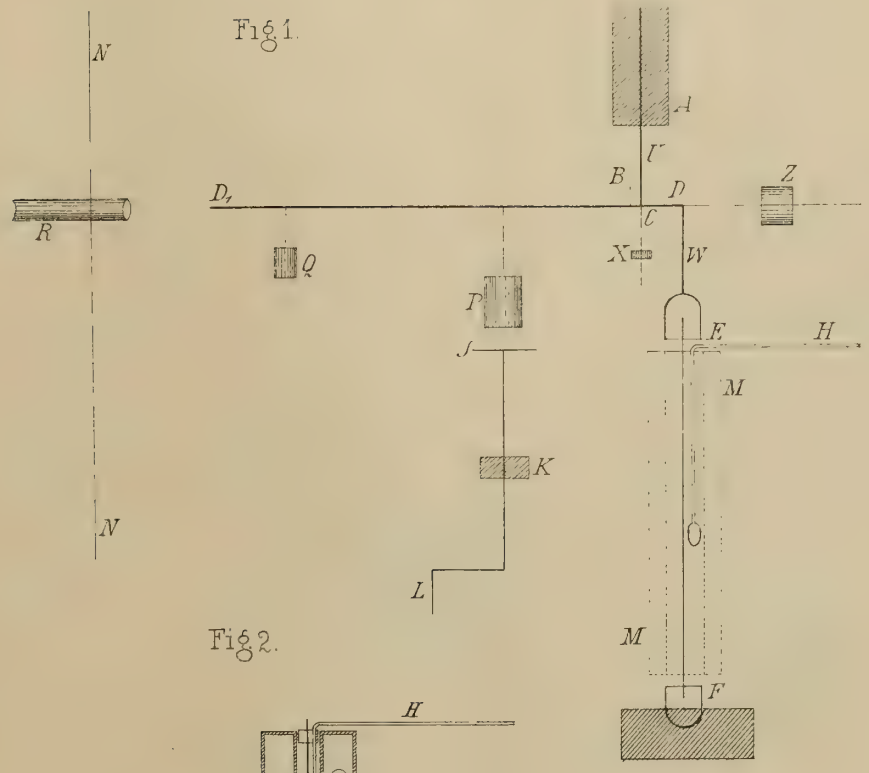
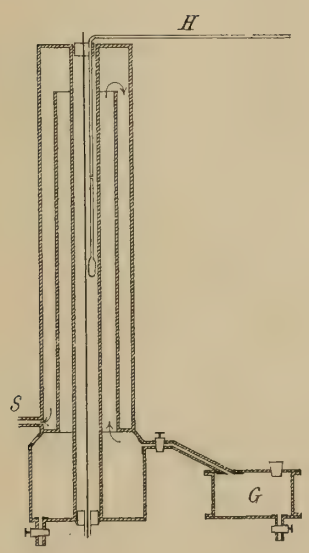


Fig 2.



BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

NATURAL HISTORY.

Fig. 3 (Zu Tab. XI u. I.)

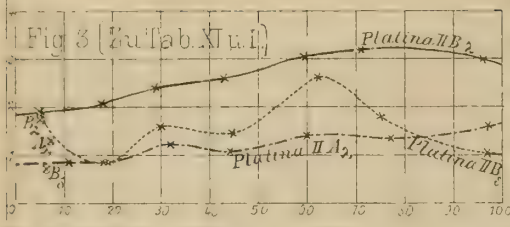


Fig. 4 (Zu Tab. XII u. II.)

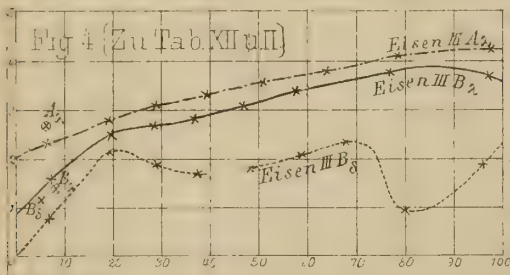


Fig. 6 (Zu Tab. XIV u. V.)

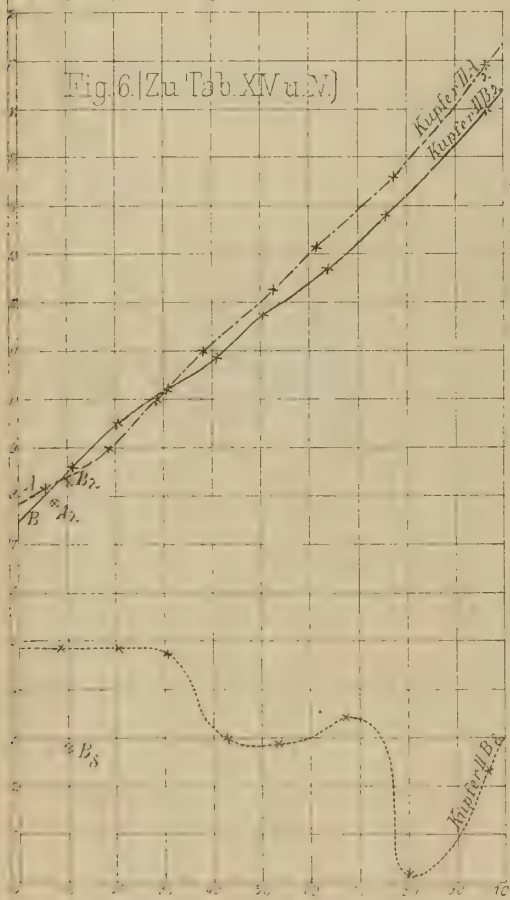


Fig. 5. (Zu Tab. XIII u. III.

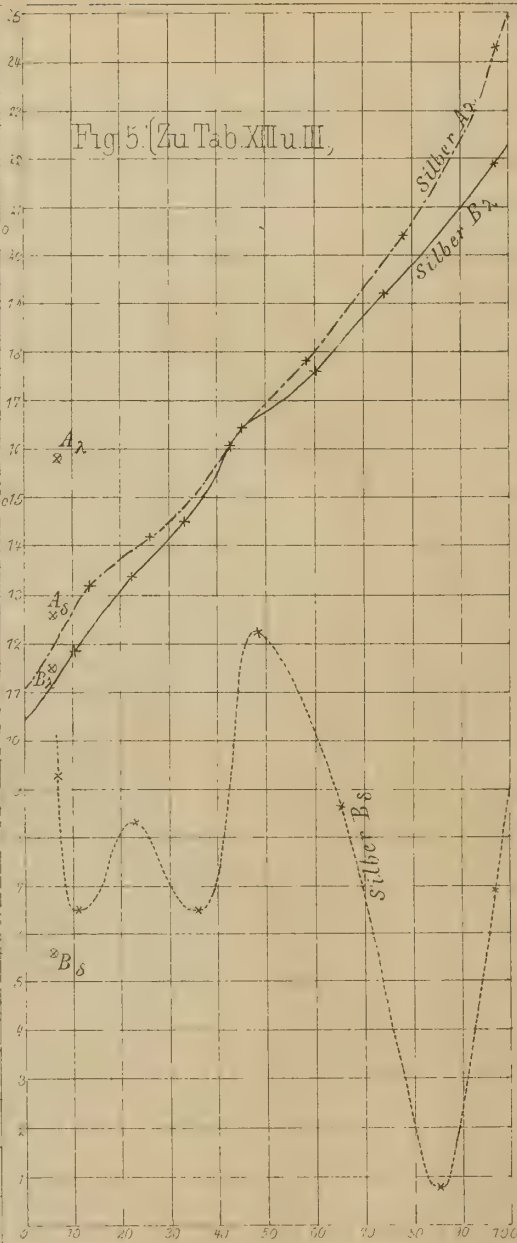
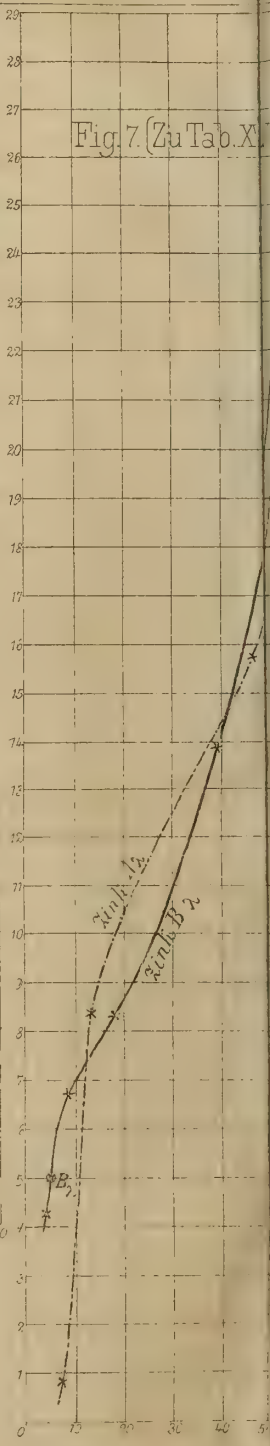


Fig. 7. (Zu Tab. XV



A_λ ——×——
B_λ ——×——
B_δ ------×------

handlung.

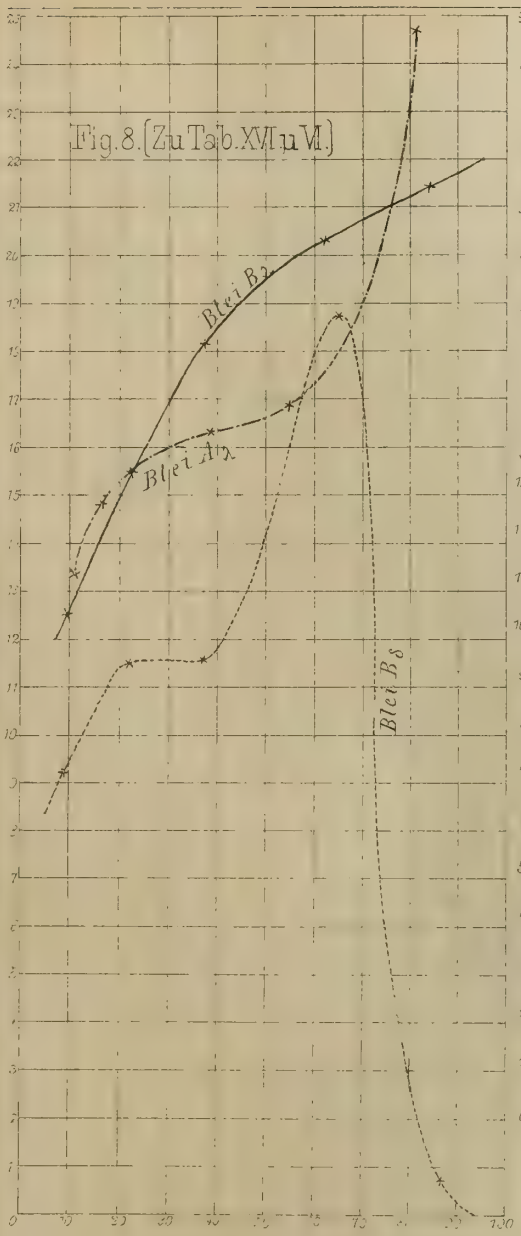


Fig.8. (Zu Tab. XVI u VI.)
Blei B_2
Blei A_2
Blei B_δ

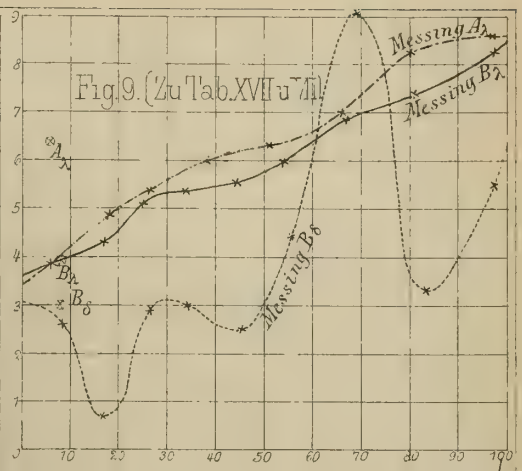


Fig.9. (Zu Tab. XVII u VII.)
Messing A_2
Messing B_2
A_2
B_2
B_δ
Messing B_δ

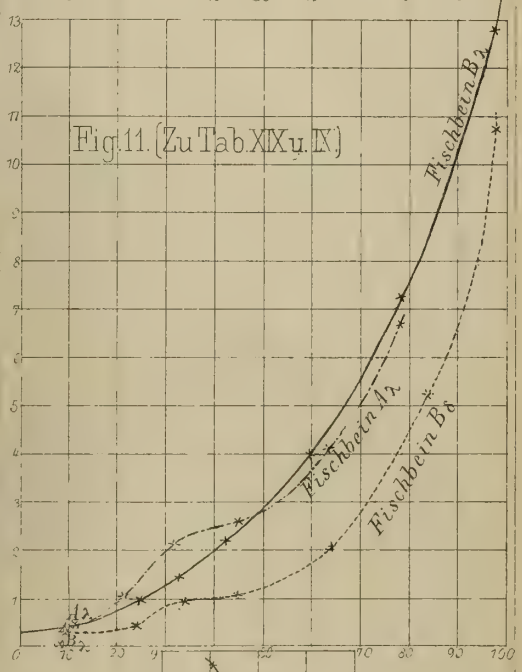


Fig.11. (Zu Tab. XIX u. IX.)
Fischbein B_2
Fischbein A_2
Fischbein B_δ
A_2
B_2

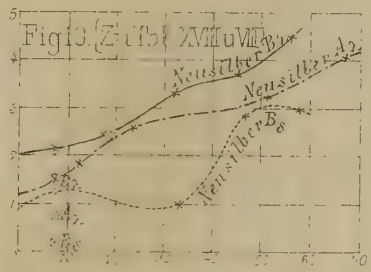


Fig.13. (Zu Tab. XVIII u VIII.)
Neusilber B_2
Neusilber A_2
Neusilber B_δ
A_2
B_2
B_δ

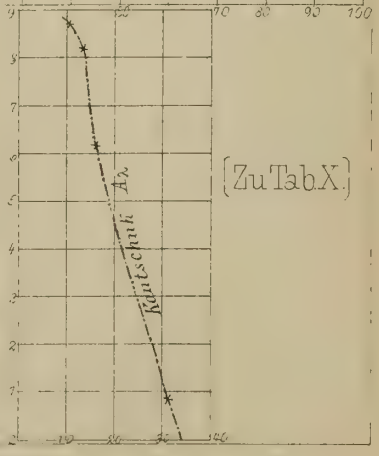


Fig.12
(Zu Tab. X.)
A_2
Tombak

NATURAL HISTORY

Inhalt.

Seite

Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Von *E. Lommel.* Mit lithographirten Tafeln 529

Ueber den Einfluss dioptrischer Fehler des Auges auf das Resultat astronomischer Messungen. Von *H. Seeliger* 665

Der primäre und sekundäre longitudinale Elastizitätsmodul und die thermische Konstante des Letzteren. Von *Andreas Miller.* Mit 2 Tafeln 705

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.